

引湯管による地中温度の分布と引湯の冷却

湯 原 浩 三

§ 1 緒 言

温泉地に於てよく見られる如き、地表面にほぼ平行に地中に埋められた引湯管によつて、その附近の地中温度が如何なる分布をするか、又引湯管から周囲に逃げてゆく熱量はどの程度であるか、等の研究は純粋な熱伝導論的問題を提供する。この様な問題に対しては、既に J. H. Awbery¹⁾、拔山四郎²⁾、野手悌士³⁾、野満隆治、瀬野錦蔵⁴⁾の諸氏が夫々独立に研究されている。J. H. Awbery は地中に埋められた熱源が線状であつて、地表面に於て Newton 冷却が行われている場合の解を得ている。拔山氏及び野満、瀬野両氏は線状熱源として導いた解を有限の大きさを持つ熱源に近似的に拡張して実際の引湯冷却の問題に応用している。又、野手氏は熱源を有限とし、地表面に於て Newton 冷却を考慮して問題を取扱つているけれども、理論的に充分ではない様である。

普通の温泉地の引湯の場合、埋設深度はそんなに深くなくて、導管半径が埋設深度に比して無視される程度であるとは必ずしも云えない。そこで筆者は J. H. Awbery の解を有限な大きさの熱源に対する如く拡張し、さらに之を実際に適用する上に便利な様に漸近級数によつて表現した。次にそれを利用して引湯の冷却を理論的に検討する。

§ 2 熱伝導方程式とその解

熱伝導率 k の地中にある長さ l 、半径 R_0 の導管内を温度 $T_b = T_b(l)$ なる温水が流動するとき、流量を q 、温水の比熱を 1 とすれば、熱の授受に関しては

$$q dT_b = 2kdl \int_0^\pi R_0 \left(-\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta \quad (1)$$

但し θ は鉛直上方より R の方向に取るものとする。(第1図)。

予想される結果は、 l 方向に直角な平面内の温度勾配が l 方向のそれに比して充分大きいと思われるから、熱伝導は二次元的に考えてよいとする。従つて $l = l_1$ なる場所で導管に垂直な xy -平面を考え、地表面 $x = 0$ に於て Newton 冷却の法則があてはまるものとして、その係数を h' 、 xy -平面内の泉温を T_b (一定)、地表面上気温を基準温度 0°C に選べば、 xy -平面内の定常温度分布は次式を解くことによつて得られる。

* 昭和28年7月 日本温泉科学会第6回大会にて講演

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0 \\ (x-b)^2 + y^2 &= R_0^2 \text{ に於て } T = T_0 \\ x=0 \text{ に於て } k \frac{\partial T}{\partial x} - h' T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに b は導管中心の地表面からの深さである。(第1図)

(2) を解くために $T = T_1 + T_2$ とおき, T_1 に関して,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} &= 0 \\ (x-b)^2 + y^2 &= R_0^2 \text{ に於て } T_1 = T_0 \\ x=0 \text{ に於て } T_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

T_2 に関して,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} &= 0 \\ (x-b)^2 + y^2 &= R_0^2 \text{ に於て } T_2 = 0 \\ x=0 \text{ に於て } \frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial x} - h T_2 &= 0 \\ h &= \frac{h'}{k} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

とすれば, (2) の条件を満足さす事が出来る。

(3) の解は

$$\left. \begin{aligned} T_1(x, y) &= \frac{T_0}{\log \frac{b-a}{b+a}} \log \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \\ \text{ここに } a &= \sqrt{b^2 - R_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(4) を解くために

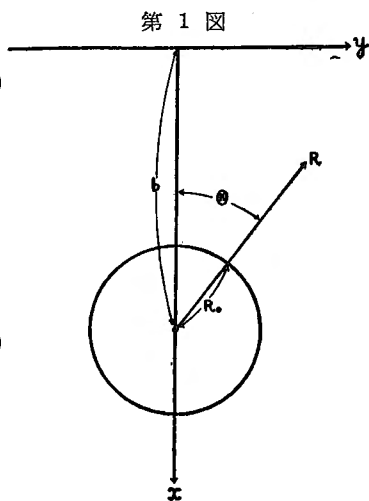
$$T_2 = \int_0^\infty A e^{-\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda$$

とおけば

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=0} = - \int_0^\infty A \lambda \cos \lambda y \, d\lambda,$$

