

ガロア加群と埋め込み問題について

筑波大・数学 竹内光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

講演は Brinkhuis [1][2] の紹介であつた。共に公刊済みなので重ねて書くこともないのであるが、日本語での梗概を手取り早いと考える読者のために、時間の都合で述べられなかつた点を補いつつ講演をざつと再現することにする。

まず埋め込み問題とは何か、であるが、体の有限次拡大 $N \supset K \supset k$ があつて、 N/k と K/k がガロアであるとするば、有限群の拡大

$$1 \rightarrow \text{Gal}(N/K) \rightarrow \text{Gal}(N/k) \rightarrow \text{Gal}(K/k) \rightarrow 1$$

が自然に得られる。埋め込み問題というのは、逆に、与えられた有限群の拡大を、このような拡大として実現する問題である。この際、 K/k は固定して、 $\text{Gal}(K/k) = \Sigma$ とおき、 N の方を色々動かす。従つて上の拡大を E_N とあらわす。有限群の拡大 $E: 1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ と K/k に関する埋め込み問題の解とは、上の条件を満たす N と群の同形 $\alpha: \text{Gal}(N/K) \cong \Delta$ の

対 (N, α) で、 Σ の Δ による 2 つの拡大 αE_N と E が同形となるもののことを定義する。

次にガロア加群であるが、上の状況を有限次代数体で考えているとする。一般に N の整数環を O_N とあらわす。上の状況で O_N は自然に群環 $O_K \Delta$ 上の左加群になる。これがここで考えるガロア加群である。このガロア加群の構造との関連によって次のような埋め込み問題が生ずる。 E と K/k の他に、 $O_K \Delta$ -加群 X を与えておき、 E と K/k の(埋め込み問題の)解 (N, α) で、さらに $O_K \Delta$ -加群として $O_N \simeq X$ となるもの、それを簡単に、 $E, K/k, X$ の解とよぼう、があるかないか、どのくらいあるか等を問題にする。

ガロア加群の構造に関する次の結果 [2, (2.4), p.146] は、以後の話で基本となる。

命題. N/K を有限次代数体のアーベル拡大, $\Delta = \text{Gal}(N/K)$ とする. $\text{tr}_{N/K}(O_N) = O_K$ ならば, O_N は $O_K \Delta$ -加群として invertible である。

証明はあるいは Hopf 代数的であり、私には興味深い。この仮定は、整数論的には N/K が tame ということである。従って前の状況で、 E にあらわれる群 Δ がアーベルで、 $O_K \Delta$ -加群 X が invertible のとき、 $E, K/k, X$ の解 (N, α) で、 N/K が tame であるもの、すなわち tame な解、の存在が問題に

なる。[2] はこの問題を扱っており、この報告は主としてその紹介である。

一方 X が自明、つまり $X = O_K \Delta$ の場合は、正規基底条件の下での埋め込み問題とよばれ、[1] で扱われている。簡単に、 $E, K/k$ の正規基底解とよんでよいであろう。

I. Hochschild-Serre sequence

一般に群の拡大 $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow \bar{G} \rightarrow 1$ と G -加群 A があれば次の Hochschild-Serre の完全列が生ずる。

$$1 \rightarrow H^1(\bar{G}, A^H) \xrightarrow{\inf} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H, A)^{\bar{G}} \xrightarrow{\text{tr}} H^2(\bar{G}, A^H)$$

以下で使うのは A が $\bar{G}$ -加群、つまり $A = A^H$ の場合で、このとき $H^1(H, A) = \text{Hom}(H, A)$ 、 $H^1(H, A)^{\bar{G}} = \text{Hom}_{\bar{G}}(H, A)$ となり、 G -準同形 $\lambda: H \rightarrow A$ に対し、transgression $\text{tr}(\lambda)$ はもとの拡大を λ で pushout して得られる、という = とさえ承知すれば十分である。

II. Fröhlich-Wall sequence

群 G が左から自己同形に作用している環を G -環 とよぶ。 R を可換な G -環とする。 R の単元の群 R^* は G -加群になるからその cohomology 群 $H^i(G, R^*)$, $i \geq 0$ が考えられる。 RG を次

