

# 周期外場下における量子局在現象の振動数依存性

東京大学 工学部 町田 学<sup>1</sup>, 齊藤 圭司, 宮下 精二

## 1 背景

量子系が周期外場の下で時間発展すると、量子力学的な干渉の効果のためにエネルギー拡散が抑えられて局在現象がおけると一般に信じられている。特に、複雑な準位構造をもつ量子系の周期外場下での拡散現象は近年活発に研究されている。ここでいう複雑とは、準位の統計性がランダム行列でよく記述できるという意味である。対応する古典系がカオスであるような量子系のエネルギー準位の統計性はランダム行列でよく記述できることが知られている。[1] このような系は、最初古典系と同じエネルギー拡散を示すが、ある時刻を境にそれが抑制され、いわゆるダイナミカル局在とか量子局在とよばれる現象がおこることが、Kicked Rotator モデル [2] や Kicked Top モデル [3] で知られている。これらは一つの回転子やスピンについてのモデルであり、対応する古典系はカオスを示す。このような量子カオス系の量子局在は、単にモデル上での計算にとどまらず、水素原子やナトリウム原子を用いて実験的にも実現されている。[4] ところが、互いに複雑に相互作用する量子多体系の局在現象についてはまだほとんど調べられていない。このような量子多体系に対するダイナミカル局在・量子局在の、周期外場の振動数に対する依存性を明らかにすることが本稿の主な目的である。そのような量子多体系の代表として、ここではランダム行列からなるハミルトニアンを扱うことにする。時間依存するランダム行列を用いたダイナミクスの研究としては、本稿と視点は違うが関連したものとして他に [5, 6] などがある。

## 2 モデルと方法

次のような、GOE のランダム行列 [1] を用いたハミルトニアンを考える。

$$\mathcal{H}(t) = H_0 + \lambda(t)V \quad (1)$$

$H_0$  と  $V$  は独立に作られた  $N$  次元の GOE のランダム行列であり、その行列要素  $H_{0ij}$ 、 $V_{ij}$  は中心が 0、分散が  $1 + \delta_{ij}$  のガウス分布をする乱数である。 $H_0$  と  $V$  が GOE のランダム行列であるから、全ハミルトニアン  $\mathcal{H}(t)$  も GOE のランダム行列である。ランダ

<sup>1</sup>E-mail: machida@spin.t.u-tokyo.ac.jp

$\mu$ 行列の固有値は縮退を起こさないという特徴がある。 $\mathcal{H}$ の固有値は $\lambda$ の変化に対して敏感に変化し、エネルギー準位は複雑な構造をもつ。図1に、 $N = 500$ の場合の $\lambda$ の関数としての $\mathcal{H}$ の固有値の、スペクトルの中心付近の様子を示す。

さて、初期状態 $|\psi_0\rangle$ は基底状態であるとして、パラメータは $\lambda(t) = A \sin(\omega t)$ , ( $A = 0.5$ )の形で与えることにする。ハミルトニアン $\mathcal{H}(t)$ は周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期関数なので、 $n$ 周期後の状態 $|\psi_n\rangle$ はFloquet演算子 $[7]F$ を用いて $|\psi_n\rangle = F^n|\psi_0\rangle$ と書くことができる。Floquet演算子の固有値を $e^{i\phi_\nu}$ 、固有ベクトルを $|\nu\rangle$ と書くことにする。

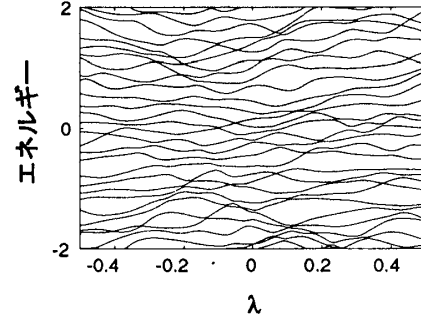


図1: スペクトルの中心付近における、 $\lambda$ の関数としての $\mathcal{H}$ のエネルギー準位の様子 ( $N = 500$ )。

### 3 エネルギー空間での局在

$E_{\text{sat}} \equiv \sum_{\nu} |\langle \nu | \psi_0 \rangle|^2 \langle \nu | H_0 | \nu \rangle$  とすると、 $n$ 周期後の系のエネルギー  $E(n)$  は、

$$E(n) \equiv \langle \psi_n | H_0 | \psi_n \rangle = E_{\text{sat}} + \sum_{\nu < \nu'} \left( e^{in(\phi_{\nu'} - \phi_{\nu})} \langle \psi_0 | \nu \rangle \langle \nu | H_0 | \nu' \rangle \langle \nu' | \psi_0 \rangle + \text{c.c.} \right) \quad (2)$$

