

$\Sigma\mathbb{C}$ 上の解析汎函数について

東大 教養 藤本佳久

最近、正則性の概念を一般の無限次元線型位相空間に拡張して、そこでの性質が調べられている。(詳しくは [4] の分譲を参照)。Martineau [3] では、それらを使って、 $\mathbb{C}^n$ 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 上の多項式的解析汎函数、正則な解析汎函数について、その性質を調べている。ここでは、もっと簡単に、一変数の多項式全体の空間に DFS 位相を入れた空間—それを $\Sigma\mathbb{C}$ と書く—の上の正則函数の空間とその双対空間について調べる。

§1. $\Sigma\mathbb{C}$ の位相的性質

まず最初に、一般の線型位相空間上の正則函数の定義を復習しておく。

定義 E を $\mathbb{C}$ 上の線型位相空間とし、 U を E の開集合とする。このとき、 U 上の函数 f が次の条件をみたすとき、正則であるという。

i) f は U 上連続である。

ii) E 中の任意の一次元アフィン部分空間 F に対して

$f|_F : U \cap F \rightarrow \mathbb{C}^n$ が、通常の意味で正則である。

注意 E を $\mathbb{R}$ 上の線型位相空間としたとき、 $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ が C^∞ -級であるというのは、上の定義の条件の ii) の中で、 F として E の有限次元部分空間をとり、正則のところを C^∞ -級にみえたものである。

空間 $\Sigma \mathbb{C}$ をきちんと定義すると、

$$\Sigma \mathbb{C} := \varinjlim \{ \mathbb{C}^n ; U_{n+1}^n \}$$

$$\text{但し、} \quad U_{n+1}^n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (z_1, \dots, z_n, 0) \end{array} .$$

$U_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \Sigma \mathbb{C}$ を標準的埋め込み写像として、以下、 $U_n(\mathbb{C}^n)$ と $\mathbb{C}^n$ を同一視して議論する。 $\Sigma \mathbb{C}$ の位相的双対空間を、 $\Pi \mathbb{C}$ と表わすことにする。

注意 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ で置きかえたものを $\Sigma \mathbb{R}$ 、 $\Pi \mathbb{R}$ とおく。また、 $\Sigma \mathbb{R}^2$ も同様に考えることにする。

まず、この空間 $\Sigma \mathbb{C}$ の位相的性質についてみよう。

I) これは、位相の入力方から明らかに、DFS(LF)核型空間である。

II) $\Sigma \mathbb{C}$ の任意の開集合はパラコンパクトである。

これを示すには、実際に任意の開被覆に対してその細分

である局所有限な開被覆を構成するのであるか。このとき次の事実が役に立つ。

Ⅲ) $\Sigma \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ -コンパクト (i.e. $\Sigma \mathcal{C}$ は可算個のコンパクト集合の合併である) であり、 $\Sigma \mathcal{C}$ のコンパクト集合は、ある $\mathcal{C}$ に含まれている。

Ⅳ) $\Sigma \mathcal{C}$ の部分集合 U が開集合であるのは、 U の $\mathcal{C}$ か $\mathcal{C}'$ で開集合であるとき、かつそのときに限る。

Ⅱ) の性質により、あとで $\mathcal{C}$ -係数のコスモロジー群の消滅を示すときに、パラコンパクト空間上のコスモロジー群の理論が使える。

V) 各点には凸開集合からなる基本近傍系が存在する。

§2. $\Sigma \mathcal{C}$ あるいは $\Pi \mathcal{C}$ 上の正則函数の空間

U を $\Sigma \mathcal{C}$ あるいは $\Pi \mathcal{C}$ の開集合としたとき、

$$\mathcal{O}(U) := \{ U \text{ 上の正則函数全体} \}$$

とおき、各コンパクト集合上一様収束位相を入れる。

Ω を $\Sigma \mathbb{R}$ あるいは $\Pi \mathbb{R}$ の開集合としたとき、

$$\mathcal{E}(\Omega) := \{ \Omega \text{ 上の無限回微分可能函数全体} \}$$

とおき、セミノルムの族 $\|f\|_{m,K} = \sup_{|p| \leq m} (\sup_{x \in K} |(D^p x)^p f(x)|)$

で位相を入れる。但し、 K は Ω のコンパクト集合、 $p = (p_1, p_2, \dots)$

$$|p| = p_1 + p_2 + \dots \quad (p_i \text{ は非負な整数}).$$

準層 $\{\mathcal{O}(U)\}, \{\mathcal{E}(Q)\}$ は、各々 $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ 上の層となる。
それを、 $\mathcal{O}, \mathcal{E}$ とかく。

