

加法的でないカテゴリーの

Grothendieck 環について.

北大理 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対し, 次のような生成元と関係式で定義されるアーベル群を, $\mathcal{A}$ の Grothendieck 群といい, $G_0(\mathcal{A})$ と書く.

生成系, $\mathcal{A}$ の各対象 M に対する $[M]$ (M の同型類).

関係式, 各完全系列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対する $[M] = [L] + [N]$.

次に, G を有限群, R を可換環, $R[G\text{-mod}]$ によって,

R 上有限生成かつ射影的な $R[G]$ -加群のカテゴリーを表わす.

$R_R(G) := G_0(R[G\text{-mod}])$ とおく. ふたつの $R[G]$ -加群 M, N に対し, $M \otimes_R N$ は $R[G]$ -加群 ($g \cdot (m \otimes n) := (gm) \otimes (gn)$) だから, 積を $[M] \cdot [N] := [M \otimes_R N]$ とすることによって $R_R(G)$ は環となる. これがいかなる Grothendieck 環で, $R = \mathbb{C}$ の場合は G の指標環と同型である. また, 関係式として, $[M \oplus N] = [M] + [N]$

とすれば，表現環 $\mathcal{A}$ は Green 環と呼ばれる $C_R(G)$ が得られる。

アーベルとなる加法的でさえないカテゴリーに対しても，Grothendieck 環と呼ばれる環が定義できることがある，具体例として以下のものが挙げられる。

- a) 有限群の Burnside 環。
- b) 有限半順序集合の Möbius 環。
- c) Necklace 環や Witt vector の環。
- d) トポスの K_0 -環と G_0 -環。
- e) 有限カテゴリーの抽象 Burnside 環。

このうち Burnside 環と Möbius 環は L. Solomon によって 1967 年に導入された。その後 Burnside 環の方は Dress や Tom Dieck によって研究され，群の表現論や同変トポロジーの重要な道具になった。以下の議論はこの有限群の Burnside 環の理論をモデルにしている。

§1. 有限群の Burnside 環。

以下， G を有限群， Set_G を有限 G 集合のカテゴリーとする。 $X, Y \in \text{Set}_G$ に対し，2つの G -集合

$X + Y$: disjoint union

$X \times Y$: Cartesian product (作用 $g \cdot (x, y) := (gx, gy)$)

が定義される。明らかに

$$(A+B) \times X \cong A \times X + B \times X, \quad X \times Y \cong Y \times X,$$

などが成り立つので、同型類の集合 $\text{Set}_f^G / \cong$ は semi-ring

(環の公理から、加法 $+$ に 1 の逆元の存在を除いたもの)。

となる。この Grothendieck 環を $B(G)$ と書き、 G の Burnside 環という。即ち、 $B(G)$ は、同型類 $[X]$, $X \in \text{Set}_f^G$ を生成系とし、関係式 $[X+Y] = [X] + [Y]$ で定義された加法群で、積 $[X] \cdot [Y] := [X \times Y]$ を乗法とするものである。

次は Burnside 環の基本定理である。

定理. 次のような完全系列がある:

$$0 \rightarrow B(G) \xrightarrow{\varphi} \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \prod_{(H) \in C(G)} (\mathbb{Z}/|WH|\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

ここで、 $C(G)$ は G の部分群の G -共役類の集合、 (H) は $H \leq G$ を含む共役類、 $WH := N_G(H)/H$ とおいた。さらに写像 φ と ψ は次のように定義される。

$$\varphi = (\varphi_H), \quad \varphi_H: [X] \mapsto |X^H|, \quad X^H \text{ は固定点集合},$$

$$\psi = (\psi_H), \quad \psi_H: (x(H))_{H \leq G} \mapsto \sum_{gH \in WH} x(\langle g \rangle H) \pmod{|WH|}.$$

この定理は本質的には Dress による。この定理から、Burnside 環に関する実に多くの事柄が従う。例えば、素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\text{Spec } B(G)$, $B(G)_{(\mathfrak{p})} := \mathbb{Z}_{(\mathfrak{p})} \otimes B(G)$ の巾零元公式、

Dress の induction 定理, 等々. 次の結果もある:

定理. G が可換な Sylow 2 部分群をもつとする. このとき, 単数群 $B(G)^*$ の位数 (2 の巾) は, G の部分群 S で $S = O_2'(S) (= \langle 2\text{-元} \rangle)$ なる S の共役類と $N_G(S)$ の構造から計算できる.

§ 2. トポスの G_0 -及び K_0 -ring.

以下, $\mathcal{E}$ は small なカテゴリーで, 終対象中, 直和 $A+B$, さらに pushout をもつとする.

