

丹原関手と斜バーンサイド環

山形大学・理学部 小田文仁 (Fumihito Oda)
Faculty of Science, Yamagata University

1. はじめに

有限群の表現環, バーンサイド環, コホモロジー環等に共通した性質を取りだし, Tambara は *TNR*-functor を定義した [Tam], [Ta93]. その名は trace, norm, restriction という写像に由来する. *TNR*-functor は, Brun により Tambara functor と呼ばれ, 現在に至っている [Br05]. Mackey functor は, 有限 G -set の圏から単位元をもつ可換環上の加群の圏への関手の対である. 特に, それらの加群がすべて環でありいくつかの条件を満たすとき, Green functor と呼ばれる. Tambara functor は, 乗法的誘導をもつ可換環が対応する Green functor である.

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring) は [OY01] で紹介された. 与えられた Mackey functor M と G -集合 X から新たな Mackey functor M_X を構成する手法は, Dress が紹介した [Dr72]. その手法は, 現在 Dress 構成と呼ばれている. 任意の Green functor A に G -monoid S が与える Dress 構成から得られる Mackey functor A_S は, 自然に Green functor の構造をもつ. 特に Burnside Green functor Ω に対しこの事実を適用することにより, 斜バーンサイド環が与えられる. 本稿では G -monoid S に可換性を仮定することで, 任意の Tambara functor でも同様の事実が成立するという結果 [Tam], [OY11] の概観を与えたい. Mackey functor については [TW95], [We00], Burnside ring については [Bo00] がわかりやすくまとめられている.

講演の冒頭で紹介した Tambara functor に関する論文は, [Ta93], [Br05], [El06], [Na09], [OY11], [Na11] である.

G は有限群, $\circ$ は単位元をもつ可換環とする. G -set は有限とする. G -set と G -map の圏を $G\text{-set}$, 集合と写像の圏を Set と書く. 単位元をもつ monoid は, monoid 準同型を誘導する G の作用に関する G -set であるとき G -monoid と呼ぶ. 二つの G -集合 X, Y の disjoint union を $X + Y$ と書く.

2. EXPONENTIAL DIAGRAMS

$f: X \rightarrow Y$ を G -map とする. 圏 $G\text{-set}/X$ の対象は G -map $\alpha: A \rightarrow X$ (X 上の G -set と呼ぶ), $A \xrightarrow{\alpha} X$ から $B \xrightarrow{\beta} X$ への射は G -map $f: A \rightarrow B$ で $\beta f = \alpha$ をみたすものである. X 上の G -set $\alpha: A \rightarrow X$ に対し集合

$$\Pi_f A = \left\{ (y, \sigma) \mid \begin{array}{l} y \in Y, \sigma: f^{-1}(y) \rightarrow A: \text{map}, \\ \alpha \circ \sigma = \text{id}_{f^{-1}(y)} \end{array} \right\}$$

に G -作用を

$$g(y, \sigma) := (gy, {}^g\sigma), \quad {}^g\sigma(x) := g\sigma(g^{-1}x), \quad (g \in G)$$

で定め, $\Pi_f A$ から Y への射影 $(y, \sigma) \mapsto y$ を $\Pi_f \alpha$ と書く. G -map $f: X \rightarrow Y$ に対し pullback functor

$$\begin{aligned} f^* : G\text{-set}/Y &\rightarrow G\text{-set}/X \\ (B \rightarrow Y) &\mapsto (X \times_Y B \xrightarrow{\text{pr}} X) \end{aligned}$$

は左随伴関手

$$\begin{aligned} \Sigma_f : G\text{-set}/X &\rightarrow G\text{-set}/Y \\ (A \xrightarrow{\alpha} X) &\mapsto (A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y) \end{aligned}$$

と右随伴関手

$$\begin{aligned} \Pi_f : G\text{-set}/X &\rightarrow G\text{-set}/Y \\ (A \xrightarrow{\alpha} X) &\mapsto (\Pi_f A \xrightarrow{\Pi_f \alpha} Y) \end{aligned}$$

をもつ. 二つの自然変換

$$\Sigma_f \xleftarrow{\Sigma_f \varepsilon'} \Sigma_f f^* \Pi_f \xrightarrow{\varepsilon \Sigma_f} \Pi_f$$

