

DATA TYPE の公理系

(概 要)

伊藤 貴康

(三菱電機中央研究所)

まゝかき

D. Scott により, data type と data type 間の近似という概念が提案された。彼は, 近似の概念を表わす半順序関係 $\sqsubseteq$ と完備束を作る data type 上で定義された単調な連続関数をもとにして, data type の計算モデルを提案した。

D. Scott の理論においては, 完備束上の単調関数が最小不動点を持つという事が, 重要な事実となっているが, 完備束を作るために, D. Scott は, 2つの仮想的な要素 $\perp$ (bottom element) と $\top$ (top element) を導入している。これらの仮想的な要素は, 必ずしも, 現実的な意味を持たない場合があるために, これらの要素を reject しようという動きがある。

本文は, そのような試みの一つであって, bottom element と top element の存在を想定しないで, data type の近似を表わす半順序関係の公理系を作る事を目的としている。

DATA TYPE の近似関係の公理系

data type というのは, ある type を持つ二つの対象の集合であって, domain と呼ばれる。data type 同士の近似は, 有界な表現を許さないかも知れないが, 有界な表現により近似されるであろう事が, 想像される。このように考えると, data type 間の近似の概念は重要なものと考えられよう。

$x \sqsubseteq y$ は, x は y への近似であるという関係を示すものとしよう。

この論文では, この述語 $\sqsubseteq$ を用いた data type 上の近似関係についての公理系を与える事を考える。

data type の近似の公理系は, 次のような3つの公理と1つの axiom schema よりなる。

AXIOM 1 (Transitivity)

$$\forall x \forall y [x \sqsubseteq y \iff \exists z (x \sqsubseteq z) \wedge \forall w (w \sqsubseteq x \Rightarrow w \sqsubseteq y)]$$

AXIOM 2 (Extensionality)

$$\forall x \forall y [x = y \iff \forall z (z \sqsubseteq x \iff z \sqsubseteq y)]$$

AXIOM 3 (Distinguishability)

$$\forall x \forall y [\neg(x \sqsubseteq y) \wedge \exists z (x \sqsubseteq z) \Rightarrow \exists w (w \sqsubseteq x \wedge \neg \exists v (v \sqsubseteq w \wedge v \sqsubseteq y))]$$

次に, Φ -domain という概念を導入しよう。

定義

$\varphi[x]$ を $\sqsubseteq$ に関する一階述語論理式としよう。このとき, $\Phi(x; \varphi[x])$ を, $\varphi[x]$ が充足される data type の集合として, 次のように定義されるものとする:

$$z \sqsubseteq \Phi(x; \varphi[x]) \text{ なるための必要十分条件は, } \\ \forall w [w \sqsubseteq z \Rightarrow \exists x [\varphi[x] \wedge w \sqsubseteq x] \wedge \exists u (z \sqsubseteq u)]$$

この $\Phi(x; \varphi[x])$ を Φ -domain と呼ぶ。

AXIOM SCHEME (Comprehension Axiom Scheme)

$$\exists y \forall z [z \sqsubseteq y \Leftrightarrow z \sqsubseteq \Phi(x; \varphi[x])]$$

近似公理系における基本定理

近似公理系の中で, 次のような定理を証明できる。

定理 1

(i) Reflexivity

$$\forall x [\exists y (x \sqsubseteq y) \Rightarrow (x \sqsubseteq x)]$$

(ii) Antisymmetry

$$\forall x \forall y [x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y]$$

(iii) Transitivity

$$\forall x \forall y \forall z [x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z]$$

