

集合演算による木オートマトン で受理される木の集合の特性化

東北大 通研 小島 政明
本多 波雄

§1. 序

有限オートマトンの拡張である木オートマトンは、多くの研究者によっていろいろな形で定義され、その性質が調べられている。^{(1),(2),(3)} Thatcher と Wright は階層的アルファベットの上で木を定義し、その木を入力とする木オートマトンを定義している。⁽³⁾ (一般に、木オートマトンの代数的性質は有限オートマトンのそれとよく似ているが、この種の木オートマトンの場合にその類似性が最も著しい。) 特に、正規集合の概念を彼らの定義した木の集合の上に拡張していることは興味深い。

本稿では、一般的アルファベットの上で木を定義し、その木を入力とする“有限指定木オートマトン”と呼ぶ木オートマトンを定義する。(この木オートマトンは著者がさきに定義した文脈規定形木オートマトンの部分クラスである。⁽⁵⁾) さらに、

2重名前付木と呼ぶある種の木を定義し、その集合の上に“和”，“木連接”および“木スター”と呼ぶ演算を定義する。そして、既約有限指定木オートマタによって受理される木の集合のクラスと、2重名前付木の集合のクラスですべての有限集合を含み、和，木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスのプロジェクトションとが一致することを示す。ここに、プロジェクトションとは木の名前のつけかえを指定する写像である。

§2. 有限指定木オートマトン

この節では、一般の有限アルファベットの上で木を定義し、その木を入力とする有限指定木オートマトンを定義する。

(定義)⁽²⁾ Δ を有限アルファベットとする。 Δ の上の木とは写像 $t: N \rightarrow \Delta$ である。ここに、 N は次の2つの条件を満たす I^* の有限部分集合であり、 I は非負整数の集合である。

1. $n \in N$ かつ $n = n_1 n_2$ ならば $n_1 \in N$ ，ここに

$$n, n_1, n_2 \in I^*$$

2. $n_j \in N$ かつ $i \leq j$ ならば $n_i \in N$ ，ここに

$$n \in I^*, i, j \in I$$

Δ の上の木の集合を T_Δ で表わし、 T_Δ の部分集合のクラスを $\mathcal{T}_\Delta$ で表わす。

(定義) $t: N \rightarrow \Delta$ を Δ の上の木とする. N の要素 n を節といい, $t(n)$ を節 n の名前という. $n_0 \in N$ のとき, 節 n を非終端節といい, $n_0 \notin N$ のとき, 節 n を終端節という. また, $t(\lambda)$ を木 t のトップ名前といい, n が終端節のとき, $t(n)$ を木 t のボトム名前という. さらに, 終端節 $n = i_1 i_2 \dots i_k$ について $\{i_1 \dots i_j \mid 0 \leq j \leq k\}$ をパスといい, $\text{path}(n)$ とかく. (λ は長さ零のストリングである.)

(定義) Δ の上の木 $t: N \rightarrow \Delta$ の終端節を $n_1, n_2, \dots, n_k$ とする. クロスカットセットとは次の条件を満たす節の集合 C である.

すべての j ($1 \leq j \leq k$) について, $C \cap \text{path}(n_j)$ は唯一個の節より成る.

(定義) $t: N \rightarrow \Delta$ を Δ の上の木とする. 節 $n = i_1 \dots i_r$, $m = j_1 \dots j_s$ について

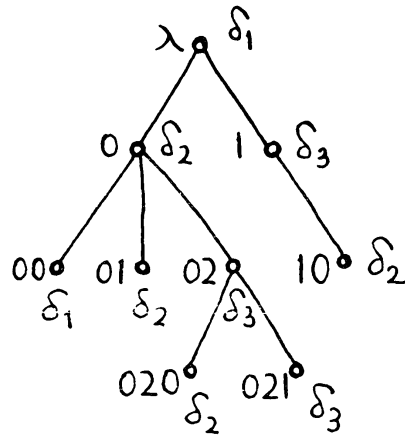
1. ある k が存在して $i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k < j_k$ または

2. $i_1 = j_1, \dots, i_r = j_r$ かつ $r < s$

のとき, n は m より小さいといい, $n < m$ とかく.