$K_0(\mathcal{E})$ を直和 $+$ に関する $\mathcal{E}/\cong$ の Grothendieck 群とする
また, $K_0(\mathcal{E})$ の部分群 $M(\mathcal{E})$ を,

$$M(\mathcal{E}) := \left\langle \begin{array}{c|c} [A] - [B] & \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \\ [C] + [D] & \end{array} \mid \begin{array}{c} A \longrightarrow B \\ \downarrow \quad \downarrow \\ C \longrightarrow D \end{array} \text{ is pushout} \right\rangle$$

で定義する.

もし $\mathcal{E}$ が十分な injective object をもつような abelian category なら, 上の $G_0(\mathcal{E})$ は普通の G_0 群と同型である.
そこで次を考える.

Question. $\mathcal{E}$ が直積 $A \times B$ と終対象 1 をもつとき, 何かある条件のもとで, $G_0(\mathcal{E})$ と $K_0(\mathcal{E})$ は $+$ と $\times$ によ, 2 環構造をもつか?

これは言い換えると, $\forall X \in \mathcal{E}$ に対し functor $(-) \times X$:

$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}; A \mapsto A \times X$ が, 直和と (mono の) pushout を保つための $\mathcal{E}$ の条件とこのことになる. 良く知られているように,

(*) $\forall X$ に対し, $(-) \times X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ が an adjoint

$(-)^X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}; A \mapsto A^X$ を持つ,

とすれば, $(-) \times X$ は colimit (と $(-) +, \phi$, pushout) を保つ.

Def. $\mathcal{E}$ が Cartesian closed $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\mathcal{E}$ が finite limit, finite colimit を持ち, (*) とすれば.

Lemma. $\mathcal{E}$ が small Cartesian closed なら, $K_0(\mathcal{E})$ と $G_0(\mathcal{E})$ は環になる.

Example. $\mathcal{E} = \text{Set}_G$, G : 有限群 $\Rightarrow K_0(\mathcal{E}) = G_0(\mathcal{E}) = B(G)$.

この場合, $Y^X = \{f: X \rightarrow Y \text{ (単なる写像)}\}$, $\sigma f: x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}x)$ ($\sigma \in G, f \in Y^X$) である.

有限群の Burnside 環は, G -functor という特徴的な性質を持つており, それにより多くの結果が示された. $G_0(\mathcal{E})$ と $K_0(\mathcal{E})$ にこのことさえ同様のことが言えればありがたない. そのためこのカテゴリーの概念を導入する.

Def. カテゴリ Σ と object X に対し, コマカテゴリ Σ/X を次で定義する.

object は $\alpha: A \rightarrow X$ の形 (Σ の) morphism.

morphism $f: (A \xrightarrow{\alpha} X) \rightarrow (B \xrightarrow{\beta} X)$ は, Σ の morphism

$$f: A \rightarrow B \text{ で } \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \searrow & \text{\scriptsize 2} & \swarrow \beta \\ & X & \end{array} \text{ の形.}$$

Σ が Cartesian closed とする. このとき, $\forall f: X \rightarrow Y$ に対し, adjoint pair $\Sigma_f \dashv f^*$ がある (i.e. Σ_f は f^* の左 adjoint):

$$\Sigma/X \xrightleftharpoons[f^*]{\Sigma_f} \Sigma/Y$$

$$\Sigma_f: (A \xrightarrow{\alpha} X) \mapsto (A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y)$$

$$f^*: (B \xrightarrow{\beta} Y) \mapsto (B \times X \xrightarrow{\beta \times 1} Y)$$

Σ_f は pullback, したがって mono を保つ. また Σ_f は colimit も保つから, Σ_f は G_0 と K_0 の加法的準同型写像を誘導する. f^* の方は一般に直和や push out を保てないところはないかな. しかし次の条件

(**) $\forall X \in \Sigma$ に対し Σ/X が Cartesian closed,

$\Rightarrow \Sigma_f$ と f^* は写像

$$\begin{array}{ccc} K_0(\Sigma/X) & \xrightleftharpoons[f^*]{\Sigma_f} & K_0(\Sigma/Y) \\ G_0(\Sigma/X) & \xrightleftharpoons[f^*]{\Sigma_f} & G_0(\Sigma/Y) \end{array}$$

を誘導する. Σ_f は加法的であり, f^* は環準同型である.

条件 $(*)$ が成立するには, $\forall f: X \rightarrow Y$ に對し, f^* が右 adjoint $\Pi_f: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ を持つような $\mathcal{E}$ が, そのようなカテゴリーとしてトポスがある:

Def. $\mathcal{E}$ がトポス

$\Leftrightarrow$ 1) $\mathcal{E}$ は Cartesian closed,

2) subobject classifier $\kappa: \mathbb{1} \rightarrow \Omega$ がある. 即ち,

$$\forall \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ B \end{array} \text{ に對し, } \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{1} \\ \downarrow & & \downarrow \kappa \\ B & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega \end{array} \text{ が pull-back.}$$

2) の条件は, $\text{Sub}(B) \cong \text{Hom}(B, \Omega)$ を示しうる. 集合のカテゴリーの場合, Ω は 2 点集合で χ_A は特性写像である.