(ただし, ε' は随伴 $f^* \dashv \Pi_f$ の余単位射, ε は随伴 $\Sigma_f \dashv f^*$ の余単位射) は $A \xrightarrow{\alpha} X$ に対し, 図式

$$\Sigma_f \left(\begin{array}{c} A \\ \downarrow \alpha \\ X \end{array} \right) \xleftarrow{\Sigma_f \varepsilon'(\alpha)} \Sigma_f f^* \Pi_f \left(\begin{array}{c} A \\ \downarrow \alpha \\ X \end{array} \right) \xrightarrow{\varepsilon \Pi_f(\alpha)} \Pi_f \left(\begin{array}{c} A \\ \downarrow \alpha \\ X \end{array} \right),$$

すなわち

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_Y \Pi_f A & & \\ & \swarrow \Sigma_f \varepsilon'(\alpha)=e & \downarrow p_X & \searrow \varepsilon \Pi(\alpha)=p \Pi_f A & \\ A & & X & & \Pi_f A \\ & \searrow \alpha & \downarrow f & \swarrow \Pi_f \alpha & \\ & & Y & & \end{array}$$

(ただし, $e: X \times_Y \Pi_f A \ni (x, (y, \sigma)) \mapsto \sigma(x) \in A$, $p_X, p_{\Pi_f A}$ は射影) を与える. この図式

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xleftarrow{e} & X \times_Y \Pi_f A \\ & \swarrow \alpha & & & \downarrow f' \\ X & & & & \Pi_f A \\ \downarrow f & & \text{EXP} & & \downarrow \Pi_f \alpha \\ Y & & & & \end{array}$$

($f' = p_{\Pi_f A}$ とする) を Tambara は canonical exponential diagram と呼び, TNR -関手の公理化に用いた.

3. TAMBARA FUNCTORS

Tambara functor の定義を与える. G -map $f: X \rightarrow Y$ に対し関手の三つ組

$$T = (T_!, T^*, T_*) : G\text{-set} \rightarrow \mathbf{Set},$$

$$T(X) := T_!(X) = T^*(X) = T_*(X),$$

$$f_! := T_!(f), f_* := T_*(f) : T(X) \rightarrow T(Y), f^* : T(Y) \rightarrow T(X)$$

は以下の条件を満たすとき *semi-Tambara functor* と呼ばれる:

(T.1) (Additivity)

$$X \xrightarrow{i} X + Y \xleftarrow{j} Y \Rightarrow T(X + Y) \cong T(X) \times T(Y)$$

and $T(\emptyset) = 0(= \{0\})$. (T.2) (Pullback formula)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & PB & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & W \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{a_!} & T(Y) \\ b^* \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow c^* \\ T(Z) & \xrightarrow{d_!} & T(W) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{a_*} & T(Y) \\ b^* \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow c^* \\ T(Z) & \xrightarrow{d_*} & T(W) \end{array}.$$

(T.3) (Distributive law)

$$\begin{array}{ccc}
X \xleftarrow{a} A \xleftarrow{e} X \times_Y \Pi_f A & & T(X) \xleftarrow{a!} T(A) \xleftarrow{e^*} T(X \times_Y \Pi_f A) \\
f \downarrow \quad \quad \quad \text{EXP} \quad \quad \quad \downarrow f' & \Rightarrow & f_* \downarrow \quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \downarrow f'_* \\
Y \xleftarrow{q} \Pi_f A & & T(Y) \xleftarrow{q!} T(\Pi_f A).
\end{array}$$

すべての $T(X)$ が可換環で $f_!, f^*, f_*$ がそれぞれ加法群, 環, 乗法的モノイドの準同型であるならば, T は *Tambara functor* と呼ばれる.

$(T_!, T^*)$ は (T.1), (T.2) を満たすとき, *semi-Mackey functor* と呼ばれる. *semi-Mackey functor* $(T_!, T^*)$ は $T(X)$ が $\mathcal{O}$ -加群で, $f_!, f^*$ が $\mathcal{O}$ -準同型であるならば, G の $\mathcal{O}$ 上の *Mackey functor* と呼ばれる.

4. 例

Tambara functor の例を述べる.