以下の議論において, 節の集合を $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ とかいたとき, 特にことわらない限り, $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ とする.

これらの定義で述べた概念の例を図1. に示す.



非終端節: $\lambda, 0, 02, 1$

終端節: $00, 01, 020, 021, 10$

パスの例: $\text{path}(020) = \{\lambda, 0, 02, 020\}$

クロスカットセットの例:

$$\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

$$C = \{00, 01, 02, 1\}$$

$$N = \{\lambda, 0, 00, 01, 02, 020, 021, 1, 10\}$$

$$\text{節の大小: } \lambda < 0 < 00 < 02, 020, 021, 1, 10 \dots < 10$$

図1. 木 $t: N \rightarrow \Delta$ ($t(\lambda) = \delta_1, t(0) = \delta_2, \dots, t(10) = \delta_2$)

次に, ここで定義した木を入力とする有限指定木オートマトンを定義する.

(定義) 有限指定木オートマトンは4項系列 $M = \langle \Delta, P, \tau, P_F \rangle$ である. ここに, Δ は有限アルファベット, P は状態の有限集合, P_F は P の部分集合で最終状態の集合, τ は Δ から $P^* \times P$ の有限部分集合のクラスへの写像で, Δ の各要素 δ について $\tau(\delta)$ を δ に関する状態推移関係という.

このオートマトンは Δ の上の木を入力とするオートマトンであり, Δ の各要素 δ について $\tau(\delta)$ が $P^* \times P$ の有限部分集合であるから, 有限指定木オートマトンという名前を与えた.

以下本稿で木オートマトンというのは有限指定木オートマトンのことである。なお、このオートマトンは一般に非決定性である。

次に、このオートマトンの動作を定義する。

(定義) $M = \langle \Delta, P, f, P_f \rangle$ を木オートマトン, $\tau: N \rightarrow \Delta$ を Δ の上の木とする。

1. $C = \{n_1, \dots, n_k\}$ を τ のクロスカットセットとし,

$$U_C = \{n \in N \mid \exists m \in I^* - \{\lambda\}, nm \in C\}$$

$$L_C = \{n' \in N \mid \exists m' \in I^*, n' \in C\{m'\}\}$$

とする。(図1.の τ と C については, $U_C = \{\lambda, 0\}$, $L_C = \{00, 01, 02, 020, 021, 1, 10\}$ である。) L_C の各要素に P の要素が割り当てられ, U_C の各要素に P の要素が割り当てられていない状況をコンフィギュレーションという。

2. $n \in N$ について, $\{n_0, \dots, n_j\} \subset N$ かつ $n(j+1) \notin N$ のとき, $\{n_0, \dots, n_j\}$ を節 n のサクセサーといい, $S(n)$ で表わす。いま, $C = \{n_1, \dots, n_k\}$ をクロスカットセットとするコンフィギュレーションにおいて n_i , $1 \leq i \leq k$, に割り当てられている P の要素を p_i とする。このコンフィギュレーションを α とする。 α において, ある節 n について $S(n) \cap C = S(n) = \{n_i, \dots, n_{i+j}\}$ であり, $\tau(n) = \delta$ について $f(\delta) \ni (p_i \dots p_{i+j}, p)$ があるとき, M はコン

フィギュレーション a から次に示すコンフィギュレーション b に推移することができ、ここに、 b はクロスカットセットとして $C' = \{n_1, \dots, n_{i-1}, n, n_{i+j+1}, \dots, n_k\}$ をもち、 n には p が割り当てられ、 n 以外の $L_{C'}$ の各要素には a において割り当てられていた P の要素が割り当てられていて、 $U_{C'}$ の各要素には P の要素が割り当てられていないコンフィギュレーションである。 a から b への推移を $a \Vdash b$ とかき、 $\Vdash$ の反射推移閉包を $\Vdash^*$ で表わす。

3. t の終端節の集合を $C_0 = \{n_{01}, \dots, n_{0k(0)}\}$ とし、各 n_{0i} , $1 \leq i \leq k(0)$, について $t(n_{0i}) = \delta_{0i}$ とする。