定理 2

$$(i) \exists ! y \forall z [z \sqsubseteq y \Leftrightarrow z \sqsubseteq \Phi(x; \phi[x])]$$

$$(ii) \forall x \forall y [x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \sqsubseteq x \Rightarrow \exists w [w \sqsubseteq z \wedge w \sqsubseteq y])] \wedge \exists u (x \sqsubseteq u)$$

$$(iii) \forall y [y = \Phi(x; x \sqsubseteq y)]$$

定義

$$(i) \quad \mathbb{I} = \Phi(x; x = x)$$

$$(ii) \quad \mathbb{O} = \Phi(x; x \neq x)$$

$\mathbb{I}$ は, この近似公理系の universe であり, $\mathbb{O}$ は data type ではない。したがって $\mathbb{O}$ に対するいかなる近似式も存在しない。すなわち $\mathbb{I}$ は Scott の $\mathbb{I}$ と同じであるが, $\mathbb{O}$ は Scott の $\mathbb{I}$ とは, 異なりものとなる。

定理 3

$$(i) \forall x [x \sqsubseteq \mathbb{I} \Leftrightarrow \exists y (x \sqsubseteq y)]$$

$$(ii) \neg (\mathbb{O} \sqsubseteq \mathbb{I})$$

$$(iii) \forall x [\neg (\exists y. \neg (y \sqsubseteq x)) \Leftrightarrow x = \mathbb{0}]$$

定義

$$(i) y \oplus z = \Phi(x; x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq z)$$

$$(ii) y \circ z = \Phi(x; x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z)$$

定理 4

$$(i) y \oplus z = \Phi(x; x = y \vee x = z)$$

$$(ii) \forall x \forall y \forall z [x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq y \oplus z]$$

$$(iii) \forall x \forall y \forall z [x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq y \circ z]$$

$$(iv) \forall y \forall z [y \circ z \sqsubseteq \mathbb{1} \Rightarrow y \circ z \sqsubseteq z \wedge y \circ z \sqsubseteq y]$$

$$(v) \forall y \forall z [\neg \exists x (x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z) \Leftrightarrow y \circ z = \mathbb{0}]$$

$$(vi) \forall y [y \oplus \mathbb{0} = y]$$

$$(vii) \forall y [y \circ \mathbb{0} = \mathbb{0}]$$

$$(viii) \forall x [x \sqsubseteq y \circ z \Rightarrow x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z]$$

したがって

$y \oplus z$ は, y と z の上界, $y \circ z$ は, y と z の下界である。

定義

$$y^c = \Phi(x; \forall z (z \sqsubseteq x \Rightarrow \neg z \sqsubseteq y))$$

定理 5

$$(i) \quad \mathbb{0}^c = \mathbb{1} \wedge \mathbb{1}^c = \mathbb{0}$$

$$(ii) \quad \forall x \forall y \neg [x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq y^c]$$

$$(iii) \quad \forall x [x \oplus x^c = \mathbb{1}]$$

これらの結果は，近似公理系のモデルが，ブール代数のモデルとなることを示している。

また，集合論のモデルを近似公理系に，うめ込む事ができる事を示せる。このことから，近似公理系が，data type としてプログラミング言語の universe を定義するに十分な能力を誇っている事が分る。

ここに述べたような近似公理系をもとにした計算モデルを具体的に作る事は，今後の問題として残されている。

文献

- (1) Birkhoff, G.: Lattice Theory, AMS Colloquium Publication Volume XXV
- (2) Cohen, P. J.: Set theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin (1966)
- (3) Ito, T.: A theory of formal microprograms, NATO Advanced Study Institute on Microprogramming

- (4) 伊藤 貴康: プログラム理論とその応用, 電気学会雑誌, 才91巻, 才8号 (昭和46年8月)
- (5) Ito, T.: A formal approximation theory of data types, Symposium on Theoretical Programming, Novosibirsk, USSR (August 1972)
- (6) Scott, D.: Outline of a mathematical theory of computation, Proc. Fourth Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems (1970)
- (7) Scott, D. and C. Strachey: Towards a mathematical semantics of computer languages, Proc. of the Symposium on Computers and Automata, Microwave Research Institute Series. Volume 21, Polytechnic Institute of Brooklyn (1972)