

磁気流体力学における場の混合と分離

東大 宇宙研 橋本 英典

§1. いとぐち

古典的な流体力学が發展して、化学変化や解離電離の現象を伴うものを取りあつかう必要に迫られると共に種々の他の場—拡散、熱、重力、電磁場などとの相互作用を取りあつかう必要に迫られて来た。こゝに問題となるのは、その相互作用による場の混合である。あるばあい、たとえばパラメタの特別なばあいとか、とりあつかう領域とかによつてはそれから新しい型の場がとり出され、しかもそれが古い場を違った観測からながめたものとなっていることがある。

輻射気体力学を対象とする以上、光子ガス及至は乱れた電磁場の問題を取り上げるべきであるが、こゝでは準静的な磁場とプラスマ、しかもその巨視的なとりあつかいである磁気流体力学における若干の例を挙げて責を果すことにしたい。¹⁻³

さて流体の一部に加えられた攪乱を考えよう。

縮まない流れに対しては、速度 V について

$$\nabla \cdot V = 0$$

が成立し、圧力の攪乱は瞬間的に場々各處に伝わる。一方流れの存在のもとで渦度

$$\omega = \nabla \times V$$

は理想流体においてはヘルムホルツの渦定理の教える通り、流体粒子と共に移動し、攪乱の脊部に *trail* し、粘性の存在の下に拡がって放物状の伴流 (*wake*) を形成する。

圧縮性の存在は有限の速度 a で圧力波が等方的に拡がることを許し、その速度ポテンシャル ϕ は波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0$$

を満足する。ただし

$$V = \nabla \phi, \quad \phi = -\frac{1}{\rho} \int^t \tilde{p} dt$$

で、上つきの $\sim$ は乱されない状態、 $\sim$ は攪乱を示す。一様定常流 U 中 (U 流速、 x は x 方向の単位ベクトル) 中におかれた定常攪乱に対しては $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$ のおきかえから

$$\left(\Delta - M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0, \quad M = U/a \quad (\text{マッハ数})$$

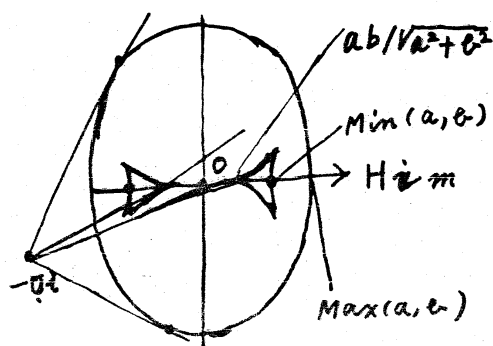
の示すように、 $M < 1$ に対しては一面すべての方向に伝わる攪乱 (だ円型攪乱) も $M > 1$ では双曲型攪乱として半頂角 $\sin^{-1}(1/M)$ の正 x 軸を軸とするマッハ円錐の内部に限られることは、実源から出発し、中心が U の速度で進行する半径 at

の球面波が包絡面を持つことによつて解釋できる。

一方純電磁場の方では光速に比べておそい現象は準定常現象であつて、何等面白い現象は見られないが一樣な磁場 H_m の存在の下に電導性流体が共存すると、磁場を横切る流体に生じる起電力と、電流と磁場の相互作用によつてアルフベンの波を生じる。これは流体が圧縮されず電気抵抗が無視されるばあいには、 μH^2 という張力 (μ は透磁率) を持つ磁力線が固着した密度 ρ の流体のために線密度 ρ を與えられて行かう横振動と解釋され、伝播速度

$$b = \sqrt{\mu H^2 / \rho}$$

を持つ。これは極めて非等方的な波で、実源 O から出た波は O を通り H_m に平行な直線上 (正および負の方向) にしか伝播しない。流体が圧縮を受ければ音波とアルフベン波が相互作用するためアルフベン波の他に両者が助けあつた速い波と、さまたげ合つたおそい波の二つが発生し、実源 O から出た波については單位時間後にはフリードリックスの群速度ダイ



アグラムに示すような波面を形成する。(H_m に平行な軸のまわりに迴転対稱、軸を通る切口を示す)。外側の凸曲面が速い波、内側のカスパ状の二つの

曲面がおそい波であり、アルフベン波は $H \pm m$ 軸上, $\pm c \pm m$ の2点となる。一樣流 U が存在するときのマッハ錐は、 U から、これらの曲面に接平面を作ることによって得られる。