$f(\delta_{0i}) \ni (\lambda, p_{0i})$ であれば n_{0i} に p_{0i} を割り当てる。

このようにして t のすべての終端節に状態を割り当てることを初期推移といい、初期推移によって得られるコンフィギュレーション a_0 を初期コンフィギュレーションという。このことを $t \Vdash a_0$ で表わす。

4. クロスカットセットとして $C_r = \{\lambda\}$ をもち、 λ に P_f の要素が割り当てられているコンフィギュレーションを最終コンフィギュレーションという。

5. M に t を入力したとき、 $t \Vdash a_0 \Vdash^* a_r$ であるならば t は M によって受理されるという。ここに、 a_0 は初期コンフィギュレーション、 a_r は最終コンフィギュレーションである。

(定義) 木オートマトン M によって受理される木の集合を $A(M)$ で表わす. 木の集合 T がある木オートマトン M について $T = A(M)$ となるとき, T を木オートマトンによって受理可能であるという. 木オートマトンによって受理可能な T_Δ の部分集合のクラスを $\mathcal{A}_\Delta$ で表わす.

以下本稿で受理可能というのは木オートマトンによって受理可能のことである.

次に, 木オートマトンの既約形を定義する.

(定義) 木オートマトン $M = \langle \Delta, P, \tau, P_F \rangle$ は, 各 $p \in P$ についてある $\sigma: N \rightarrow \Delta$ が存在して, 初期推移が可能で, 初期コンフィギュレーションから入に p が割り当てられているコンフィギュレーションにいたる推移の系列が存在するとき, ボトム既約であるといわれる.

(定義) 木オートマトン $M = \langle \Delta, P, \tau, P_F \rangle$ は, 各 $p \in P$ についてある $\sigma: N \rightarrow \Delta$, $x_1, x_2 \in P^*$ が存在して, σ の終端節の集合に x_1 かつ x_2 が割り当てられているコンフィギュレーションから最終コンフィギュレーションにいたる推移の系列が存在するとき, トップ既約であるといわれる.

〔命題1〕 かつたな木オートマトン M から $A(M) = A(M_1)$ であるようなボトム既約木オートマトン M_1 を効果的に構成することができる. (証明略)

〔命題 2〕 かつたなボトム既約木オートマトン M_1 から $A(M_1) = A(M_2)$ であるようなボトム既約かつトップ既約である木オートマトン M_2 を効果的に構成することができる。

(証明略)

(定義) 木オートマトン M がボトム既約かつトップ既約であるとき, M を既約であるという。

命題 1, 2 により, 以下の議論において木オートマトンというときは, 特にことわらない限り, 既約木オートマトンをさすことにして一般性を失わない。

次に, プロジェクションと呼ぶ写像を定義する。

(定義)⁽²⁾ Δ_1, Δ_2 をアルファベットとする。写像 $\tau: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ を次に示す方法で拡張した写像 $\tau: T\Delta_1 \rightarrow T\Delta_2$ をプロジェクションという。

$t: N \rightarrow \Delta_1$ のとき, $\tau(t): N \rightarrow \Delta_2$ は $\tau(t)(n) = \tau(t(n))$ で定義される Δ_2 の上の木である。

また, $T \subset T\Delta_1$ のとき, $\tau(T) = \{\tau(t) \mid t \in T\}$ を τ による T のプロジェクションという。

〔命題 3〕 木の集合 T が受理可能であるとき, T のプロジェクションもまた受理可能である。(証明略)

§3. 2重名前付木とその集合の上の演算

Σ を有限アルファベット, Q を可付番無限アルファベットとし, Σ の要素を σ , Q の要素を q などで表わす.

(定義) $Q \times \Sigma$ の上の 2 重名前付木は写像 $t: N \rightarrow Q \times \Sigma$ である. ここに, N は §2. の木の定義に用いられた N と同様の集合である.

$Q \times \Sigma$ の上の 2 重名前付木の集合を $T_{Q \times \Sigma}$ で表わし, $T_{Q \times \Sigma}$ の部分集合のクラスを $\mathcal{T}_{Q \times \Sigma}$ で表わす.

