

On a weight function for trees

和歌山大学教育学部 (Faculty of Education, Wakayama Univ.)

有馬 功 (Isao Arima), 田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)

1 standard tableau と hook length

初めに standard tableau の個数が hook length を用いて表せることを紹介する.

以下, 自然数全体の集合を $\mathbf{P}$, 整数全体の集合を $\mathbf{Z}$, 0 以上の整数全体の集合を $\mathbf{N}$ とする.

Definition 1.1 (partition)

$n \in \mathbf{P}$ に対して $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbf{P}^r$ が次の条件を満たすとき, λ を n の partition と呼ぶ. 以後, λ が n の partition であることを $\lambda \vdash n$ で表す.

(i) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$

(ii) $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$

Definition 1.2 (Young diagram)

$n \in \mathbf{P}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ のとき, 第 i 行に λ_i 個の箱を左揃えに並べた n 個の箱からなる図形を shape λ の Young diagram と呼ぶ.

Remark 1.3

$\lambda \vdash n$ と shape λ の Young diagram と $\{(i, j) \in \mathbf{P}^2 | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ の 3 つを同一視する.

Notation 1.4

$\lambda \vdash n$ に対して λ' を λ の conjugate とする¹.

Example 1.5

$\lambda = (3, 2)$ に対する conjugate は $\lambda' = (2, 2, 1)$

Definition 1.6 (tableau)

$n \in \mathbf{P}$, $\lambda \vdash n$ に対して shape λ の Young diagram に対して各箱に自然数をつずつ入れたものを tableau と呼び. その集合全体を $\text{Tab}(\lambda)$ で表す. また, $T \in \text{Tab}(\lambda)$, $(i, j) \in \lambda$ に対して $T_{(i,j)}$ を i 行 j 列の箱に入っている数とする.

¹ i.e. $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$, $\lambda'_i := \#\{j; i \leq \lambda_j\}$

Definition 1.7 (standard tableau)

$n \in \mathbf{P}$, $\lambda \vdash n$ に対して $T \in \text{Tab}(\lambda)$ が次の条件を満たすとき, shape λ の standard tableau と呼び, その集合全体を $\text{STab}(\lambda)$ で表す.

- (i) $T_{(i,j)} < T_{(i,j+1)}$ if $(i,j), (i,j+1) \in \lambda$
- (ii) $T_{(i,j)} < T_{(i+1,j)}$ if $(i,j), (i+1,j) \in \lambda$
- (iii) $\{T_{(i,j)} | (i,j) \in \lambda\} = \{1, 2, \dots, n\}$

Example 1.8

$\lambda = (3, 2) \vdash 5$ に対して

$$\text{STab}((3, 2)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

Fact 1.9

$n \in \mathbf{P}$, $\lambda \vdash n$, λ' を λ の conjugate とするとき, $(i, j) \in \lambda$ に対して

$$h(i, j) := \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$$

とおく². このとき次が成立する.

$$\#\text{STab}(\lambda, n) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j)} \quad (1)$$

この $h(i, j)$ を (i, j) の hook length と呼ぶ.

Example 1.10

$n = 5, m = 3, \lambda = (3, 2)$ に対する Young tableau に各 (i, j) の hook length を書き込むと

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

であり, Fact 1.9 の (1) 式より

$$\#\text{STab}(\lambda) = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5$$

となり Ex 1.8 の結果と一致していることがわかる.

² i.e. (i, j) を起点とする右端、下端までの箱の数の和である.

2 standard tableau と poset

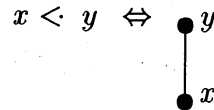
次に standard tableau を poset と見なしたとき standard tableau の個数と poset における linear extension の個数が一致し, linear extension の個数も hook length を用いて表せることを紹介する.

Definition 2.1 (cover)

P を poset とする³. $x, y \in P$ に対して, $x < y$ かつ $\nexists z \in P$ s.t. $x < z < y$ を満たすとき, y は x を cover すると呼び, $x < y$ で表す.