と書ける。図2に $E(n)$ の時間発展の様子と対応する $E_{\text{sat}}$ の値(水平線)を、いくつかの $\omega$ について示す。エネルギーの単位は $E = 0$ と $H_0$ の基底状態のエネルギーとの距離が1になるように規格化した。最終的に、系のエネルギーは $E_{\text{sat}}$ のまわりでゆらぐ。そこで、飽和エネルギー $E_{\text{sat}}$ の $\omega$ 依存性に着目する。図3に $\omega$ の関数としての $E_{\text{sat}}$ の値を $N = 256, 500, 700$ のそれぞれの場合について示す。各データはそれぞれ五つのサンプルを平均して得られた。飽和エネルギーの最大値は高温極限に対応する $E = 0$ なので、 $E_{\text{sat}} < 0$ ということは量子的な干渉の効果によって状態がエネルギー空間で局在していることを意味する。

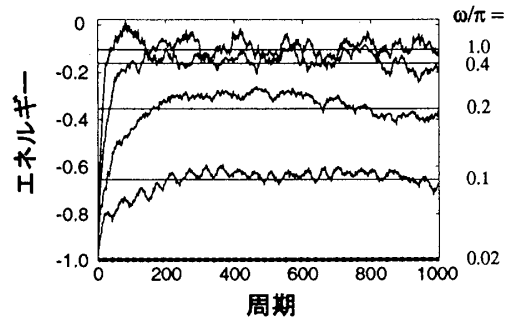


図2:  $N = 500$ のときの $E(n)$ (ジグザグ線)と $E_{\text{sat}}$ (水平線)。 $\omega$ の値は下から順に $0.02\pi, 0.1\pi, 0.2\pi, 0.4\pi, 1.0\pi$ である。

さて、 $\omega \simeq 0.1\pi$ のときには系の状態の変化は隣接二準位間があたかも交差するかのようにならざる非交差点で起こっていることが数値的に確認できた。つまり、ミクロな視点で見ると各非交差点での非断熱遷移の積み重ねでエネルギーの拡散が起こっているのである。非断熱遷移の典型的なものに、二準位系でパラメータを $-\infty$ から $\infty$ まで動かしたときの遷移確率を与えるLandau-Zener公式[8]がある。そこで、各非交差点での遷移がそれぞれ独立にLandau-Zener公式で与えられるとしてみよう。パラメータが単調に増大する場合にはこのアイデアがよい近似を与えることが以前から示唆されている。[6]ところが

今の場合、準位密度の変化も考慮に入れて同様に計算してみると、定常状態では  $E_{\text{sat}} = 0$  となることを示すことができる。[9] つまり、周期外場の場合には量子力学的な位相の干渉の効果が無視できないのである。

量子力学的な干渉の効果で局在がおこる現象としては Anderson 局在 [10] が固体物理の分野でよく知られている。また、Kicked Rotator モデルの場合には量子局在と Anderson 局在とを厳密な形で結びつけることができる。[11] そこで、Anderson 局在からの類推によって今の場合の局在を考えてみる。次のような Anderson 局在のモデルを考える。

$$\mathcal{H}_A = \sum_i v_i |i\rangle\langle i| + t \sum_{\langle i, i' \rangle} |i\rangle\langle i'| \quad (3)$$

ここで、 $|i\rangle$  は粒子が  $i$  番目のサイトにいる状態を表し、 $v_i$  は  $i$  番目のサイトのポテンシャルを表す。ポテンシャルは各サイトごとに幅  $W$  の一様分布をする乱数で与えられる。また、 $t$  は隣接するサイトへの跳躍である。跳躍確率  $p_A$  は  $p_A \sim |t|/W$  で与えられ、従って、最初に 0 番目のサイトにいた粒子が  $m$  番目のサイトにいる確率  $p_A(m)$  は  $p_A(m) \sim p_A^m \sim \exp(-m \log(W/|t|))$  で与えられることが知られている。[12] そこで、(3) の状態  $|i\rangle$  を  $H_0$  の  $i$  番目の固有値だと思ふことにする。そして、隣接準位への遷移確率を  $p_A$  に対応させて  $p_Q$  と書くことにする。