次に, $\mathcal{T}_{Q \times \Sigma}$ の上に 3 つの演算を定義する.

(定義) $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{Q \times \Sigma}$ とする.

1. 和 $T_1 \cup T_2$ これは通常の意味の和集合の演算である.

2. 木連接 $T_1 \circ T_2$ これは次のように定義される.

$$t: N \rightarrow Q \times \Sigma \in T_1 \circ T_2$$

$\Leftrightarrow \exists t_1: N_1 \rightarrow Q \times \Sigma \in T_1$, t_1 の終端節の集合を $\{n_1, \dots, n_k\}$

とし, $t_1(n_i) = (q_i, \sigma_i)$, $1 \leq i \leq k$, とすると,

$n_1, \dots, n_k$ のうち $n_{j_1}, \dots, n_{j_m}$; $m \geq 1$, について

$\exists t_{2j_1}: N_{2j_1} \rightarrow Q \times \Sigma \in T_2$, $\dots$, $\exists t_{2j_m}: N_{2j_m} \rightarrow Q \times \Sigma \in T_2$,

$t_{2j_i}(\lambda) = (q_{ji}, \sigma_{ji})$, $1 \leq i \leq m$, であり

かつ $n_{j_1}, \dots, n_{j_m}$ 以外の $\{n_1, \dots, n_k\}$ の各要素 n_i

については $t_{2i}(\lambda) = (q_i, \sigma_i)$ であるような t_{2i}

が T_2 の中には存在しない. この $t_1, t_{2j_1}, \dots, t_{2j_m}$

について

$N = (N_1 - \{n_{j_1}, \dots, n_{j_m}\}) \cup n_{j_1} N_{2j_1} \cup \dots \cup n_{j_m} N_{2j_m}$
 であり

$n \in N_1 - \{n_{j_1}, \dots, n_{j_m}\}$ のとき $t(n) = t_1(n)$

$n \in N_{2j_i}, 1 \leq i \leq m$, のとき $t(n_{j_i} n) = t_{2j_i}(n)$
 である.

すなわち, $T_1 \circ T_2$ は, T_1 に属する木でボトム名前の中に少くとも1個は T_2 に属する木のトップ名前であるものが存在するような木について, ボトム名前が T_2 に属する木のトップ名前であるすべての終端節にそのボトム名前に等しいトップ名前をもつ T_2 に属する木をつけ加えて得られる木の集合である.

3. 木スター $T_1^{\otimes}$ これを定義するために, まず, 選択的木連接 $T_1 \odot T_2$ を次のように定義する.

$$t: N \rightarrow Q \times \Sigma \in T_1 \odot T_2$$

$\Leftrightarrow \exists t_1: N_1 \rightarrow Q \times \Sigma \in T_1$, t_1 の終端節の集合を $\{n_1, \dots, n_k\}$

とし, $t_1(n_i) = (q_i, \sigma_i)$, $1 \leq i \leq k$, とすると,

$n_1, \dots, n_k$ のうち $n_{j_1}, \dots, n_{j_m}$, $m \geq 0$, について

$\exists t_{2j_1}: N_{2j_1} \rightarrow Q \times \Sigma \in T_2, \dots, \exists t_{2j_m}: N_{2j_m} \rightarrow Q \times \Sigma \in T_2$,

$t_{2j_i}(\lambda) = (q_{j_i}, \sigma_{j_i})$, $1 \leq i \leq m$, である. この t_1 ,

$t_{2j_1}, \dots, t_{2j_m}$ について

$N = (N_1 - \{n_{j_1}, \dots, n_{j_m}\}) \cup n_{j_1} N_{2j_1} \cup \dots \cup n_{j_m} N_{2j_m}$
 であり

$n \in N_1 - \{n_{j_1}, \dots, n_{j_m}\}$ のとき $t(n) = t_1(n)$

$n \in N_{2j_i}, 1 \leq i \leq m$, のとき $t(n_{j_i}, n) = t_{2j_i}(n)$

である。

すなわち, $T_1 \odot T_2$ は, T_1 に属する木のいくつかの終端節にそのボトム名前に等しいトップ名前をもつ T_2 に属する木をつけ加えて得られる木の集合である。