§ 2. 縮まない非定常流における Far field

$a \rightarrow \infty$ とみなせるので遠い波は無限遠に行ってしまう。おそい波は縮少して純アルフベン波 $\pm c \pm m$ と一致する ($a c \div \sqrt{a^2 + c^2} \rightarrow c$ に注意)。速度 V , 長さ X , 時間 t , 磁場 H 単位として D, L, T, H をとって無次元化すれば場の方程式は、

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.1) \quad \nabla \cdot H = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\nabla p + c^2 (H \cdot \nabla) V + F_e + \nu \Delta V \quad (2.3)$$

$$\frac{DH}{Dt} = (H \cdot \nabla) V + V + \nu_m \Delta H \quad (2.4)$$

ただし D/Dt はラグランジュ微分、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \quad (2.5)$$

の形に書ける。ただし p は磁気圧とこめた圧力, F_e は外力, ν, ν_m は粘性率, 磁気粘性率に比例し D, L に逆比例する定数でそれぞれ, レイノルズ数, 磁気レイノルズ数と呼ばれる。

いま一樣磁場 $\hat{m}$, 一樣流の存在のもとに原点におかれた物体が、遠い所に生じる擾乱を R_e はレイノルズ数, ν' は動粘性率, η は電気伝導度, R_m は磁気レイノルズ数をあらわす。また F_e は場に対する外力をあらわす。

いま一様磁場 $\vec{e}_m$ (単位ベクトル), 一様流 $\vec{e}$ の存在のもとに原点におかれた物体を考え, それからほるかに離れた点 $\vec{r}$ の擾乱を考えよう。そこでは特異的な場所を $\vec{r}$ として大局的には

i) 流速, 磁場の擾乱 $\vec{V}, \vec{h}$ ($\vec{V} \rightarrow \vec{e} + \vec{V}, \vec{H} \rightarrow \vec{e}_m + \vec{h}$) の 2 次以上の項が無視できる,

ii) レイノルズ数, 磁気レイノルズ数 (L に比例) が大きく粘性項, 磁気粘性項を無視できる,

iii) 場に対する外力 F_e は物体に働く力 F の反作用だけで, しかも原点に働く集中力 $-F\delta(x)$ とみなされる。

以上を假定すれば (2) - (2.5) から擾乱を支配する方程式として

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1'), \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0 \quad (2.2')$$

$$\frac{D}{Dt} \vec{V} = -\nabla p + \epsilon^2 (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{h} - F \delta(x) \quad (2.3')$$

$$\frac{D}{Dt} \vec{h} = (\vec{e}_m \cdot \nabla) \vec{V} \quad (2.4')$$

$$\text{ただし} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{e} \cdot \nabla) \quad (2.5)$$

を得る。ただし $\delta(x)$ は原点を support とするデルタ関数である。(2.1') $\mp$ (2.2') $\wedge$ および $\nabla_{\perp} (2.4')$ $\wedge$ を作れば,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V}_{\pm} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt_{\pm}} \vec{V}_{\pm} = -\nabla p - F \delta(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

ただし

$$\frac{D}{Dt_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_{\pm} \cdot \nabla \quad (2.8)$$

$$v_{\pm} \dot{z}_{\pm} = \dot{z}_{\pm} v_{\pm} \quad (2.9)$$

$$V_{\pm} = V \mp v_{\pm} \quad (2.10)$$

あるいは

$$V = \frac{1}{2}(V_+ + V_-), \quad v = -\frac{1}{2c}(V_+ - V_-) \quad (2.11)$$

である。(2.6)-(2.7)は原真におかれ、 F という集束力を受け
る物体を過ぎる。遠く $v_{\pm}$ の古典的な流れの中での擾乱を支
配する方程式である。 $v_{\pm}$ は正負の方向に伝播するアルフ
ベン波が一様流に流されて生じる射線ベクトルに他ならない。
これを波の *trail* と呼ぼう。

特に F が $t < 0$ では0で $F = F Y(t)$, $Y(t)$ は階段関数

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}, \quad Y'(t) = \delta(t) \quad (2.12)$$

のばあいを考えよう。(2.7)の notation とすれば渦度 ω に

$$\frac{D}{Dt} \omega_{\pm} = -\nabla \times (F Y(t) \delta(x)) \quad (2.13)$$

が成立する。 $z_{\pm}$ 方向に $x_{\pm}$ 軸, 垂直に $y_{\pm}$, z 軸をとれば

(2.13)は積分でき

$$v_{\pm}(\omega)_{\pm} = -\nabla \times [F(z_{\pm}) Y(z_{\pm}) Y(x_{\pm})] \quad (2.14)$$