すると、 $m$  番目の準位にいる確率  $p_Q(m)$  は  $p_Q(m) \sim p_Q^m$  と書ける。数値的に調べてみると、 $p_Q(m)$  は実際に指数的に減衰して局在をおこしている。[9]

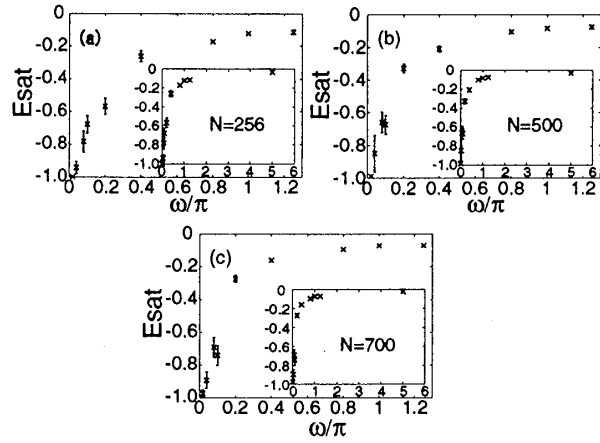


図 3:  $E_{\text{sat}}(\omega)$  ((a)  $N = 256$ , (b)  $N = 500$ , (c)  $N = 700$ ) のプロット。データ点は五つのサンプルから得た平均値、エラーバーはその分散を表す。

## 4 Floquet 空間での局在

前章ではエネルギー空間での局在を論じたが、ここでは Floquet 理論の立場から局在を考えてみる。前章のはじめで述べたように、 $E_{\text{sat}}$  は Floquet 演算子の固有状態と初期状態との重なり  $|\langle \nu | \psi_0 \rangle|^2$  によって決定される。 $|\langle \nu | \psi_0 \rangle|^2$  も  $\nu$  の関数として指数的に減衰することが数値的に確認できる。[9] つまり、Floquet 空間においても局在がおこっているのである。このことは量子局在の重要な特徴のひとつである。

次に、有効な Floquet 状態の数を測る、次のような量  $N_{\text{min}}$  [3] を定義する。

$$N_{\text{min}} = \frac{1}{N} \min \left\{ \mathcal{N}_{\text{min}} : \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}_{\text{min}}} |\langle \psi_0 | \nu \rangle|^2 > r; |\langle \psi_0 | \nu \rangle|^2 \geq |\langle \psi_0 | \nu + 1 \rangle|^2 \right\} \quad (4)$$

ここで、 $r = 0.99$  である。 $N_{\min}$  は初期状態に含まれる Floquet 状態の数の割合を表す指標である。図 4 に  $N_{\min}$  を  $\omega/\pi$  の関数として示す。 $N_{\min}(\omega)$  は  $N_{\min}(\omega) = N_{\min}^* \left\{ 1 - \frac{1}{[(\omega/\omega^*)^a + 1]^b} \right\}$  という関数でよく表されることがわかる。パラメータの値は、例えば  $N = 500$  の場合は、 $N_{\min}^* = 0.80$ ,  $a = 2.6$ ,  $b = 0.47$ ,  $\omega^* = 0.10$  となる。また、今考えている  $\omega < 0.2\pi$  の範囲、つまり系の状態の遷移が隣接準位への非断熱遷移でおこる範囲では、 $N_{\min} \propto \omega$  の関係があることが分かる (図 4 の点線)。

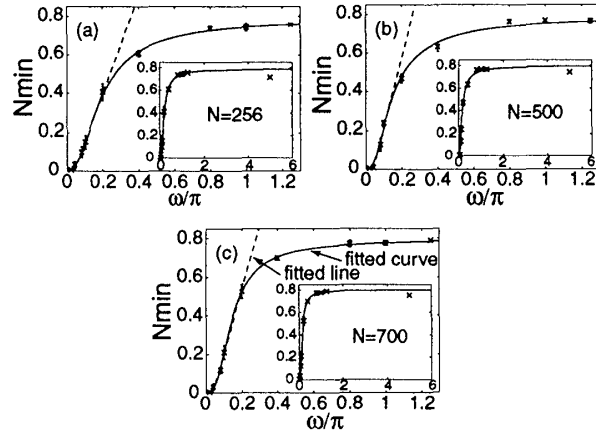


図 4:  $\omega/\pi$  の関数としての  $N_{\min}$  の図 ( (a)  $N = 256$ , (b)  $N = 500$ , (c)  $N = 700$  )。データ点は五つのサンプルからの平均値、エラーバーはその分散を表す。実線はフィッティング曲線。また、 $\omega < 0.2\pi$  では  $N_{\min}$  は  $\omega$  に比例している。