の乗法で定義される歪群環とする. (作用を $(x, r) \mapsto {}^x r$ で示す).

$$(rx)(sy) = (r \cdot {}^x s)(xy), \quad r, s \in R, \quad x, y \in G.$$

RG -加群が2つあれば, その R 上のテンサー積は, G の対角的作用で再び RG -加群となるから, R 上有限生成な RG -加群の同形類の集合 $M(R, G)$ はこの積により, 可換なモノイドになる. その可逆元の群を $\text{Pic}(R, G)$ と記し, G -環 R の

equivariant Picard group とよぶ. 一方 G の R への作用は通常のピカール群 $\text{Pic}(R)$ への作用を引起し, それを G -加群にする. この作用は, 次のように記述してよくと後々便利である.

$g \in G$ と $(X), (Y) \in \text{Pic}(R)$ に対し g -semilinear な同形 $X \xrightarrow{\sim} Y$ があれば, $(Y) = {}^g(X)$ とよく.

次の Fröhlich-Wall の完全列 (のはじめの4項) が得られる.

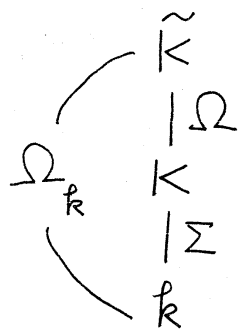
$$1 \rightarrow H^1(G, R^*) \xrightarrow{\text{tw}} \text{Pic}(R, G) \xrightarrow{\text{for}} \text{Pic}(R)^G \xrightarrow{\text{sem}} H^2(G, R^*)$$

各写像を簡単に記述しておこう. 準同形性と完全性は容易にチェックできる. 1-cocycle $\lambda: G \rightarrow R^*$ に対し, λ による G の twist 作用 $g_* {}^x r = {}^g r \lambda(g)^{-1}$, $g \in G, r \in R$ で R は RG -加群 R_λ になる. tw は λ のクラスを R_λ のクラスに写す写像である. for は単に G の作用を忘れることと得られる. $(X) \in \text{Pic}(R)$ が G -不変ということとは, 任意の $g \in G$ に対し, g -semilinear な自己同形 $f_g: X \xrightarrow{\sim} X$ が存在することと, $g, h \in G$

に対し, $f_g f_h f_{gh}^{-1}$ は X の R -自己同形になる. 所が $\text{End}_R(X)$ は R と同一視されるから, 二の同形は R^* の元 $d_X(g, h)$ に対応する. d_X は 2-cocycle になり, sem は (X) に d_X のクラスを対応させる写像である.

なおこの Fröhlich-Wall 列は服部 [4] で定義された完全列と, 本質的に一致し, 服部の記号では, $\text{Pic}(R, G) = H^1(R, G)$ となることに注意しておく.

ここで以後最後まで用いる記号を定めておく. K/k を有限次代数体のガロア拡大, $\Sigma = \text{Gal}(K/k)$, $\tilde{K}$ を K の極大 tame p -ベル拡大, ガロア群を次の図のよきにあるかし



さらに有限 Σ -加群 Δ を一つ固定する.

これを材料にして, 一つの可換図形を描きたい. 拡大 $1 \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega_K \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ と Σ -加群 Δ に関する Hochschild-Serre 列と上は, Σ -環 $O_K \Delta$ (Σ は O_K と Δ にそれぞれ作用, それを合せる) の Fröhlich-Wall-服部列と下を書くこと次の図が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \rightarrow H^1(\Sigma, \Delta) & \xrightarrow{\text{inf}} & H^1(\Omega_k, \Delta) & \xrightarrow{\text{res}} & H^1(\Omega, \Delta)^\Sigma & \xrightarrow{\text{tr}} & H^2(\Sigma, \Delta) \\
\downarrow i_1 & & \downarrow \text{gal}_k & & \downarrow \text{gal} & & \downarrow i_2 \\
1 \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_K \Delta^*) & \xrightarrow{\text{tw}} & \text{Pic}(\mathcal{O}_K \Delta, \Sigma) & \xrightarrow{\text{for}} & \text{Pic}(\mathcal{O}_K \Delta)^\Sigma & \xrightarrow{\text{sem}} & H^2(\Sigma, \mathcal{O}_K \Delta^*)
\end{array}$$