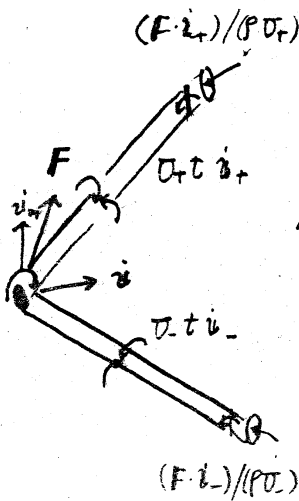
と與える。ただし

$$z_{\pm} = t - \frac{x}{v_{\pm}} \quad (\text{Retarded time}) \quad (2.15)$$

$$Y(x_{\pm}) = Y(x_{\pm}) \delta(y_{\pm}) \delta(z) \quad (\text{正 } x_{\pm} \text{ 軸上に配置された} \\ \text{デルタ関数}) \quad (2.16)$$

(2.14) は $\vec{z}_\pm$ に平行な射線上 $0 < x_\pm < U_\pm t$ 以外では 0 で渦度が $U_\pm$ の速度で伝達されて行くことに対応する。(2.14) を展開すれば

$$\begin{aligned} U_\pm w_\pm = & (\vec{z}_\pm \times F) \left[\delta(z_\pm) \delta(y_\pm) \delta(z) - \frac{1}{U_\pm} Y(t) \delta(x) \right] \\ & + (F y_\pm \frac{\partial}{\partial z} - F z \frac{\partial}{\partial y}) Y(z_\pm) Y(x_\pm) \vec{z}_\pm \\ & + [F x_\pm \vec{z}_\pm \times \nabla Y(x_\pm)] Y(z_\pm) \\ & - \vec{z}_\pm \times \left[\frac{\partial}{\partial t} F(z_\pm) \right] Y(z_\pm) Y(x_\pm) \quad (2.17) \end{aligned}$$



と書かれ、第1行は $\vec{z}_\pm$ に垂直な力に比例し、原点におかれた束縛渦と、点 $x_\pm = U_\pm t$ にある出発渦(逆符号)、第2行は $\vec{z}_\pm$ 方向に軸を持つ渦対で第1行の2つの渦をつらねた後引き渦として馬蹄渦を形成する。第3行は $x_\pm$ 方向の力に比例し $\vec{z}_\pm$ 軸上に中心を持つ Ring

vertex の列で、その誘起速度は $\vec{z}_\pm$ に平行原点に向う inflow である。又第4項は非定常力により、馬蹄渦をレールとすればその上に梳木状に分布する渦分布がある。

一方(2.7)の $\nabla \cdot \vec{z}$ とれば

$$\Delta P = -(F \cdot \nabla) \delta \quad (2.18)$$

から P が doublet として得られる。

$$P = -(F \cdot \nabla) \phi_0, \quad \Delta \phi_0 = \delta(x) \quad (2.19)$$

たゞし

$$\phi_0 = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|} & (3\text{-次元}) \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & (2\text{-次元}) \end{cases} \quad (2.20)$$

これを(2.7)に入れて積分すれば

$$\begin{aligned} U_{\pm} V_{\pm} = & -F(\tau_{\pm}) Y(x_{\pm}) Y(\tau_{\pm}) \\ & + \int_{x_{\pm}-U_{\pm}t}^{x_{\pm}} [F(t+\frac{x-x_{\pm}}{U_{\pm}}) \cdot \nabla] \nabla \phi_0(x, y_{\pm}, z) dx \quad (2.21) \end{aligned}$$

第一項は $x_{\pm}$ trail に沿う influx, 第二項の積分はそれに見合う potential source, および(2.17)の渦が $x_{\pm}$ のまわりに誘起するポテンシャル流に他ならない。(2.21), (2.17)は $x_{\pm}$ を m とだけばふつうの流れに見られる流れの方向の trail が消失し $x_{\pm}$ 方向の trail に分れると共にそれぞれの強さが流速とアルフベン波の合成速度 $U_{\pm}$ に反比例することを示す。これは $\rho U_{\pm} V_{\pm}$ の割合で場の運動量が物体に働く力に転化することに対応する。

粘性、電気抵抗が入るとか、物体により近くの場合については話が複雑となる。粘性項を考慮に入れると(2.7)の右辺に

$$\frac{1}{2}(\nu + \nu_m) \Delta V_{\pm} + \frac{1}{2}(\nu - \nu_m) \Delta V_f \quad (2.22)$$