命題 1 U を $\mathbb{C}$ の開集合とすると、次の線型位相空間としての同型が成り立つ：

$$\mathcal{O}(U) \cong \varprojlim \mathcal{O}_n(U_n) \quad \text{FS 核型空間}$$

但し、 $\mathcal{O}_n$ は $\mathbb{C}^n$ 上の正則函数のなす層とし、 $U_n = U \cap \mathbb{C}^n$ とする。

上の射影極限は、制限写像 $\mathcal{O}_{n+1}(U_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}_n(U_n)$ に関してとったものである。

命題 2 U を $\pi\mathbb{C}$ の開集合とすると、次の線型位相空間としての同型が成り立つ：

$$\mathcal{O}(U) \cong \varprojlim \mathcal{O}_n(U^n)$$

但し、 $U^n = p_n(U)$ 、 p_n は $\pi\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^n$ への projection。

注意 Ω が $\mathbb{R}$ の開集合のときは、 $\mathcal{E}(\Omega)$ に関して、命題 1 と同様の結果が成り立つが、 Ω が $\pi\mathbb{R}$ の開集合に対しては、代数的に、 $\mathcal{E}(\Omega) \neq \varprojlim \mathcal{E}_n(\Omega^n)$ 。

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{-x_n^2}$ ($x = (x_i) \in \pi\mathbb{R}$) は $\mathcal{E}(\Omega)$ の元であるが、右辺の元にはならない。

次に、 $\pi\mathbb{C}$ 上の指数型函数の空間を考える。

定義 $F \in \mathcal{O}(\pi\mathbb{C})$ が指数型であるとは、ある正の定数 C とある正数 γ_i が存在して、

$$|F(z)| \leq C \exp(\gamma_1|z_1| + \gamma_2|z_2| + \cdots) \quad (z = (z_i) \in \pi\mathbb{C})$$

をみたすことである。

$\Pi\mathbb{C}$ 上の指数型整函数全体を $\text{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ と書くことにする。
命題 2 より、線型空間として、 $\text{Exp}(\Pi\mathbb{C}) \cong \varinjlim \text{Exp}^b(\Pi\mathbb{C}, K)$ が
成り立つので、右辺で位相を入れる。 K は $\Sigma\mathbb{C}$ のコンパクト
集合を表わす。また、

$$\text{Exp}^b(\Pi\mathbb{C}, K) := \{F \in \text{Exp}(\Pi\mathbb{C}) : \|F\|_K < \infty\}.$$

ノルム $\|F\|_K = \sup \{|F(z)| \exp(-H_K(z))\}$ ($H_K(z) = \sup_{z \in K} \text{Re}\langle z, z \rangle$)
により Banach 空間になる。故に、 $\text{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ には、DFS 位
相が入る。

命題 3 次の線型位相空間としての同型が成り立つ：

$$\text{Exp}(\Pi\mathbb{C}) \cong \varinjlim \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$$

但し、 $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の指数型整函数全体を表わす。

§3 $\Sigma\mathbb{C}$ 上の解析汎函数

U を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合として、 $\mathcal{O}(U)$ の双対空間 $\mathcal{O}'(U)$ の元を
解析汎函数と呼ぶことにする。

命題 4 U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合 (i.e. 任意の自然数 n に対
して、 U_n が擬凸になることと同値) ならば、

$$\mathcal{O}'(U) \cong \varinjlim \mathcal{O}'(U_n) \quad (\text{線型位相空間として})$$

定義 $T \in \mathcal{O}'(U)$ が U のコンパクト集合 K で支えられると
は、 $U \supset W \supset K$ となる任意の開集合 W に対して、 $T \in {}^c\mathcal{O}'(W)$

となること。ここで $\gamma: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(W)$ は制限写像を表わし、 γ_V は V の転置写像を表わす。

定義 $T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ のフーリエ・ポレル変換 $\hat{T}$

$$\hat{T}(z) := \langle T_z, e^{\langle z, \cdot \rangle} \rangle \quad (z \in \Sigma\mathbb{C}, z \in \Pi\mathbb{C})$$

で定義する。

上の結果を組み合わせると、次の定理が得られる。

定理 1 $T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ がコンパクト集合 $K(\mathbb{C}^n)$ で支えられるならば、 $M(z) = \hat{T}(z)$ は $\Pi\mathbb{C}$ 上の整函数であり、任意の正数 δ に対して、ある正の定数 C_δ が存在して、次の不等式をみたす: $(*) \quad |M(z)| \leq C_\delta \exp(H_K(z) + \delta \|z\|_n)$;