## 5 実効的な Landau-Zener 型遷移の証拠

ここまで我々は、今のランダム行列の系ではエネルギー空間での局在と Floquet 空間での局在の両方がおこることを示し、それらについて論じた。この章ではそれらをふまえ、系のエネルギー拡散・局在をミクロな視点から考え、非交差点での非断熱遷移の際に、ある「実効的」な意味での Landau-Zener 型の遷移が存在することを述べる。

まず、ある関数  $\Gamma(\omega)$  を導入して、 $p_Q \sim \exp[-\Gamma^{-1}(\omega)]$  と書く。すると、 $p_Q(m)$  は  $p_Q(m) \sim p_Q^m \sim \exp[-\Gamma^{-1}(\omega)m]$  と書かれるので、 $\Gamma(\omega)$  はエネルギー空間での局在長になっていることが分かる。これに対し、 $|\langle \nu | \psi_0 \rangle|^2 \propto e^{-\nu/\ell}$  として Floquet 空間での局在長  $\ell$  を導入する。このとき、 $\ell$  と  $N_{\min}$  には定義 (4) より、 $N_{\min} \propto \ell$  の関係がある。ところで前章の数値計算の結果から  $N_{\min} \propto \omega$  だったので、結局  $\ell \propto \omega$  の関係があることがわかる。さて、量子局在を起こす系の典型である Kicked Rotator モデルの場合には、二つの局在長  $\Gamma$  と  $\ell$  は等しい。[13] そこで、今の場合も  $\Gamma \propto \ell$  を仮定すると、比例係数を  $1/h$  とし、 $\Gamma(\omega) = \omega/h$  と書けることになる。このことは、

$$p_Q \sim \exp \left[ -\frac{h}{\omega} \right] \quad (5)$$

を意味するが、 $\omega$  がパラメータ  $\lambda$  の掃引速度を与えることを考えれば、これはまさに Landau-Zener 公式の形をしている。これより、今の場合に量子力学的な位相の干渉の効果が重要なのは間違いないが、それにもかかわらず実効的なミクロの遷移確率は Landau-Zener 型の遷移として与えられることがわかった。

## 謝辞

この研究は文部科学省の科研費の補助を受けて行われた。また、この研究で行った数値計算の一部は物性研のスーパーコンピュータを用いて行われた。

## 参考文献

- [1] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 2001) 2nd ed. ; H. -J. Stöckmann, *Quantum Chaos* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999). ; M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, California, 1991) 2nd ed.
- [2] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev, *Lecture Notes Phys.* **93** (1979), 334.
- [3] F. Haake, M. Kus, and R. Scharf, *Z. Phys. B* **65** (1987), 381.
- [4] E. J. Galvez, B. E. Sauer, L. Moorman, P. M. Koch, and D. Richards, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), 2011. ; J. E. Bayfield, G. Casati, I. Guarneri, and D. W. Sokol, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989), 364. ; M. Arndt, A. Buchleitner, R. N. Mantegna, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 2435. ; F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), 2974. ; G. P. Collins, *Phys. Today* **48** (1995), 18.
- [5] D. Cohen and T. Kottos, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 4839. ; A. Bulgac, G. D. Dang, and D. Kusnezov, *Phys. Rev. E* **54** (1996), 3468.
- [6] M. Wilkinson, *J. Phys. A* **21** (1988), 4021. ; M. Wilkinson, *Phys. Rev. A* **41** (1990), 4645.
- [7] G. Floquet, *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.* **XII** (1883), 47.
- [8] L. Landau, *Phys. Z. Sowjun.* **2** (1932), 46. ; C. Zener, *Proc. R. Soc. London* **A137** (1932), 696. ; E. G. C. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta.* **5** (1932), 369.
- [9] M. Machida, K. Saito, and S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002), 2427.
- [10] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109** (1958), 1492.
- [11] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), 509. ; D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman, *Phys. Rev. A* **29** (1984), 1639.
- [12] Y. Nagaoka, *Prog. Theor. Phys.* **84** (1985), Suppl, 1.
- [13] T. Dittrich and R. Graham, *Ann. Phys.* **200** (1990), 363.