Definition 2.2 (Hasse diagram)

P を finite poset とする. グラフ $G = (V, E)$ が P の Hasse diagram であるとは $V = P$, $E = \{(x, y) \in P^2 \mid x < y\}$ とし

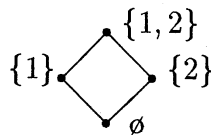


で表す.

Example 2.3

$P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ とし, P における順序関係 $\leq$ を $x \leq y \Leftrightarrow x \subset y$ で定義する.

このとき P の Hasse diagram は



となる.

Definition 2.4

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ に対して

$$P(\lambda) := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

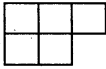
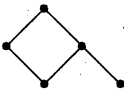
とおき⁴, 順序関係 $\leq$ を次で定義する.

$$(i, j) \leq (i', j') \stackrel{\text{def}}{\iff} i \geq i', j \geq j'$$

³ partially ordered set の略

⁴ Remark 1.3 の $\{(i, j); 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ と同じ.

Example 2.5

$\lambda =$  に対して $P(\lambda) =$  である.

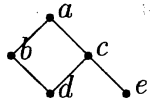
Definition 2.6 (linear extension)

P を poset, $|P| = n$ とする. このとき

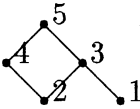
$$L(P) := \{\sigma : P \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid x \leq y \Rightarrow \sigma(x) \leq \sigma(y), \sigma : \text{全単射}\}$$

とおき, $L(P)$ の元を P の linear extension と呼ぶ.

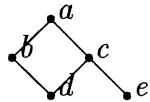
Notation 2.7

$P =$  に対して $\sigma(a) = 5, \sigma(b) = 4, \sigma(c) = 3, \sigma(d) = 2, \sigma(e) = 1$

とおいたとき, $\sigma \in L(P)$ となっている.

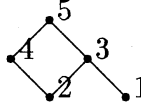
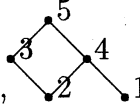
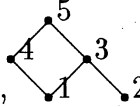
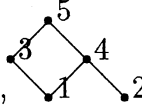
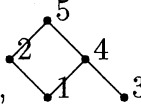
以下, 簡略化のため  のように表記する.

Example 2.8

$P =$  に対する linear extension は

$$L(P) = \{ \text{Diagram 1}, \text{Diagram 2}, \text{Diagram 3}, \text{Diagram 4}, \text{Diagram 5} \}$$

where the diagrams are:

- Diagram 1: 
- Diagram 2: 
- Diagram 3: 
- Diagram 4: 
- Diagram 5: 

である.

Remark 2.9

$\lambda \vdash n$ に対して $\text{STab}(\lambda)$ と $L(P(\lambda))$ は 1 対 1 に対応⁵ している. 従って, 先の Fact 1.9 から次の式を得ることが出来る.

$$\#L(P(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in P(\lambda)} h(i,j)}$$

⁵ linear extension における大小関係を逆にしたものと 1 対 1 になっている.

3 semi-standard tableau と hook length

次に semi-standard tableau に対して, ある weight による母関数が hook length を用いて表せることを紹介する.

Definition 3.1 (semi-standard tableau)

$n, m \in \mathbf{P}$, $\lambda \vdash n$ とする. $T \in \text{Tab}(\lambda)$ が次の条件を満たすとき shape λ の semi-standard tableau と呼ぶ.

- (i) $T_{(i,j)} \leq T_{(i,j+1)}$ if $(i,j), (i,j+1) \in \lambda$
- (ii) $T_{(i,j)} < T_{(i+1,j)}$ if $(i,j), (i+1,j) \in \lambda$

また

$$\text{SSTab}(\lambda, m) := \{T \in \text{Tab}(\lambda) \mid \text{(i), (ii) を満たし, } T_{(i,j)} \leq m \text{ for } \forall (i,j) \in \lambda\}$$

とおく.

Notation 3.2

$n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$[n] := \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

とおく.