逆に、 $K(\mathbb{C}^n)$ をコンパクト凸集合とし、 $M(z)$ を任意の正数 δ に対して、 $(*)$ をみたすような $\Pi\mathbb{C}$ 上の整函数であるとする。このとき、 K で支えられるような $T \in \mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ が存在して、 $\hat{T}(z) = M(z)$ となる。但し、 $\|z\|_n = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}$ ($z = (z_i) \in \Pi\mathbb{C}$)。

系 フーリエ・ポレル変換は $\mathcal{O}'(\Sigma\mathbb{C})$ から $\text{Exp}(\Pi\mathbb{C})$ の上への線型位相空間としての同型を与える。

これは、 $\{e^{\langle z, \cdot \rangle}\}$ が $\mathcal{O}(\Sigma\mathbb{C})$ において稠密な部分空間となることより単射を示せ、連続であることも示せるから、あとは DFS 空間に対する閉グラフ定理より出る。

§ 4. $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合の $\mathcal{O}$ -係数のコホモロジー群の消滅

Dineen [1] では, finite open topology を持つ線型位相空間において, 任意の擬凸開集合に対する $\mathcal{O}$ -係数の 1 次コホモロジー群の消滅を示している。ここでは, $\Sigma\mathbb{C}$ (この位相は, finite open Topology と一致している) において, $\mathcal{O}$ の柔軟分解を使って, $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合 U に対して, $H^p(U, \mathcal{O}) = 0$ ($p \geq 1$) を示す。

命題 5 $\mathcal{E}$ は $\Sigma\mathbb{R}$ 上の fine sheaf である。

これを示すには, §1 での位相の注意に従って, 実際に, 局所有限な開被覆に対して 1 の分解を構成すればよい。

[1] に従って, $\mathcal{E}^{0,p}(U)$ と $\bar{\partial}$ -作用素を考えよう。

U を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合として, $\mathcal{E}^{0,p}(U)$ で次の形のものの全体を表わすことにする:

$$f = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}, \quad f_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{E}(U)$$

$z = (z_i) \in \Sigma\mathbb{C}$, 但し, $\mathcal{E}^{0,0}(U) = \mathcal{E}(U)$ とおく。

$\bar{\partial}$ -作用素を次の様に定義する。

$$\bar{\partial} f := \sum_{i_1 < \dots < i_p} \bar{\partial} (f_{i_1 \dots i_p} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p})$$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p} \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^p \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1} < i_{k+1} < \dots < i_p} (-1)^k \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_{k-1}} \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

$$\left. + (-1)^p \sum_{j > i_p} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p} \wedge d\bar{z}_j \right\}$$

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 6 U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とする。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{0,0}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(U) \rightarrow \dots$$

は完全列である。

これは、 $\mathcal{O}(U) \cong \varprojlim \mathcal{O}_n(U_n)$ 、 $\mathcal{E}(U) \cong \varprojlim \mathcal{E}_n(U_n)$ と、制限写像 $\mathcal{O}_{n+1}(U_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}_n(U_n)$ が全射であることから導かれる。

§1 の V) により。

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}^{0,0} \rightarrow \mathcal{E}^{0,1} \rightarrow \dots$$

が、 $\mathcal{O}$ の $\Sigma\mathbb{C} \cong \Sigma\mathbb{R}^2$ 上の柔軟分解を与えることから。

以上をまとめると。

定理 2 U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とする。このとき。

$$H^p(U, \mathcal{O}) = 0 \quad (p \geq 1)$$

が成り立つ。

注意 この結果は、次の § の Grothendieck の命題からも導かれる。

§5. $\Sigma\mathbb{C}$ の subvariety のホモロジー群の消滅

$\Sigma\mathbb{C}$ の中の subvariety という概念を導入する。

定義 D を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とする。

D の部分集合 V が D の subvariety であるとは、任意の $z \in D$

に対して. z の近傍 U と. U 上の正則関数の族 F が存在して.

$$V \cap U = \{z \in U : f(z) = 0 \quad f \in F\}$$

かつ. 任意の自然数 n に対して. $V_n \cap U_n$ が. $F_n = \{f|_{U_n} : f \in F\}$ の有限個の元の零点で表わされているときをいう.