1. Invariant ring functors

R を可換な G -ring とする. 任意の G -set X に対し X から R への G -map の集合を

$$\tilde{R}(X) = \text{Hom}_G(X, R)$$

とする. H が G の部分群であるならば, $\tilde{R}(G/H)$ は invariant ring R^H と同型である. G -map $f: X \rightarrow Y$ は 3 つの写像を誘導する:

$$\begin{aligned}
f_! : \tilde{R}(X) &\rightarrow \tilde{R}(Y); \varphi \mapsto f_!(\varphi)(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x), \\
f^* : \tilde{R}(Y) &\rightarrow \tilde{R}(X); \psi \mapsto f^*(\psi)(x) = \psi(f(x)), \\
f_* : \tilde{R}(X) &\rightarrow \tilde{R}(Y); \varphi \mapsto f_*(\varphi)(y) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x).
\end{aligned}$$

このとき $\tilde{R}(X)$, $f_!, f^*, f_*$ は Tambara functor $\tilde{R}$ を構成する.

2. Burnside functors.

任意の G -set X に対し $\Omega_+(X)$ を X 上の G -set の同型類 $[A \rightarrow X]$ 全体の集合とする. このとき $\Omega_+(X)$ は圏 $G\text{-set}/X$ の coproducts と products に関する半環である. G -map $f: X \rightarrow Y$ は 3 つの写像を誘導する:

$$\begin{aligned}
f_! : \Omega_+(X) &\rightarrow \Omega_+(Y); [A \xrightarrow{\alpha} X] \mapsto [A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y], \\
f^* : \Omega_+(Y) &\rightarrow \Omega_+(X); [B \rightarrow Y] \mapsto [X \times_Y B \xrightarrow{p_X} X], \\
f_* : \Omega_+(X) &\rightarrow \Omega_+(Y); [A \xrightarrow{\alpha} X] \mapsto [\Pi_f(A) \xrightarrow{\Pi_f \alpha} Y].
\end{aligned}$$

このとき $\Omega_+(X)$, $f_!$, f^* , f_* は semi-Tambara functor Ω_+ を構成する. 例えば以下の図式は $f_* : \Omega_+(X) \rightarrow \Omega_+(Y)$ が monoid 準同型であることを示している.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times_Y \Pi_f A_1 & & \\
 & \swarrow e_1 & \downarrow & \swarrow e_3 & \\
 X & \xleftarrow{\alpha_1} A_1 & \xleftarrow{f_1} A_1 \times_X A_2 & \xleftarrow{f_1} X \times_Y \Pi_f(A_1 \times_X A_2) & \\
 \downarrow f & \swarrow \alpha_2 & \swarrow e_2 & \downarrow f_3 & \\
 Y & \xleftarrow{\alpha_2} A_2 & \xleftarrow{f_2} X \times_Y \Pi_f A_2 & \xleftarrow{f_2} \Pi_f A_1 & \\
 & \swarrow \alpha_3 & \swarrow \Pi_f \alpha_1 & \swarrow \Pi_f \alpha_3 & \\
 & & \Pi_f A_2 & & \Pi_f(A_1 \times_X A_2)
 \end{array}$$

$\Omega(X)$ を $G\text{-set}/X$ の Grothendieck ring とすると, $\Omega(X)$, $f_!$, f^* , f_* は Tambara functor を構成する.

5. CROSSED BURNSIDE RINGS

S を G -monoid, X を G -set とする.

- 圏 $G\text{-xset}/S \times X$ の対象は, $S \times X$ 上の *crossed G -map* (斜 G -写像) $A \xrightarrow{\|\cdot\| \times \alpha} S \times X$ (ただし, $\|\cdot\|$ は weight function と呼ばれる G -map $A \xrightarrow{\|\cdot\|} S$, α は G -map $A \xrightarrow{\alpha} X$). $\|\cdot\| \times \alpha$ を省略して $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ と書く.
- $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ から $B \xrightarrow{\beta} S \times X$ への射 f は G -map $f : A \rightarrow B$ で $\beta f = \alpha$ と $\|f(a)\| = \|a\|$ を満たすものである.

任意の二つの対象 $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ と $B \xrightarrow{\beta} S \times X$ に対し和と積を以下のように定める.