この選択的木連接について,

$$T_1^1 = T_1, \quad T_1^i = T_1^{i-1} \odot T_1 \quad (i \geq 2)$$

と定義する。この定義を用いて木スターを

$$T_1^{\otimes} = \bigcup_{i \geq 1} T_1^i$$

と定義する。

木連接および選択的木連接の例を図2. に示す。

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{c} | \\ d \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \quad b \end{array} \right\} \quad T_2 = \left\{ \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \end{array}, \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \end{array}, \begin{array}{c} b \\ | \\ \quad \quad \quad \end{array} \right\}$$

$$T_1 \circ T_2 = \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \quad b \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \quad b \end{array} \right\}$$

$$T_1 \odot T_2 = \left\{ \begin{array}{c} | \\ d \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \quad b \end{array}, \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \end{array}, \begin{array}{c} a \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \end{array}, \begin{array}{c} b \\ | \\ \quad \quad \quad \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \quad b \end{array} \right\} \cup T_1 \circ T_2$$

図. 2.

(定義) $\mathcal{T}_{Q \times \Sigma}$ の部分クラスで, すべての有限集合を含み, 和, 木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスを $\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ で表す.

帰納法を用いて次の命題を示すことができる.

〔命題 4〕 かつまた $T_1 \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ について, Q のある有限部分集合 Q_1 が存在して, $T_1 \in \mathcal{T}_{Q_1 \times \Sigma}$ である.

この命題によって, $\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ に属する集合を通常の意味の木の集合と考えてよいことがわかる.

§ 4. A_Σ の特性化

この節では, §3 において定義した $\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ を用いて A_Σ (木オートマトンによって受理可能な T_Σ の部分集合のクラス) の特性化を行う.

〔補題 5〕 $T_1 \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ が有限集合であるとき, T_1 は受理可能である.

(証明) 明らかである.

〔補題 6〕 $T_1, T_2 \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ が受理可能のとき

1. $T_1 \cup T_2$, 2. $T_1 \circ T_2$, 3. T_1^*

はそれぞれ受理可能である.

(証明) $T_1 = A(M_1)$, $M_1 = \langle Q_1 \times \Sigma, P_1, f_1, P_{F_1} \rangle$
 $T_2 = A(M_2)$, $M_2 = \langle Q_2 \times \Sigma, P_2, f_2, P_{F_2} \rangle$ とする.

一般性を失うことなく $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ と仮定してよい.

1. $M_3 = \langle \Delta_3, P_3, f_3, P_{F_3} \rangle$ を次のようにつくる.

$$\Delta_3 = (Q_1 \times \Sigma) \cup (Q_2 \times \Sigma), \quad P_3 = P_1 \cup P_2, \quad \text{各 } \delta \in \Delta_3$$

$$\text{について } f_3(\delta) = f_1(\delta) \cup f_2(\delta), \quad P_{F_3} = P_{F_1} \cup P_{F_2}$$

M_3 のつくり方から $A(M_3) = T_1 \cup T_2$ である.

2. $M_4 = \langle \Delta_4, P_4, f_4, P_{F_4} \rangle$ を次のようにつくる.

$$\Delta_4 = (Q_1 \times \Sigma) \cup (Q_2 \times \Sigma), \quad P_4 = P_1 \cup P'_1 \cup P_2$$

(ここに, $P'_1 = \{p'_1 \mid p_1 \in P_1\}$ であり, $P'_1 \cap P_1 = \emptyset$ とする.) , $P_{F_4} = P'_{F_1}$, 各 $\delta \in Q_2 \times \Sigma$ について $f_4(\delta) \supset f_2(\delta)$ とする. 各 $\delta \in Q_1 \times \Sigma$ について, $f_1(\delta) \ni (x, p_1)$, x キ入のとき, すべての可能な (x'', p'_1) (ここに, x'' は x の中のいくつかの要素を対応する P'_1 の要素でおきかえて得られるストリングであり, p'_1 は x'' が x に等しいとき p_1 に等しく, x'' が x に等しくないときは p'_1 に等しい) について $f_4(\delta) \ni (x'', p'_1)$ とする. さらに,

$$\Delta_1 = \{ \delta \in Q_1 \times \Sigma \mid \exists p_1 \in P_1, f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1) \}$$

$$\Delta_2 = \{ \delta \in Q_2 \times \Sigma \mid \exists y \in P_2^*, \exists p_{F_2} \in P_{F_2}, f_2(\delta) \ni (y, p_{F_2}) \}$$