Definition 3.3

$n, m \in \mathbf{P}$, $T \in \text{SSTab}(\lambda, m)$ に対して

$$|T| := \sum_{(i,j) \in \lambda} T_{(i,j)}$$

とおき, 次を定義する.

$$F(\lambda, m; q) := \sum_{T \in \text{SSTab}(\lambda, m)} q^{|T|}$$

Example 3.4

$m = 3, \lambda = (3, 2) \vdash 5$ に対して

$\text{SSTab}((3, 2), 3) = \{$

$$\begin{aligned} T_1 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, T_2 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, T_3 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, T_4 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_5 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, \\ T_6 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_7 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_8 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_9 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_{10} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$T_{11} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_{12} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_{13} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_{14} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array}, T_{15} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array} \}$$

従って

$$\begin{aligned} F((3, 2), 3; q) &= \sum_{T \in \text{SSTab}((3, 2), 3)} q^{|T|} \\ &= q^7 + 2q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 3q^{11} + 2q^{12} + q^{13} \\ &= q^7(1 + 2q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6) \\ &= q^7(1 + q + q^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) \\ &= q^7[3][5] \\ &= q^7 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ &= q^7 \frac{[3+1-1][3+2-1][3+3-1][3+1-2][3+2-2]}{[4][3][2][1][1]} \\ &= q^7 \frac{[3+1-1][3+2-1][3+3-1][3+1-2][3+2-2]}{\prod_{(i,j) \in (3,2)} h(i,j)} \end{aligned}$$

母関数は hook length⁶ で表されていることがわかる。

一般に semi-standard tableau の母関数は hook length を用いて、次のような形で表せることが知られている。

Fact 3.5

$n, m \in \mathbf{P}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ に対して

$$F(\lambda, m; q) = q^{\sum_{i=1}^r i\lambda_i} \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{[m+j-i]}{[h(i,j)]} \quad (2)$$

Problem 3.6

一般の poset に対して、各元に semi-standard tableau と同じ様な数の振り方をして母関数を考えたとき、(2) のような形の等式が成立するか？

この問題をさらに具体的な問題にする前に一般の poset に対して少し定義をする。

4 一般の poset について

Definition 4.1 (hook length formula を持つ poset)

P を poset, $|P| = n$ とする。 P が次の条件を満たすとき hook length formula を持つ poset と、ここでは呼ぶことにする。

$$\exists h_P : P \rightarrow \mathbf{P} \text{ s.t. } \#L(P) = \frac{n!}{\prod_{x \in P} h_P(x)}$$

⁶ hook length は先の Ex 1.10 を参照

Fact 4.2

d-complete poset は hook length formula を持つ poset である.⁷

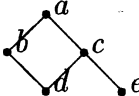
Definition 4.3

P を poset とし, P に対して

$$\begin{aligned}\text{Cov}(P) &:= \{(x, y) \in P^2 \mid x < y\} \\ \text{Min}(P) &:= \{x \in P \mid x : P \text{ の極小元}\} \\ \text{EL}(P) &:= \{R : \text{Cov}(P) \rightarrow \mathbf{N}\}\end{aligned}$$

とおき, $\text{EL}(P)$ の元を P の edge labeling と呼ぶ.

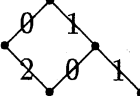
Example 4.4

$P =$  に対して

$$\begin{aligned}\text{Cov}(P) &= \{(d, b), (d, c), (e, c), (b, a), (c, a)\} \\ \text{Min}(P) &= \{d, e\}\end{aligned}$$

写像 $R : \text{Cov}(P) \rightarrow \mathbf{N}$ を $R(d, b) = 2, R(d, c) = 0, R(e, c) = 1, R(b, a) = 0, R(c, a) = 1$ とおけば, $R \in \text{EL}(P)$ となる.

以下, 簡略化のために $R \in \text{EL}(P)$ を次のように表記する.

$$R =$$


Definition 4.5 ((P, R) -partition)

P を poset とし, $R \in \text{EL}(P)$ とする.

このとき, 写像 $\varphi : P \rightarrow \mathbf{N}$ が次の条件を満たすとき (P, R) -partition という.