- $(A \xrightarrow{\alpha} S \times X) + (B \xrightarrow{\beta} S \times X) = (A \amalg B \xrightarrow{\alpha \cup \beta} S \times X)$,
- $(A \xrightarrow{\alpha} S \times X) \cdot (B \xrightarrow{\beta} S \times X) = (A \times_X B \xrightarrow{p} S \times X)$, ただし, p はファイバー積, weight function は $\|(a, b)\| = \|a\| \cdot \|b\|$ で定義する.

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring, 以下 CBR と書く) $X\Omega(G, S, X)$ は圏 $G\text{-xset}/S \times X$ の Grothendieck 環として定義する. X が 1 点集合のとき $X\Omega(G, S, X)$ は CBR $X\Omega(G, S)$ ([OY01]) と同型である.

6. CBR AS A GREEN FUNCTOR

Green functor は Mackey functors (とそれらの間の自然変換) の圏の monoid 対象 [ML98, p.75] として定義される. G の $\mathcal{O}$ 上の Green functor $A = (A_!, A^*)$ は, G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor であり, 任意の G -sets X, Y に関する bilinear maps

$$A(X) \times A(Y) \rightarrow A(X \times Y) : (a, b) \mapsto a \times b$$

が以下の条件をみたすものである.

- 二つの G -maps $f : X \rightarrow X'$, $g : Y \rightarrow Y'$ に対し以下の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 A(X) \times A(Y) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y) \\
 A_!(f) \times A_!(g) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow A_!(f \times g) \\
 A(X') \times A(Y') & \xrightarrow{\times} & A(X' \times Y')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A(X) \times A(Y) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y) \\
 A^*(f) \times A^*(g) \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow A^*(f \times g) \\
 A(X') \times A(Y') & \xrightarrow{\times} & A(X' \times Y')
 \end{array}$$

- 三つの G -sets X, Y, Z に対し以下の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} A(X) \times A(Y) \times A(Z) & \xrightarrow{Id \times (\times)} & A(X) \times A(Y \times Z) \\ (\times) \times Id \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \times \\ A(X \times Y) \times A(Z) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y \times Z) \end{array}$$

- $\bullet$ を 1 点集合とする. 任意の G -set X と任意の $a \in A(X)$ に対し, $\varepsilon_A \in A(\bullet)$ が存在し以下の条件をみたす.

$$A_*(p_X)(a \times \varepsilon_A) = a = A_*(q_X)(\varepsilon_A \times a),$$

ただし, $X \times \bullet \xrightarrow{p_X} X$, $\bullet \times X \xrightarrow{q_X} X$ は全単射な射影とする.

Dress 構成を用いた CBR の Green functor は以下の定理として知られている.

Theorem ([Bo03], [OY04])

S を G -monoid, A を Green functor とする. このとき Mackey functor A の S による Dress 構成によって与えられる Mackey functor A_S は Green functor の構造をもつ.

この定理により Burnside Green functor Ω と G -monoid S から Green functor $\Omega_S(= \mathbf{X}\Omega(G, S, *))$ を得る. 特に G -map $f: X \rightarrow Y$ は二つの写像

$$\begin{aligned} f_! : \mathbf{X}\Omega(G, S, X) &\longrightarrow \mathbf{X}\Omega(G, S, Y) : [A \xrightarrow{\alpha} S \times X] \longmapsto [A \xrightarrow{\alpha} S \times X \xrightarrow{1_S \times f} S \times Y], \\ f^* : \mathbf{X}\Omega(G, S, Y) &\longrightarrow \mathbf{X}\Omega(G, S, X) : [B \xrightarrow{\beta} S \times Y] \longmapsto [X \times_Y B \xrightarrow{\| \cdot \| \times pr} S \times X] \end{aligned}$$

(ただし, weight function $\| \cdot \| : X \times_Y B \rightarrow S$ は $\|(x, b)\| = \|b\|$ for $(x, b) \in X \times_Y B$) を誘導する.

7. CBR AS A TAMBARA FUNCTOR

Dress 構成を用いた CBR の Tambara functor の構成を述べる. Green functor の場合とは異なり, G -monoid の可換性が必要である.