Example. $\mathcal{E} = \text{Set}_G$ (G は有限群) はトポス. $H \leq G$ に對し, $\text{Set}_G / (G/H) \cong \text{Set}_H$
 $(\alpha: A \rightarrow G/H) \mapsto \alpha^{-1}(H/H)$

$$\therefore K_0(\text{Set}_G / (G/H)) \cong K_0(\text{Set}_H) \cong B(H).$$

$\Sigma_{G/H \rightarrow \mathbb{1}}$, $(G/H \rightarrow \mathbb{1})^*$, $\Pi_{G/H \rightarrow \mathbb{1}}$ はそれぞれ, induction, restriction, 集会的 induction を与える:

$$\begin{array}{ccc} \text{Set}_G & \xleftarrow[\text{Ind}]{\text{Res}} & \text{Set}_H \\ & \text{Ind} & \\ & \text{Res} & \end{array} \quad \begin{array}{l} X \longmapsto G \times_H X \\ Y \longmapsto Y \\ X \longmapsto \text{Map}_H(G, X). \end{array}$$

これは Burnside 環の間の写像を定義する.

Example. $\Sigma = \text{Set}_f^{\text{fop}}$ は small トポス.

$\Sigma_P = \{A \rightarrow B \mid A, B \in \text{Set}_f\}$ も small トポス.

$K_0(\Sigma_P) \cong \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ (無限変数の項式環).

後者は分断数の理論と関係が深い.

Σ が *locally finite* $\stackrel{\text{def}}{\iff} |\text{Hom}(A, B)| < \infty \quad \forall A, B \in \Sigma$.

$X \in \Sigma$ が *連結* $\stackrel{\text{def}}{\iff} X \cong A + B$ 存 $A = \emptyset$ or $B = \emptyset$.

$X \in \Sigma$ が *既約* $\stackrel{\text{def}}{\iff} X \cong A \cup B$ 存 $A = X$ or $B = X$. (ここ

で $A \cup B$ は subobject $A, B \subseteq X$ の union).

$\text{Con}(\Sigma) := \{\text{連結な object}\}$

$\text{Irr}(\Sigma) := \{\text{既約な object}\}.$

Burnside 環の基本定理がある.

定理. Σ : locally finite topos.

(i) $K_0(\Sigma) \xrightarrow{\varphi} \prod_{C \in \text{Con}(\Sigma)/\sim} \mathbb{Z}$ は injective ring hom.
 $[X] \mapsto (|\text{Hom}(C, X)|)_C$

(ii) $X \cong Y$ in $\Sigma \iff |\text{Hom}(C, X)| = |\text{Hom}(C, Y)|$

$\forall C \in \text{Con}(\Sigma).$

$$(iii) \quad G_0(\Sigma) \xrightarrow{\varphi} \prod_{I \in \text{Irr}(\Sigma) / \sim} \mathbb{Z} \quad \text{is injective ring hom.}$$

$$\downarrow$$

$$[X] \mapsto (|\text{Hom}(I, X)|)_I$$

これらの定理の証明には、次の抽象 Burnside ring の理論を使う。

§3. 抽象 Burnside ring (= ABR)

A をカテゴリとする。

$\mathbb{Z}A$ は $\text{Obj}(A) / \sim$ で生成された自由アーベル群。

$$\varphi: \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}^A \quad ; \quad a \in A \mapsto (|\text{Hom}(i, a)|)_{i \in A / \sim}$$

$$=: \mathbb{Z}^A := \{ \chi: \text{Obj}(A) \rightarrow \mathbb{Z} \mid \chi(a) = \chi(b) \text{ if } a \sim b \}.$$

Def. $\mathbb{Z}A$ なら ABR

$\Leftrightarrow_{\text{def}} \varphi$ なら injective 2, $\text{Im } \varphi$ なら $\mathbb{Z}^A$ の部分環。

Example. Σ なら locally finite topoi とする。

$$a) \quad A := \text{Com}(\Sigma) / \sim \xrightarrow{\text{full}} \Sigma \quad \text{とすれば } \mathbb{Z}A \text{ は ABR 2,}$$

$$\mathbb{Z}A \cong K_0(\Sigma).$$

$$b) \quad A := \text{Irr}(\Sigma) / \sim \xrightarrow{\text{full}} \Sigma \quad \text{とすれば } \mathbb{Z}A \text{ は ABR 2,}$$

$$\mathbb{Z}A \cong G_0(\Sigma).$$

以下, A は skeletal な有限カテゴリー とする. Ips .