と定義する. (Δ_1 は $Q_1 \times \Sigma$ のうちで T_1 の木のボトム名前になり得る要素の集合であり, Δ_2 は $Q_2 \times \Sigma$ のうちで T_2 の木のトップ名前になり得る要素の集合である.) 各 $\delta \in \Delta_1 - \Delta_2$ について, $f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$ のとき $f_4(\delta) \ni$

(λ, p_1) とする. 各 $\delta \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ について, $f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$, $f_2(\delta) \ni (y, p_{F_2})$ のとき $f_4(\delta) \ni (y, p_i)$ とする.

M_1, M_2 が既約であることに注意すれば, 木連接の定義と M_4 のつくり方から $A(M_4) = T_1 \circ T_2$ であることがわかる.

3. $M_5 = \langle \Delta_5, P_5, f_5, P_{F_5} \rangle$ を次のようにつくる.

$\Delta_5 = Q_1 \times \Sigma$, $P_5 = P_1$, $P_{F_5} = P_{F_1}$, 各 $\delta \in Q_1 \times \Sigma$ について $f_5(\delta) \supset f_1(\delta)$ とし, さらに, $f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$, (x, p_{F_1}) (ここに, $x \in P_1^*$, $p_{F_1} \in P_{F_1}$) のとき $f_5(\delta) \ni (x, p_1)$ とする.

M_5 のつくり方から $A(M_5) = T_1^{\otimes}$ である. (証明終)

補題 5, 6 を用いて帰納法で次の定理を示すことができる.

[定理 7] $\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ に属するかつてな集合は受理可能である.

(定義) $\pi(q, \sigma) = \sigma$ で指定される $Q \times \Sigma$ から Σ への写像を $T_{Q \times \Sigma}$ から T_Σ への写像に拡張したプロジェクションを π とする. さらに, $\pi(\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}) = \{ \pi_1(T_1) \mid T_1 \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma} \} = \mathcal{C}_\Sigma$ と定義する. ここに, $T_1 \subset T_{Q_1 \times \Sigma}$ (命題 4) とし, π_1 は π の定義域を $T_{Q_1 \times \Sigma}$ に制限したプロジェクションとする.

命題 3 および定理 7 より次の定理を得る.

[定理 8] $\mathcal{C}_\Sigma \subset \mathcal{A}_\Sigma$

次に, 定理 8 の逆を示す.

(定義) $M = \langle \Sigma, P, f, P_f \rangle$ を木オートマトンとする.
 一般性を失うことなく P は Q の有限部分集合とすることがで
 きるから, $P = \{q_1, \dots, q_r\} = Q_1 \subset Q$ とする. 各 $i \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{0, 1, \dots, r\}$, $S \subset \{1, \dots, r\}$ について, $T_{P \times \Sigma}$
 の部分集合 $T_{S,i}^{(k)}$ を次のように定義する.

$$t: N \rightarrow P \times \Sigma \in T_{S,i}^{(k)}$$

$\iff \exists t_1: N \rightarrow \Sigma \in T_\Sigma$, t_1 の終端節の集合 $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ の
 各要素 n_k に q_{j_k} , $j_k \in S$, が割り当てられているコンフィギ
 ュレーションから, λ に q_i が割り当てられ $N - \{\lambda\} -$
 $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ の各要素には $\{q_1, \dots, q_k\}$ の要素が割り当
 てられているコンフィギュレーションに $\models$ の意味で到
 達可能であり, 各節に, このコンフィギュレーションに
 おいて割り当てられている状態と名前を対にして名前づ
 けた 2 重名前付木が t である.