S を可換な G -monoid とする. $\cdot : S \times S \rightarrow S$ を積, $\eta : \{1\} \rightarrow S$ を単位射, T を任意の Tambara functor とする. G -set X に対し $T_S(X) = T(S \times X)$ で T_S を定義する. $T_S(X)$ の二項演算 $\cdot_S$ を

$$x \cdot_S x' = (\times 1_X)_!(p_1 \times 1_X)^*(x) \cdot (p_2 \times 1_X)^*(x')$$

で定める. このとき $T_S(X)$ は演算 $\cdot_S$ に関して $(\eta \times 1_X)_!(1)$ を単位元にもつ環となる.

$f : X \rightarrow Y$ を G -map とする. Green functor の場合と同様に $f^* : T_S(Y) \rightarrow T_S(X)$, $f_! : T_S(X) \rightarrow T_S(Y)$ を $(1_S \times f)^*$, $(1_S \times f)_!$ でそれぞれ定める.

写像 $f_* : T_S(X) \rightarrow T_S(Y)$ を定義するため canonical exponential diagram

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{a} & S \times X & \xleftarrow{e} & X \times_Y \Pi_f(S \times X) \\ f \downarrow & & & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{q} & \Pi_f(S \times X) & & \end{array}$$

を作る. $f : \Pi_f(S \times X) \rightarrow S \times Y$ を

$$f(y, f^{-1}(y) \xrightarrow{s} S \times X) = \left(\prod_{x \in f^{-1}(y)} \tilde{s}(x), y \right),$$

(ここで, $\tilde{s}$ は s と射影 $S \times X \rightarrow S$ の合成とする) で与えられる $S \times Y$ 上の G -set とする. このとき $f_* : T_S(X) \rightarrow T_S(Y)$ を合成写像

$$T(S \times X) \xrightarrow{e^*} T(X \times_Y \Pi_f(S \times X)) \xrightarrow{f'_*} T(\Pi_f(S \times X)) \xrightarrow{\mu_{f_!}} T(S \times Y)$$

で定義する.

Theorem ([Tam], [OY11]) S を可換な G -monoid, T を任意の Tambara functor とする. このとき, 上の $T_S(X)$, f^* , $f_!$, f_* は Tambara functor を構成する.

謝辞

柳田伸顕氏からは, 新たな丹原関手の例に関するコメントをいただいた. 佐々木洋城氏からは, 激励をいただいた. 集会の運営に尽力され, 講演の機会を与えてくださった研究代表者のお二人に, 心より感謝申し上げる.

REFERENCES

- [Bo00] S. BOUC, Burnside rings, Handbook of algebra, Vol. 2, 739–804,
- [Bo03] S. BOUC, Hochschild constructions for Green functors, Comm. Algebra **31** (2003) 419–453.
- [Br05] M. BRUN, Witt vectors and Tambara functors, Adv. Math. **193** (2005), 233–256.
- [Dr72] A. W. M. DRESS, Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory, II, 183–240, Lecture Notes in Math., **342**, Springer, Berlin, 1973.
- [El06] J. ELLIOTT, Constructing Witt-Burnside rings, Adv. Math., (2006), 319–363.
- [ML98] S. MAC LANE, Categories for the Working Mathematician, 2nd edition, GTM **5**, Springer, (1998).
- [Na09] H. NAKAOKA, Tambara functors on profinite groups and generalized Burnside functors, Comm. Algebra, **37** (2009), 3095–3151.
- [Na11] H. NAKAOKA, Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction, Adv. Math., **227** (2011), 2107–2143.
- [OY01] F. ODA AND T. YOSHIDA, Crossed Burnside Rings I. The Fundamental Theorem, J. Algebra **236** (2001), 29–79.
- [OY04] F. ODA AND T. YOSHIDA, Crossed Burnside rings II. The Dress construction of a Green functor, J. Algebra **283** (2004), 58–82.
- [OY11] F. ODA AND T. YOSHIDA, The crossed Burnside rings III. The Dress construction for a Tambara functor, J. Algebra **327** (2011), 31–49.
- [Tam] D. TAMBARA, Multiplicative transfer and Mackey functor, unpublished.
- [Ta93] D. TAMBARA, On multiplicative transfer, Comm. Algebra **21** (1993) 1393–1420.
- [TW95] J. THÉVENAZ AND P.J. WEBB, The structure of Mackey functors, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1865–1961.
- [We00] P. WEBB, A guide to Mackey functors, Handbook of algebra, Vol. 2, 805–836,