

中心極限定理における 剰余項の評価

統数研 清水 良一

分布 F は 4 次までのモーメントをもち、 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ とする。 F からとられた、大きさ n の標本の *normalized sum* の分布を F_n として、 *Edgeworth 展開* の剰余項,

$$R_n(x) = F_n(x) - \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を考える。 $R_n(x) = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ であることは知られているが、こゝでは、 F にもう少し条件をつけて、 $|R_n(x)|$ の上限を与えることを考えよう。 F 毎有界変分、密度関数 $f(x)$ をもつ (*total variation of $f(x) = \text{var } f = M$* とする) ならば、つぎの定理がなりたつ。

定理 上記の仮定のもとで、

$$(1) \quad |n\pi R_n(x)| \leq \left(\frac{7}{6} + \frac{298}{153} \cdot \left(1 - \frac{1}{4\alpha_4}\right)^n + 2e^{-\frac{n}{2\alpha_4}}\right)\alpha_4$$

$$+ \frac{2}{3n} |\alpha_3| e^{-\frac{n}{4\alpha_4}} + \min\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_4} M\right)^n, \frac{4}{3}\alpha_4 M^2 L^n\right)$$

$$\leq 3.53\alpha_4 + \frac{2}{3n} |\alpha_3| + \frac{4}{3}\alpha_4 M^2$$

F が対称なら,

$$(2) \quad |n\pi R_n(x)| \leq \left(\frac{42}{125} + \frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{3\alpha_4}\right)^n + e^{-\frac{n}{2\alpha_4}}\right)\alpha_4$$

$$+ \min\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_4} M\right)^n, \frac{3}{4}\alpha_4 M^2 L^n\right)$$

$$\leq 2.47\alpha_4 + 3\alpha_4 M^2/4.$$

ただし $L (< 1)$ は α_4 と M に依存する正の数である.

証明の概略. つぎの lemma をつくり. 前半は

Rogozin にある.

lemma 区間 $(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$ 上の一様分布の密

度を $U(x)$ とすると,

$$\text{var } f^{*n}(x) \leq 2U^{*n}(0) \leq M\sqrt{\frac{3}{n+1}}.$$

F の特性関数を $\varphi(t)$ とすると,

$$|\varphi(t)| \leq M/|t| \quad \text{for } t \neq 0$$

さて,

$$G_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - i \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} t^3\right)$$

とおく. inversion formula と lemma より.

$$(3) \quad |R_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} |\varphi^n(t) - g_n(t\sqrt{n})| dt.$$

とくに対称ならば,

$$(4) \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} |\varphi^n(t) - e^{-\frac{n}{2}t^2}| dt$$

F のモーメントに関する仮定から.

$$(5) \quad \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - i\frac{\alpha_3}{6}t^3 + A\alpha_4 t^4}, \quad \text{for } |t| \leq \alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

と書けて, $|A| \leq (2\alpha_4 + 5)/(2\alpha_4 - 1) \cdot 24$, とくに $\alpha_4 \leq 9/5$

のとき $\operatorname{Re} A \leq 0$. また F が対称のときは,

$$(6) \quad \varphi(t) \leq e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_4}{24} t^4} \quad \text{for } |t| \leq \alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

であることが分る. ことから,

$$(7) \quad J_1 \equiv \int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1} |\varphi^n(t) - g_n(t\sqrt{n})| dt \leq \int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1} |e^{nA\alpha_4 t^4} - 1| e^{-\frac{n}{2}t^2} dt$$

$$+ \int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1} |e^{-i \frac{n}{2} \alpha_4 t^2} - 1 + i \frac{\alpha_4}{6} n t^3| e^{-\frac{n}{2} t^2} dt$$

$$\leq \frac{7}{12} \alpha_4 n^{-1}.$$

対称の場合、

$$|\varphi^n(t) - e^{-\frac{n}{2} t^2}| \leq \max\left(\frac{1}{24} e^{-\frac{n}{24} \alpha_4 t^4}, |A|\right) * n \alpha_4 t^4 e^{-\frac{n}{2} t^2} \\ \leq 0.14 n \alpha_4 t^4 e^{-\frac{n}{2} t^2 \cdot \frac{11}{12}}$$

となるから、

$$(8) \quad J_1 \leq 0.14 n \alpha_4 \int_0^\infty t^3 e^{-\frac{n}{2} t^2 \cdot \frac{11}{12}} dt \leq \frac{42}{125} \alpha_4 \cdot n^{-1}$$

次に、

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_4}{24} \theta \cdot t^4 = (1 - \frac{4}{9} t^2) + (-\frac{1}{18} + \frac{\alpha_4}{24} \theta \cdot t^2) \cdot t^2 \\ (|\theta| \leq 1)$$

と書けるから、

$$|\varphi(t)| \leq 1 - \frac{85}{288} t^2, \quad \text{for } |t| \leq \frac{3}{2} \alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

となり、

$$(9) \quad J_2 \equiv \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2} \alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1} |\varphi^n(t)| dt \leq \alpha_4 \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2} \alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t \cdot (1 - \frac{85}{288} t^2)^n dt \\ = \frac{144}{85} \alpha_4 \cdot K_n(\alpha_4) \cdot n^{-1} \leq \frac{144}{153} \alpha_4 \cdot (1 - \frac{1}{4\alpha_4})^n \cdot n^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } K_n(x) &= (1 - 85/288x)^{n+1} - (1 - 255/384x)^{n+1} \\ &\leq \frac{5}{9} \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^n \end{aligned}$$