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq R(x, y) \text{ for } \forall (x, y) \in \text{Cov}(P)$$

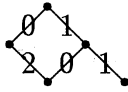
また, $n \in \mathbf{P}$ に対して

$$A(P, R, n) := \{\varphi : (P, R)\text{-partition} \mid \varphi(x) \leq n \text{ for } \forall x \in P\}$$

とおく.

⁷ tree は d-complete poset のひとつである.

Example 4.6

$R =$  に対して

$$A(P, R, 3) = \{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}, \\ \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 3 \end{array} \end{array} \}$$

である。

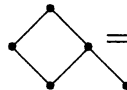
Definition 4.7 (hook edge labeling)

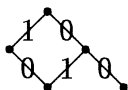
P を hook length formula を持つ poset, $R \in \text{EL}(P)$ とする。

$$\exists c \in \mathbb{N}, \exists c_R : P \rightarrow \mathbb{Z} \text{ s.t. } \sum_{\varphi \in A(P, R, n)} q^{|\varphi|} = q^c \prod_{x \in P} \frac{[n + c_R(x)]}{[h_P(x)]} \text{ for } n \in \mathbb{N}$$

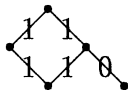
のとき, R を hook edge labeling と呼び, その全体集合を $\text{HEL}(P)$ で表す。
但し, $|\varphi| := \sum_{x \in P} \varphi(x)$ とする。

Example 4.8

$P =$  $= P((3, 2))$ とする。

$R_1 =$  のとき

$$\sum_{\varphi \in A(P((3,2)), R_1, n)} q^{|\varphi|} = q^2 \prod_{(i,j) \in P((3,2))} \frac{[n + j - i + 1]}{[h_{P((3,2))}(i, j)]} \text{ for } n \in \mathbb{N},$$

$R_2 =$  のとき

$$\sum_{\varphi \in A(P((3,2)), R_2, n)} q^{|\varphi|} = q^5 \prod_{(i,j) \in P((3,2))} \frac{[n + j - i]}{[h_{P((3,2))}(i, j)]} \text{ for } n \in \mathbb{N}$$

となるので $R_1, R_2 \in \text{HEL}(P)$ である⁸。

⁸ R_1 の場合, semi-standard tableau の場合と比べ左辺の分子にずれが生じているのは (P, R) -partition における n の取り得る値が $1 \sim n$ ではなく, $0 \sim n$ となっている為である。

先ほどの Problem 3.6 は次の具体的な問題となる.

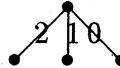
Problem 4.9

hook length formula を持つ poset に対して hook edge labeling はどのようなものか?

hook length formula を持つ poset として知られている d-complete poset 中の tree について次のように考えた.

Young tableau に対して hook edge labeling は 0 と 1 だけで表すことが出来る. そこで tree に対しても同様に出来るだろうと考えた. しかし, 出来きないので 0 と 1 だけでなく 2, 3, ... と数を増やし, 実験をおこなったところ, 次の実験結果が得られた.

Example 4.10

$P =$  に対して $R =$  $\in \text{EL}(P)$ とおくと

$A(P, R, 2) = \{$  $,$  $,$  $,$  $,$  $,$  $\}$ であり,

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in A(P, R, 2)} q^{|\varphi|} &= q^3(1+q)(1+q+q^2) \\ &= q^3[2][3] \\ &= q^3 \frac{[4][3][2][1]}{[4][1][1][1]} \end{aligned}$$

というように hook length⁹ を用いて表すことが出来た.

この実験結果をもとに, 一般の tree に対する $\text{HEL}(P)$ がわかったので次に紹介する.

⁹ tree における hook length は Fact 5.7 を参照

5 tree case

Definition 5.1 (tree)

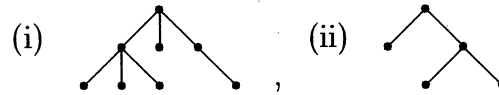
P を finite poset とする.

P が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき P を tree と呼ぶ.