が加わる。従って

i) $\nu = \nu_m$ のとき

第二項が0で(2.7)は

$$\frac{D}{Dt} V_z = -\nabla P - \mu S(x) + \nu \nabla^2 V_z$$

すなわち、速度 V_z で物体に力 F をおよぼす粘性率 ν の古典的な2つの流れへの分離が行なわれる。このとき *trail* は粘性（および磁気粘性によって）拡散し、正 x 軸を主軸とする放物状の渦領域を形成する。すなわち一般に古典的な後流 (*Wake*) が消失して2方向の伴流域に分離することになる。

$$ii) \quad \nu \neq \nu_m$$

$$ii a) \quad \dot{z} \neq \dot{z}_m$$

ν / ν_m が普通大ならば $\dot{z} = \dot{z}_m$ のばあいとのぞけば遠くの場合に対しては、 ν 1項が ν 2項にくらべて卓越するので粘性が $\frac{1}{2}(\nu + \nu_m)$ の2つの伴流への分離が近似的に成立する。

これは (x, y, z) 軸をとって考えれば、 $\dot{z} = \dot{z}_m$ のばあいを除けば V_z の z に垂直な微分が他にくらべて非常に大きいことから、うなづける。また2つの伴流の間には $\nu - \nu_m$ に比例する *diffusion* ^{diffusion} *diffusion* が行なわれる弱い扇形の領域が生じる。

$$ii b) \quad \dot{z} = \dot{z}_m \text{ (平行磁場) のとき}$$

このばあいに、*wake* の方向が流れの方向と平行 ($(1 \pm e)\dot{z}$ に平行) となるが見かけの簡単さにくらべて複雑であり、極限のとり方の順序によって必ずしも同じ結果が得られるとは限らぬ。特に $e > 1$ のときは $(1 - e)\dot{z}$ は後方ではなく前方に向

の前方を伴流を形成するわけであるが、 $v, v_m = 0, \dot{z}_m \neq \dot{z}$,
 $\partial/\partial t \neq 0$ であるとして $\dot{z}_m = \dot{z}$, $\partial/\partial t \rightarrow 0$ とする極限と $\partial/\partial t = 0$,
 $\dot{z}_m \rightarrow \dot{z}$ の極限は一致しても、 $v, v_m \neq 0, \partial/\partial t = 0, \dot{z}_m = \dot{z}$
 から出発して、 $v \rightarrow 0, v_m \rightarrow 0$ とおく極限とは $v = v_m$ のばあ
 いを除いては一致しない。また物体からの距離が近いときの
 場の非線型相互作用もからみ合ってくるわけで、未解決の肉
 題が多いといえよう。最近の Leilovich, Ludford⁽¹⁾ 等の細い
 物体を過ぎる流れに対する非定常流の準線型理論は、更に物
 体の電導性もからみ合っていることを示すが、本質的なこと
 は (2.6) (2.7) で $\dot{z}_m = \dot{z}$ としたものと異なる。

§ 3. 縮む流れ

このばあいは密度が変化するばかりでなくエネルギーの方
 程式も考慮する必要がある。たゞそれを残りの方程式と適
 当に組み合わせれば無次元化したエントロピーに相当する

$\delta = \rho - a^2 \hat{\rho}$ という量が方程式

$$\frac{D}{Dt} \delta = \hat{Q} \quad (4), \quad \hat{Q} = F_x + (\gamma - 1) Q$$

を満足することがわかる。たゞし、 γ は断熱指数、 Q は物体
 から発生する熱量 (ジュール熱を除く)。これから正 x 軸に沿う
 エントロピー-trail $\delta = \hat{Q}(\tau) Y(\tau) Y(x)$ の存在が示される。

これは定常平行磁場のときの結論⁽⁷⁾ と類似のばあいとして含む。
 $\dot{z}_m \neq \dot{z}$ なら x 軸はエントロピー (密度) の trail に過ぎず、
 他の量の trail は §1 で見たマッハ波と、§2 のアルフベン波跡
 (二次元流では消失) にそってあらわれることになる。

1. H. Hasimoto : Rev. Mod. Phys. 32 (1960) 680.
2. . . . : Suppl. Theor. Phys. (Kyoto) No. 24, (1962-3) 35.
3. . . . : Appl. Mechanics Surveys, Mc Millan Co Ltd (1966) 1043.
4. . . . : 第8回電磁流体力学シンポジウム論文集(東京理科大学)
(1967) 1.
5. F. Clauser : Phys Fluids 6 (1963) 231.
6. T. Sakurai : J. Fluid Mech. 15 (1963) 610.
7. H. Yosinobu : J. Phys. Soc. Japan 15 (1960) 175.
8. M. B. Glaueert : J. Fluid Mech. 15 (1963) 1.
9. D. N. Fan : 同上 20 (1963) 433.
10. S. Leibovich & G.S.S. Ludford : 同上 25 (1966) 289.