また F が対称のときは

$$|\varphi(t)| \leq 1 - t^2/3 \quad \text{for } |t| \leq 2\alpha_n^{-1/2}$$

とあるので,

$$\begin{aligned} (10) \quad J_2' &\equiv \int_{\alpha_n^{-1/2}}^{2\alpha_n^{-1/2}} t^{-1} |\varphi^n(t)| dt \leq \alpha_n \int_{\alpha_n^{-1/2}}^{2\alpha_n^{-1/2}} t \cdot \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^n dt \\ &\leq \frac{3}{2} \alpha_n \cdot n^{-1} \cdot K_n'(\alpha_n) \leq \frac{9}{4} \alpha_n n^{-1} \left(1 - \frac{1}{3\alpha_n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{ただし } K_n^2(x) = (1 - 1/3x)^{n+1} - (1 - 4/3x)^{n+1} \leq \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^n$$

$$C = \begin{cases} 2 \alpha_n^{-1/2}, & F \text{ が対称のとき} \\ \frac{3}{2} \alpha_n^{-1/2}, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とおく. lemma 6.4.

$$(11) \quad J_3 \equiv \int_C^\infty t^{-1} |\varphi^n(t)| dt \leq (C^{-1} M)^n \cdot n^{-1}$$

一方, $k \in$

$$C^{-1} M \sqrt{\frac{3}{k+1}} \equiv L_0 < 1$$

を満足する最小の正の整数とすると, したがって lemma を使っ

て,

$$\begin{aligned}
 (12) \quad J_3 &= \int_c^\infty |\varphi^k(t)|^{\frac{n}{k}} t^{-1} dt \leq (cL_0)^{\frac{n}{k}} \int_c^\infty t^{-1-\frac{n}{k}} dt \\
 &= k \cdot n^{-1} L_0^{\frac{n}{k}} \leq c^{-2} \cdot 3 M^2 n^{-1} \cdot L^n \\
 L &= L_0^{\frac{1}{k}} < 1.
 \end{aligned}$$

最後に

$$\begin{aligned}
 (13) \quad J_4 &\equiv \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^\infty t^{-1} \cdot |g_n(t \cdot \sqrt{n})| dt = \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^\infty t^{-1} \left(1 + \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} t^3\right) e^{-\frac{n}{2}t^2} dt \\
 &\leq \alpha_4 \cdot n^{-1} \cdot e^{-\frac{n}{2\alpha_4}} + \frac{|\alpha_3|}{3} n^{-2} e^{-\frac{n}{4\alpha_4}}
 \end{aligned}$$

(1) (1), (3), (7), (9), (11), (12), (13) から, (2) (2), (4), (8), (10), (11), (12), (13) から 成る.

もっと一般に, S 次までのモーメントの存在を仮定し,

$$R_{n,s}(x) = F_n(x) - \bar{\Phi}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(x)}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \dots + \frac{Q_{s-2}(x)}{n^{\frac{s-2}{2}}} \right)$$

とすると, いまの場合 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = 0$ になる.

$$R_{n,s}(x) = o(n^{-\frac{s-1}{2}}) \quad \text{と なる (c.f. [2] p. 220).}$$

$Q_n(x)$ は F の $k+2$ 次までのモーメントで定まる多項式で、
 これが 0 になるのは、これらのモーメントが、正規分布のそれ
 々と一致する場合である。このとき、 F_n の、正規分布への
 収束は「はやい」。例えば、 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 上の一様分布の
 密度を $u(x)$, $p \geq 0, q, a, b > 0, \quad p+q=1$ とすると、

$$f(x) = p \cdot \frac{1}{a} u\left(\frac{x}{a}\right) + q \cdot \frac{1}{b} u\left(\frac{x}{b}\right)$$

は、ある対称な分布 F の密度関数になる。 p, a, b を適当
 に選んで、 F の k 次までのモーメントと正規分布 $N(0, 1)$ の
 モーメントに一致させることができる。 1 に近づいて、この
 分布について、

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = o(n^{-\frac{k}{2}}).$$

$p=1, \quad a=1$ のとき 一様分布になるが、これに
 いては

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1})$$

である。いま述べた分布の分布関数は折れ線で表わされる
 から、 $(0, 1)$ 上の一様分布から、分布 F に従う変数を作る
 ことはよいのである。この事実を使って、正規乱数を効率的
 に作り出すことはできないだろうか？

REFERENCE

- [1] Feller, W. (1966). An Introduction to Probability Theory and its Applications II, John Wiley, New York.
- [2] Gnedenko, B.D. and Kolmogorov, A.N. (1967). Limit Distributions for Sum of Independent Random Variables (English Translation), Addison-Wesley, Cambridge, Mass.
- [3] Rogozin, B.A. (1965)., " On the maximum of the density of the sum of random variables with a unimodal distribution ", Litovsk. Mat. Sb. 5, 499-503, English translation : Selected Transl. Math. Statist. and Pro. vol. 9, 1970, 69-74.