- (i) P は最大元を持つ.
- (ii) P の Hasse diagram はグラフとして連結である.
- (iii) P の Hasse diagram から任意の edge を取り除いたグラフは非連結なグラフである.

Example 5.2

次の (i), (ii) は tree である.

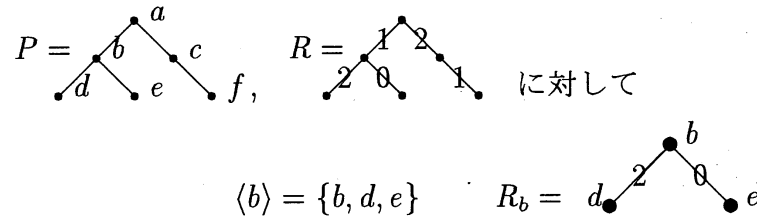


Notation 5.3

P を tree とし, $R \in \text{EL}(P)$, $\forall x \in P$ に対して次を定義する¹⁰.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &:= \{y \in P \mid y \leq x\} && \text{: subposet of } P \\ R_x &:= R|_{\text{Cov}(\langle x \rangle)} && \text{: edge labeling of } \langle x \rangle \end{aligned}$$

Example 5.4



Fact 5.5

P を tree, $|P| = n$ とする.

このとき $h: P \rightarrow \mathbf{P}; h(x) := \#\langle x \rangle$ と定義すると

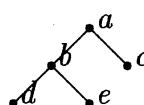
$$\#L(P) = \frac{n!}{\prod_{x \in P} h(x)} \quad (3)$$

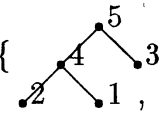
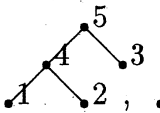
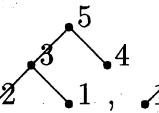
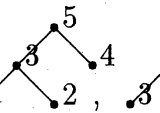
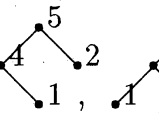
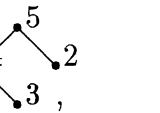
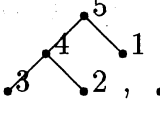
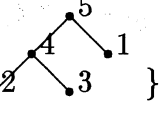
となる.

従って, tree は hook length formula を持つ poset であることがわかる.

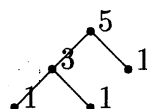
¹⁰ $\langle x \rangle$ は x で生成される principle order ideal と呼ばれる.

Example 5.6

$P =$  に対する linear extension は

$L(P) = \{$  ,  ,  ,  ,  ,  ,  ,  ,  $\}$

である. また, 各元における hook length を書き込むと



従って (3) の等式より

$$\#L(P) = \frac{5!}{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 8$$

となり, linear extension の個数と等式から得られた値が一致している.

Definition 5.7

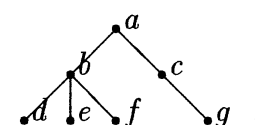
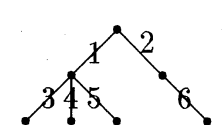
P を tree とする. このとき

$$C(x) := \{y \in P \mid y < x\}$$

とおく. また, $R \in \text{EL}(P)$ に対して写像 $z_R: P \rightarrow \mathbf{Z}$ を次で定義する.

$$z_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \text{Min}(P) \\ \max\{z_R(y) - R(y, x) + 1 \mid y \in C(x)\} & \text{if } x \notin \text{Min}(P) \end{cases}$$

Example 5.8

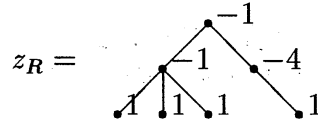
$P =$  , $R =$  に対して

$C(a) = \{b, c\}$, $C(b) = \{d, e, f\}$, $C(c) = \{g\}$, $C(d) = C(e) = C(f) = C(g) = \emptyset$ である.