$$a \cong b \text{ in } A \Rightarrow a = b \quad \text{かつ} \quad |M_{\text{or}}(A)| < \infty.$$

仮定 I. $E \in \text{Epi}(A)$, $M \in M_{\text{or}}(A)$ なら A は, unique (E, M) -factorization property を持つ. Ips

$$(i) \quad E \circ M = \text{Iso}(A),$$

$$(ii) \quad EE = E, \quad MM = M.$$

$$(iii) \quad \forall f: a \rightarrow b \text{ in } A \quad \exists! e, m \text{ s.t.} \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ e \searrow & \text{Id} & \nearrow m \\ & \text{im}(f) & \end{array}$$

仮定 II. $\forall a \in A \quad \forall \sigma \in \text{Aut}(a)$ に対して, coequalizer

$$a \rightrightarrows_{\sigma} a \longrightarrow a/\sigma \quad (\text{coeq}).$$

が存在する.

$A \in \text{Set}$, としよう. 場合には, a/σ は $\langle \sigma \rangle$ -orbit の集合 $a/\langle \sigma \rangle$ になる.

Proposition 1. A が仮定 I を満たすとする.

$$H := (| \text{Hom}(a, b) |)_{a, b \in A}, \quad D := (| \text{Aut}(a) | \delta_{ab}),$$

$$L := (| M(a, b) |), \quad U := (| E(a, b) |)$$

$$\Rightarrow H = LDU, \quad \det H = \prod_{a \in A} | \text{Aut}(a) | \neq 0.$$

Proposition 2. Hypothesis I, II $\Rightarrow$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^A \xrightarrow{\psi} \prod_{i \in A} (\mathbb{Z} / |A_{\text{Aut } i}| \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

$$\varphi : a \in A \mapsto (|\text{Hom}(i, a)|)_i$$

$$\psi : (x(i))_i \mapsto \left(\sum_{\sigma \in A_{\text{Aut } i}} x(i/\sigma) \pmod{|A_{\text{Aut } i}|} \right)_i$$

Theorem. Hyp I, II $\Rightarrow \mathbb{Z} A : \text{ABR.}$

Example. $A = \text{Con}(\text{Set}_f^G) / \cong \rightarrow G/H \Rightarrow \text{Aut}(G/H) \cong$
 $WH := N_G(H)/H$. よ, この場合上の定理は Burnside 環
 の基本定理を与える. $A = \{[G/H] \mid (H) \in C(G)\}$ に注意.

仮定 I, II を満たすカテゴリ - に, Mackey functor
 が定義され, ある種の transfer 定理も成立する. Hecke
 環もある.

§ 4. Möbius 環.

P を有限半順序集合とする. P をカテゴリ - とみなし,
 $\hat{P} := \text{Set}_f^{P^{\text{op}}}$ とおくと, $\hat{P}$ はトホス. $K_0(\hat{P})$ は与えら
 るが, $G_0(\hat{P})$ は Möbius 環 $\text{Möb}(P)$ に同型になる.
 ここで $\text{Möb}(P)$ は P を基底とする自由アーベル群で,

$$p \cdot q := \sum_{r \in P} \left(\sum_{x \leq p, q} \mu(r, x) \right) r \quad p, q \in P$$

によ、2 積を定義したものを、 μ は Möbius 関数である。

$\mathbb{Z}P$ は ABK になる：

$$\varphi : \mathbb{Z}P \longrightarrow \mathbb{Z}^P : p \in P \mapsto (\zeta(i, p)) ;$$

$$\zeta(i, p) := \begin{cases} 1 & i \leq p \\ 0 & i \not\leq p. \end{cases}$$

しかし、

$$G_0(\hat{P}) \cong \text{Mob}(P) \cong \mathbb{Z}P.$$

$$[\overset{\vee}{h}_p] \longleftrightarrow p \longleftrightarrow r.$$

References.

1. T. tom Dieck, "Transformation Groups and Representation Theory", Springer LN 766 (1979).
2. N. Metropolis-G.C.Rota, Witt vectors and the algebra of necklaces, Adv. Math. 50 (1983), 95-125.
3. T. Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra 80 (1983), 90-105.
4. T. Yoshida, The Moebius algebra as a Burnside ring, Hokkaido Math. J. 13 (1984), 362-376.
5. T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, to appear.
6. Johnstone, "Topos Theory", Academic Press (1978).
7. T. Yoshida, Idempotents and transfer theorems of Burnside rings, character rings and span rings, in "Algebraic and Topological Theories", 589-615, Kinokuniya, Tokyo, 1985.
8. T. Yoshida, On the Burnside rings of finite groups and finite categories, to appear.