W を D の開集合として.

$$\mathcal{I}_V(W) = \{f \in \mathcal{O}(W) : f(z) = 0 \quad z \in W \cap V\}$$

とおくと. 準層 $\{\mathcal{I}_V(W)\}_{W \subset D}$ は層をなすから. それを $\mathcal{I}_V$ と書き. V のイデアルの層と呼ぶことにする.

$\mathcal{I}_{V_n}$ で. D_n における V_n のイデアルの層を表わすことにすると. $\mathcal{I}_V(W) \cong \varprojlim \mathcal{I}_{V_n}(W_n)$ が成り立つから.

命題 7. D を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし. V を D の subvariety とする. このとき. $\mathcal{I}_V$ は. D 上の層 $\{U_n * \mathcal{I}_{V_n}\}$ の射影極限になっている. 但し. $U_n * \mathcal{I}_{V_n}$ は. U_n による $\mathcal{I}_{V_n}$ の direct image を表わす.

$\mathcal{I}_V$ 係数のコホモロジー群の消滅を示すために. 次の射影系に関する命題を引用する.

命題 8 (Grothendieck (EGA) III 命題 13.2.3)

X を位相空間. $\{\mathcal{F}_n\}$ を X 上の可換群の層の射影系. $\mathcal{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$ とし. 次の条件をみたすとする.

i) X の位相を定める基底 $\mathcal{B}$ が存在して. 任意の $U \in \mathcal{B}$ と. $p \geq 0$ に対して. 射影系 $\{H^p(U, \mathcal{F}_n)\}$ が (ML) 条件をみたす

ii) 任意の $x \in X$ と $p > 0$ に対して.

$$\lim_{\leftarrow} \left(\lim_{\star} H^p(U, \mathcal{F}_h) \right) = 0$$

が成り立つ. 但し, U は B に属する x の近傍全体を動く.

iii) 射影系 $\{\mathcal{F}_h\}$ を定義する準同型写像 $\nu_{hk}: \mathcal{F}_h \rightarrow \mathcal{F}_k$ ($h \geq k$) が全射である.

このとき, もし, $p > 0$ に対して, 射影系 $\{H^{p-1}(X, \mathcal{F}_h)\}$ が (ML) 条件をみたせば,

$$\tau_p: H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \lim_{\leftarrow} H^p(X, \mathcal{F}_h)$$

は全単射である.

注意 射影系 $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ に対して, 次の条件が (ML) 条件である.

(ML) 任意の α に対して, $\beta \geq \alpha$ をみたす β が存在して,

$$f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A_\beta) \quad (\forall \gamma \geq \beta).$$

上の命題を使うと, 次の命題がえられる.

命題 9 D を $\Sigma \mathbb{C}$ の擬凸開集合とし, $V \in D$ の subvariety とする. このとき, $H^p(D, \mathcal{I}_V) = 0$ ($p \geq 1$) が成り立つ.

次の商層を考えよう.

$${}_V\tilde{\mathcal{O}}_D := \mathcal{O}_D / \mathcal{I}_V \quad \text{とおく.}$$

$x \in D - V$ ならば, $({}_V\tilde{\mathcal{O}}_D)_x = 0$ だから, $\mathcal{O}_V := {}_V\tilde{\mathcal{O}}_D|_V$ とおく.

V 上の正則函数の層と呼ぶ.

この層 $\mathcal{O}_V$ に対して, 次の定理がえられる.

定理 3 D を $\Sigma \mathbb{C}$ の擬凸開集合とし, $V \in D$ の subvariety

とする。このとき、

$$H^p(V, \mathcal{O}_V) = 0 \quad (p \geq 1)$$

が成り立つ。

これを示すには、次の D 上の層の完全列を考える。

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_V \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \widetilde{\mathcal{O}}_D \rightarrow 0$$

定理 2 と 命題 9 より、 $H^p(D, \mathcal{O}_D) = H^p(D, \mathcal{I}_V) = 0$ ($p \geq 1$) が分る。この
 るから、長完全列より、 $H^p(V, \mathcal{O}_V) = H^p(D, \widetilde{\mathcal{O}}_D) = 0$ ($p \geq 1$) が従う。

文献

- [1] Dineen, S, Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces, Math. Ann. 202 (1973), 331-345.
- [2] Fujimoto, Y, Analytic functionals on a countably infinite dimensional topological vector space (to appear).
- [3] Martineau, A, Fonctionnelles analytiques non linéaires et représentation de Polya pour une fonction entière de n variable de type exponentiel. Lec. Notes in Math. 205, Springer PP. 125-165.
- [4] Noverraz, P, Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie, Notas de Matematica. 3. North-Holland (1973).