ここで、 i_1, i_2 は自然な単射 $\Delta \hookrightarrow \mathcal{O}_K \Delta^*$ から引起される。
 また Ω_k と Ω は profinite 群で有限アベール群 Δ に連続に作用しているのので、上の列のホ2, 3項は Serre の Π での discrete cohomology 群と解釈してよく（そうしても完全性は成立つ）。破線で示した部分に、準同形ではないが興味深い写像が定義され図形は可換となる。その定義を次に述べる。

III. The Galois module map

Π と同様、 R を可換 G -環とする。for の核 $F(R, G)$ は、 R 上 1 次元自由な RG -加群の同形類がテンサー積 (R 上の) を積として作るアベール群で、 Π は写像 tw が同形

$$\text{tw}: H^1(G, R^*) \simeq F(R, G)$$

を引起すことを主張する。これを次のように modify する。 G は profinite 群で discrete 環 R に連続に作用しているとする。

(R を discrete G -環 とよぶ). このとき $H^1(G, R^*)$ を discrete cohomology にとる. 対応して $F(R, G)$ は, G が連続に作用する R 上 1 次元自由な RG -加群の同形類の群にとる. すると上の同形 tw がやはり成立つ.

さて Ω_K の自然な O_K への作用と, $\Omega_K \rightarrow \Sigma$ を通しての Δ への作用を合せると, 群環 $O_K \Delta$ は profinite 群 Ω_K 上の discrete 環になる. $\Omega \subset \Omega_K$ だから特に discrete Ω -環でもある. これに対する上の同形 tw を使って次の合成写像を定義しよう.

$$gal: H^1(\Omega, \Delta) \rightarrow H^1(\Omega, O_K \Delta^*) \stackrel{tw}{\simeq} F(O_K \Delta, \Omega) \rightarrow M(O_K \Delta)$$

ここで ϕ の写像は自然な単射 $\Delta \hookrightarrow O_K \Delta^*$ から引起され, ϕ のものは $X \mapsto X^{-\Omega}$ である. この際, $(O_K \Delta)^{-\Omega} = O_K \Delta$ に注意する. (必要な有限生成性は容易に示せる). ここでこの写像 gal の像が実は $Pic(O_K \Delta)$ に入ることを言いたい. $H^1(\Omega, \Delta) = Hom(\Omega, \Delta)$ に注意し, $\phi \in H^1(\Omega, \Delta)$ をとる.

$$I_\phi = \{r \in O_K \Delta \mid r = {}^\omega r \phi(\omega)^{-1} \text{ for all } \omega \in \Omega\}$$

は $O_K \Delta$ の $O_K \Delta$ -submodule で, 定義により $gal(\phi)$ は I_ϕ の同形類である. 一方連続な準同形 ϕ は

$$\phi: \Omega \twoheadrightarrow Gal(K_\phi/K) \stackrel{\bar{\phi}}{\simeq} \Delta_\phi \subset \Delta$$

と epi-mono 分解する. K_ϕ の整数環を O_ϕ とすれば, 前に述べたように, K_ϕ/K は tame であるから, O_ϕ は invertible $O_K \Delta_\phi$ -加群である. 所が $O_K \Delta$ -加群の同形

$$O_K \Delta \otimes_{O_K \Delta_\phi} O_\phi \simeq I_\phi, r \otimes x \mapsto r \sum_{\omega \in \Delta_\phi} \omega x \omega^{-1}$$

が存在する. そこで $\text{gal}(\phi) \in \text{Pic}(O_K \Delta)$ であるといえる. こうして得られた写像 $\text{gal} : H^1(\Omega, \Delta) \rightarrow \text{Pic}(O_K \Delta)$ は, 各ステップでそうであるため, Σ の作用を保ち, 従って $H^1(\Omega, \Delta)^\Sigma \rightarrow \text{Pic}(O_K \Delta)^\Sigma$ を引き起す.