また次に定義から d, e, f, g は極小元なので, $z_R(d) = z_R(e) = z_R(f) =$

$z_R(g) = 1$, b に対して, $z_R(d) - R(d, b) + 1 = -1$, $z_R(e) - R(e, b) + 1 = -2$, $z_R(f) - R(f, b) + 1 = -3$ なので, $z_R(b) = -1$ である.

また, c に対して, $z_R(c) = z_R(g) - R(g, c) + 1 = -4$, そして, a に対して $z_R(b) - R(b, a) + 1 = -1$, $z_R(c) - R(c, a) + 1 = -5$ なので $z_R(a) = -1$ となる. 従って



である.

Theorem 5.9

T を tree とし, $R \in \text{EL}(T)$ は次の条件 (*) を満たすとする.

$$(*) \begin{cases} \forall x \in T - \text{Min}(T) \text{ に対して} \\ \exists y_1, y_2, \dots, y_r \in T \text{ s.t. } \{y_1, y_2, \dots, y_r\} = C(x), \\ R(y_k, x) = R(y_1, x) + z_R(y_k) - z_R(y_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \#(y_i) \text{ for } k \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

このとき x_0 を T の最大元とすると, $n \in \mathbf{P}$ に対して次の式が成立する.

$$\sum_{\varphi \in A(T, R, n)} q^{|\varphi|} = q^{c_R} \frac{[n + z_R(x_0)][n + z_R(x_0) - 1] \dots [n + z_R(x_0) - \#(x_0) + 1]}{\prod_{x \in T} [h(x)]}$$

従って, $R \in \text{EL}(P)$ が (*) を満たすとき $R \in \text{HEL}(P)$ である.

但し, $c_R = \min\{|\varphi| \mid \varphi \in A(T, R, n)\}$ とする.

Example 5.10

$T_1 =$, $R_1 =$ とすると, R_1 は条件 (*) を満たすので

$$\sum_{\varphi \in A(T_1, R_1, n)} q^{|\varphi|} = q^6 \frac{[n+2][n+1][n][n-1][n-2]}{\prod_{x \in T} [h(x)]}$$

の等式が成立する.

$T_2 =$, $R_2 =$ とすると, R_2 は条件 (*) を満たすので

$$\sum_{\varphi \in A(T_2, R_2, n)} q^{|\varphi|} = q^6 \frac{[n+4][n+3][n+2][n+1][n][n-1][n-2]}{\prod_{x \in T} [h(x)]}$$

の等式が成立する.

また, Theorem 5.9 の条件 (*) より次のことが容易にわかる.

Corollary 5.11

$$T : \text{tree} \Rightarrow \text{HEL}(T) \neq \emptyset$$

Corollary 5.12

T を tree, $R \in \text{EL}(T)$ は (*) を満たすとする. このとき, 次の式が得られる.¹¹ 但し, $|T| = n$, x_0 を T の最大元とする.

$$\sum_{\varphi \in A(T, R, n - z_R(x_0))} q^{|\varphi|} = q^{c_R} \frac{[n]!}{\prod_{x \in T} [h(x)]}$$

Theorem 5.9 の逆として, 次のことがわかる.

Theorem 5.13

T を tree とし, $R \in \text{EL}(T)$ に対して次が成立する.¹²

$R_x \in \text{HEL}(\langle x \rangle)$ for $\forall x \in T - \text{Min}(T) \Rightarrow R$ は (*) を満たす.

また, 次のことが予想できる.

Conjecture 5.14

T を tree とする. このとき次が成立する.

$$R \in \text{HEL}(P) \Rightarrow R \text{ は (*) を満たす.}$$

参考文献

- [1] R. A. Proctor, *Dynkin Diagram Classification of λ -Minuscule Bruhat Lattices and of d -Complete Posets*, Journal of Algebraic Combinatorics **9** (1999), 61 – 94.
- [2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume I*, Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics Series, 1986.
- [3] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, 1999.

¹¹ この式の右辺は linear extension の個数を表す q-analogue になっている

¹² Theorem 5.9 より “ $R \in \text{HEL}(P) \Leftarrow R$ は (*) を満たす”. は OK