さらに, $t_1 \in T_\Sigma$ のすべての節に状態が割り当てられているコ
 ンフィギュレーション α をフルコンフィギュレーションとい
 い, 各節にこのフルコンフィギュレーションにおいて割り当
 てられている状態と名前を対にして名前づけた 2 重名前付
 木を τ とする. M におけるフルコンフィギュレーションの集
 合から $T_{P \times \Sigma}$ への写像 τ_M を $\tau_M(\alpha) = \tau$ で定義する.

さらに, τ_M を用いて, A_Σ から $\mathcal{T}_{Q \times \Sigma}$ への写像 μ を

$\mu(A(M)) = \{ \tau_M(a_u) \mid \exists t \in T_\Sigma, t \Vdash_M a_0 \Vdash_M^* a_u, a_0 \text{ は初期コンフィギュレーション, } a_u \text{ は最終コンフィギュレーション} \}$ で定義する.

次の補題は明らかに成り立つ.

[補題 9] $\mu(A(M)) \subset T_{Q_1 \times \Sigma}$ であり, $\pi_1[\mu(A(M))] = A(M)$ である.

[補題 10] $M = \langle \Sigma, P, f, P_F \rangle$ を木オートマトンとする. このとき, $\mu(A(M)) \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ である.

(証明) $P = \{q_1, \dots, q_r\} = Q_1 \subset Q$ とする. 各 $i \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $S \subset \{1, \dots, r\}$ について

$$T_{S,i}^{(k)} = T_{S,i}^{(k-1)} \cup T_{S \cup \{k\},i}^{(k-1)} \circ (T_{S \cup \{k\},k}^{(k-1)})^* \circ T_{S,k}^{(k-1)} \quad (1)$$

とかくことができる. (ここで, $S \ni i$ のときには, 各 $\sigma \in \Sigma$ について $T_{S,i}^{(k)} \ni t: \{\lambda\} \rightarrow Q_1 \times \Sigma$ ($t(\lambda) = (q_i, \sigma)$) であることに注意する.) さらに, 各 $i \in \{1, \dots, r\}$, $S \subset \{1, \dots, r\}$ について

$$T_{S,i}^{(0)} \text{ は有限集合である.} \quad (2)$$

よって, ①, ②より帰納法で, 各 $i \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{0, 1, \dots, r\}$, $S \subset \{1, \dots, r\}$ について $T_{S,i}^{(k)} \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ であることが示される.

さらに, $\mu(A(M)) = \bigcup_{q_i \in P_F} T_{S_0,i}^{(r)}$ (ここに, $S_0 = \{j \mid \exists \sigma \in \Sigma, f(\sigma) \ni (\lambda, q_j)\}$) であることに注意す

れば補題を得る。(証明終)

補題 9, 10 より次の定理を得る.

[定理 11] $A_{\Sigma} \subset C_{\Sigma}$

定理 8 および定理 11 から次の主要な定理を得る.

[定理 12] T_{Σ} の部分集合は, 名前の第 2 要素に Σ の要素をもつ 2 重名前付木の集合のクラスですべての有限集合を含み, 和, 木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスの元によるプロジェクションに属するとき, かつそのときに限り, 木オートマトンによって受理可能である. ここに, 元は 2 重名前の第 2 要素を改めて名前づけする写像である.

終りに, ご討論いただいた本多研究室ならびに東北大学工学部木村研究室の諸氏に深謝する.

参考文献

- (1) W. S. Brainerd: "The Minimization of Tree Automata", Inf. and Cont. 13, p. 484-491 (1968)
- (2) J. W. Thatcher: "Characterizing Derivation Trees of Context-Free Grammars through a Generalization of Finite Automata Theory", Journal of Com. and Sys. Science, 1, p. 317-322 (1967)

- (3) J.W.Thatcher and J.B.Wright : "Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision Problem of Second-Order Logic", Math. Sys.Theory, 2, p. 57-81 (1968)
- (4) J.E.Hopcroft and J.D.Ullman : "Formal Languages and Their Relation to Automata", Addison-Wesley Pub. Company, London (1969)
- (5) 小島・本多 : "木オートマトンの拡張による文脈規定形文法の導出木の特性化", 信学オートマ・インホ研資 (1972-01)