この写像 gal は次のリットで、弱いリットで乗法的である [2, (3.10), p. 149]. $\phi, \psi \in H^1(\Omega, \Delta)$ とし, O_K のどの prime も, K_ϕ 又は K_ψ で不分岐であるとする. このとき $O_K \Delta$ の中で $I_{\phi\psi} = I_\phi I_\psi$ が成立ち, $I_\phi I_\psi \simeq I_\phi \otimes_{O_K \Delta} I_\psi$ なので $\text{gal}(\phi\psi) = \text{gal}(\phi) \text{gal}(\psi)$ となる.

他方 gal_k は次の合成で定義される.

$$\text{gal}_k : H^1(\Omega_k, \Delta) \rightarrow H^1(\Omega_k, O_K \Delta^*) \xrightarrow{\text{tw}} F(O_K \Delta, \Omega_k) \rightarrow M(O_K \Delta, \Sigma) \\ X \mapsto X^\Omega$$

$\phi \in H^1(\Omega_k, \Delta)$ に対し, $O_K \Delta$ -加群としては $\text{gal}_k(\phi) = \text{gal}(\phi|_\Omega) \in \text{Pic}(O_K \Delta)$ だから, $\text{gal}_k(\phi) \in \text{Pic}(O_K \Delta, \Sigma)$ がいえる. 従って $\text{gal}_k : H^1(\Omega_k, \Delta) \rightarrow \text{Pic}(O_K \Delta, \Sigma)$ が得られるが, この写像も gal と全く同じ意味で、弱いリットで乗法的である.

さて2つのガロア加群字像 gal, gal_k をこう定義して得られる, 3頁前の図は可換になる [2, (5.1), p.153]. 可換性の検証はスタンダードであり, 大して難かしくない. 埋め込み問題に対して面白い意味をもつのは, 図の右端の四角である. 以下でその解釈を述べよう.

1-cocycle $\phi: \Omega \rightarrow \Delta$ (つまり連続準同形) が Σ -不変ならば K_ϕ は k 上もガロアになり, E_{K_ϕ} を E_ϕ とあらわし, $tr(\phi)$ に属する一つの拡大を E とすれば, 次の可換な図が自然に得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & \Omega & \rightarrow & \Omega_k & \rightarrow & \Sigma \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 E_\phi: 1 & \rightarrow & Gal(K_\phi/K) & \rightarrow & Gal(K_\phi/k) & \rightarrow & \Sigma \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow \bar{\phi} & & \downarrow & & \parallel \\
 & & \Delta_\phi & & & & \\
 & & \cap & & & & \\
 E: 1 & \rightarrow & \Delta & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & \Sigma \rightarrow 1
 \end{array}$$

だから, もし ϕ が全射なら $(K_\phi, \bar{\phi})$ は E と K/k に対する埋め込み問題の解ということになる. しかもこのとき $gal(\phi)$ は $O_k \Delta$ -加群 O_ϕ のクラスで与えられることに注意する. 逆に (N, α) が E と K/k に対する tame な解 ($N \subset \tilde{K}$ とみなす) ならば, 合成字像 $\phi_\alpha: \Omega \twoheadrightarrow Gal(N/K) \cong \Delta$ は Σ -不変

な 1-cocycle で, (N, α) は $\phi = \phi_\alpha$ に対する $(K_\phi, \bar{\phi})$ と一致する. こうして次の解釈が得られた.

結論 1. K/k を有限次代数体のガロア拡大, $\Sigma = \text{Gal}(K/k)$, Δ を有限 Σ -加群, $E: 1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ をその加群構造と両立する一つの群拡大, X を $O_K \Delta$ -加群とする. $E, K/k, X$ に対する tame な解 (N, α) と, 全射な $\phi \in H^1(\Sigma, \Delta)^\Sigma$ で

$$(E) = \text{tr}(\phi), (X) = \text{gal}(\phi)$$

を満すものが一対一に対応する. 対応は, $(N, \alpha) \mapsto \phi_\alpha$ 及び $(K_\phi, \bar{\phi}) \leftarrow \phi$ で与えられる.

