

完備で有界な部分多様体の曲率の評価

東北大 理 北川 義久

3次元ユークリッド空間 E^3 の中に完備な曲面 S を考える。 S が半径 λ の球の中に閉じ込められている時、 S のガウス曲率 K と λ の間には $\sup K \geq \frac{1}{\lambda^2}$ なる関係が成り立つように思われる。 一般に $(2n-1)$ 次元ユークリッド空間 E^{2n-1} の中の n 次元完備部分多様体 M に対しても、 M が半径 λ の球の中に閉じ込められているならば M の断面曲率 K_M と λ の間には $\sup K_M \geq \frac{1}{\lambda^2}$ なる関係が成り立つように思われる。 ただし $\sup K_M = \sup \{M \text{ のすべての断面曲率} \}$ 。 以下ではこのことに関連したいくつかの結果を紹介する。

M がコンパクトである場合には Chern, Kuiper, Otsuki により次の定理が知られている。

定理1 ([2], [6]) M を $(2n-1)$ 次元ユークリッド空間

E^{2n-1} 中の n 次元コンパクト部分多様体とすると, M の断面曲率 K_M は $\sup K_M > 0$ をみたす。

Jacobowitz は定理 1 を精密化し次の定理を得ている。

定理 2 ([3]) M を $(2n-1)$ 次元ユークリッド空間 E^{2n-1} 中の n 次元コンパクト部分多様体とする。もし M が半径 λ の球に含まれるならば, M の断面曲率 K_M は $\sup K_M \geq \frac{1}{\lambda^2}$ をみたす。

定理 2 は M が完備の時でも正しいだろうか。定理 2 の証明は, 球の中心から最大の距離にある M 上の点を取り, そこでの第 2 基本形式を調べることによるのであるが, M が完備なる時には一般にこのような点は存在しない。

Baikousis - Koufogiorgos は Omori [5] の結果を応用することにより次の定理を得ている。

定理 3 ([1]) M を $(2n-1)$ 次元ユークリッド空間 E^{2n-1} 中の n 次元完備部分多様体でスカラー曲率が下に有界であるとする。もし M が半径 λ の球に含まれるならば, M の断面曲率 K_M は $\sup K_M \geq \frac{1}{\lambda^2}$ をみたす。

ここで次の問題を考えることができる。

A. 定理3はスカラー曲率に対する条件なしでも成り立つのではないか。

B. 定理3における評価式 $\sup K_M \geq \frac{1}{\lambda^2}$ は曲がった空間の中ではどうなるか。

Aについては今のところ不明である。Bについての結果を述べる為に、連続関数 $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ を次で定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x=0 \\ x \coth(x) & \cdots x>0 \end{cases}$$

定理4 ([41]) $\overline{M}$ を $(n+p)$ 次元完備、単連結リーマン多様体で $\overline{M}$ の断面曲率 $K_{\overline{M}}$ が $a \leq K_{\overline{M}} \leq b \leq 0$ をみたすとする。 M を $\overline{M}$ の中の n 次元完備部分多様体でスカラー曲率が下に有界であるとする。もし $p < n$ で M が半径 λ の測地球に含まれるなら、 M の断面曲率 K_M は $\sup K_M \geq a + \lambda^2 f(\sqrt{b}\lambda)^2$ をみたす。

定理4に関する注意 (I) $a=b$ なる場合 評価式の右边は $\overline{M}$ における半径 λ の測地球面(定曲率)の曲率を表わす。

- (2) 評価式の右辺は λ に関し減少関数で, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (a + \frac{f(F\lambda)^2}{\lambda^2}) = \infty$.

文 献

- [1] C. Baikousis - T. Koufogiorgos, Isometric immersions of complete Riemannian manifolds into Euclidean space, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 87~88.
- [2] S.S. Chern - N.H. Kuiper, Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. 56 (1952), 422~430.
- [3] H. Jacobowitz, Isometric embedding of compact Riemannian manifold into Euclidean space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 245~246.
- [4] Y. Kitagawa, Curvature estimates for complete and bounded submanifolds in a Riemannian manifold, preprint.
- [5] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205~214.
- [6] T. Otsuki, On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application, Proc. Japan. Acad. 29 (1953), 99~100.