冒頭説明した埋め込み問題の解を field 解と考え, この概念を algebra 解に拡張すると, 上の対応で ϕ を全射とする必要がなくなる [2, §6].

系 1. $E, K/k, X$ が tame な解をもつためには, (a) $(X) \in \text{Pic}(O_K \Delta)^\Sigma$, (b) $i_2(E) = \text{sem}(X)$ が必要である.

系 2. E と K/k に対する正規基底条件の下での tame な解 (N, α) と, 全射な $\phi \in H^1(\Sigma, \Delta)^\Sigma$ で

$$\text{tr}(\phi) = (E), \text{gal}(\phi) = 1$$

となるものが一対一に対応する.

系 3. $E, K/k$ が tame な正規基底解をもつためには, $i_2(E) = 1$ が必要である.

面白いことは, 系 3 は Δ : アーベル及び tame を落して

も成立つ。それが [1] の主結果であるが、次のように formulate される。

定理. K/k は結論 1 と同じとし, $E: 1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ を有限群の拡大とする. $E, K/k$ が正規底解をもてば, E の Γ -準同形 $\Delta \hookrightarrow O_K \Delta^*$ による pushout は split する.

Δ がアーベルの場合, 結論は $i_2(E) = 1$ ということである. これに関連して, K が CM 体の時の面白い例が [1] に述べられている. CM 体というのは, どちらの風にも K を $\mathbb{C}$ にくめこんでも, 像は複素共役で stable で, (しかもある一つの K の自己同形を引起すような代数体であるから, Δ を有限 Σ -加群とすると, ある canonical な Σ -準同形 $O_K \Delta^* \rightarrow \Delta$ で, その Δ への制限が $\sigma \mapsto \sigma^2$ となるものの存在が言える. このことから $i_2(E) = 1$ は $(E)^2 = 1$ を imply する. だから Σ と Δ の一方を奇位数としておけば, i_2 は単射と分り, E が split (しない限り), E と K/k は正規底解をもたないことになる. これは次のように言ってもよい.

系 4. $N \supset K \supset k$ をすべて有限次代数体, K は CM 体, N/k と K/k をガロア, N/K はアーベル, $[N:K]$ と $[K:k]$ の一方を奇数とする. もし E_N が split しなれば (そのような例は簡単にたくさん作れる) N/K のガロア加群は正規底解をもたない.

$tame$ の場合に戻ろう。今までの話で、有限次代数体の性質は、実は余り使っていない。実際 K をある Dedekind 環 O の商体とし、 Σ は $Aut_{ring}(O)$ の有限部分群で $k = K^{\Sigma}$ とおけば、主な結果がそのまま成立つ。(しかし有限次代数体であると、類体論を用いて、次の存在定理が言える [2, (8.2), p.160].

定理. 任意の $\phi \in H^1(\Omega, \Delta)^{\Sigma}$ に対し、全射な $\phi' \in H^1(\Omega, \Delta)^{\Sigma}$ で

$$tr(\phi) = tr(\phi'), gal(\phi) = gal(\phi')$$

となるものが無限に存在する。

結論 2. 結論 1 の仮定で、 $E, K/k, X$ の $tame$ 解が一つでもあれば、実は無限にある。

系 5. split 拡大 $1 \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \rtimes \Sigma \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ は、 $tame$ な正規基底解をつねに無限個もつ。

ここに紹介した Brinkhuis の理論は、Fröhlich [3] の VI, §2 にも紹介されている(ようである)が、私には、記法の問題もあり、この紹介は余り分り易いと思えない。原論文の方が透明に分り易く書かれている。(実際、ここには要点をくり返す必要もないように思われる)。

文 献

- [1] J. Brinkhuis, Normal integral bases and embedding problems,
Math. Ann. 264, 537-543 (1983).
- [2] J. Brinkhuis, Galois modules and embedding problems,
J. reine angew. Math. 346, 141-165.
- [3] A. Fröhlich, Galois module structure of algebraic integers,
Ergebnisse Math. 3. Folge, Band 1, Springer 1983.
- [4] A. Hattori, On groups $H^n(S, G)$ and the Brauer group of
commutative rings, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo,
28 (1978), 1-20.