又 (5) より

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{-4a T_0}{(a^2 + y^2) \log \frac{b-a}{b+a}},$$



故に (4) の条件から $x = 0$ に於て

$$\int_0^\infty (\lambda + h) A \cos \lambda y d\lambda = \frac{-4a T_b}{(a^2 + y^2) \log \frac{b-a}{b+a}}$$

したがつて Fourier's integral を用いると

$$A = \frac{-8a T_b}{(\lambda + h) \pi \log \frac{b-a}{b+a}} \int_0^\infty \frac{\cos \mu \lambda}{a^2 + \mu^2} d\mu = \frac{-4 T_b e^{-a\lambda}}{(\lambda + h) \log \frac{b-a}{b+a}}$$

故に (4) の解は

$$T_2 = \frac{-4 T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda \quad (6)$$

結局微分方程式 (2) の解は

$$T = \frac{T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} \log \frac{(\chi-a)^2 + y^2}{(\chi+a)^2 + y^2} - \frac{4 T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda, \quad (7)$$

(7) 式に於て $R_0 \rightarrow 0$, 即ち $a \rightarrow b$ なる極限を考へる。これは導管の太さが埋設深度に比して極めて小さく、無視することが出来る場合である。熱の流線は導管の上部からは密に、下部からは疎に出ているが、導管表面には必ず直角である。このことは導管の太さが変わつても同じであるから、この条件を保ちながら導管が細くなつてゆくとする。第2図の如く xy -平面内で、導管中心に於て微少な角 $\Delta\theta$ を考へ、その角内で導管表面から流出する熱量を ΔQ とする。(第2図)。

導管表面に於ては

$$\Delta Q = -kR \frac{dT}{dR} \Delta\theta$$

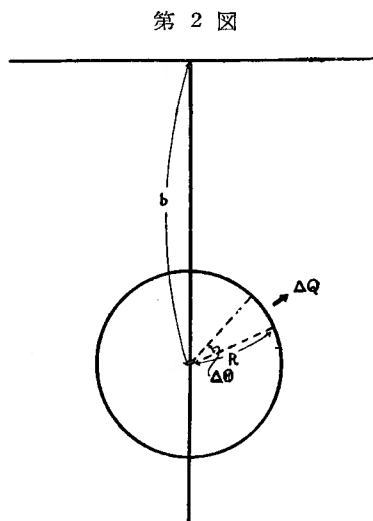
$$dT = -\frac{\Delta Q}{k \Delta\theta} \frac{dR}{R}$$

$R = R_0$ に於て $T = T_b$ であるから

$$T_b = -\frac{\Delta Q}{k \Delta\theta} \log cR_0 = -\frac{\Delta Q}{2k \Delta\theta} \log c^2 (b^2 - a^2)$$

c; 積分常数

したがつてある $\Delta\theta$ 内で ΔQ を一定に保ちつつ $a \rightarrow b$ となると



$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} = -\frac{\Delta Q}{2k \Delta \theta} \lim_{a \rightarrow b} \frac{\log c^2 (b^2 - a^2)}{\log \frac{b-a}{b+a}} = -\frac{\Delta Q}{2k \Delta \theta}$$

故に導管表面から流出する全熱量は

$$Q = 2 \int_0^\pi -2k \left(\lim_{a \rightarrow b} \frac{T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} \right) d\theta = -4\pi k \left(\lim_{a \rightarrow b} \frac{T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} \right)$$

故に

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{T_b}{\log \frac{b-a}{b+a}} = \frac{-Q}{4\pi k}$$

結局 $R_0 \rightarrow 0$, 即ち $a \rightarrow b$ なる極限では (7) 式は

$$T = \frac{-Q}{4\pi k} \log \frac{(\chi-b)^2 + y^2}{(\chi+b)^2 + y^2} + \frac{Q}{\pi k} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(\chi+b)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda \quad (8)$$

となつて Awbery の得た解と一致する。

(8) 式の右边第二項の積分の値を知るために, Awbery は Simpson の定理を用いて数値計算した。しかし x, y の値の変化に対して積分の値がどの様に変化するかを知るためには, 一々数値計算を行う事は極めて厄介であるので, その積分を解くことを試みる。積分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(\chi+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda$$

第 3 図

に於て $\chi + a = \alpha$, $y = \beta$ とかき, $\lambda + h = u$ とおくと,

$$\int_h^\infty \frac{e^{-u(\alpha-h)} \cos(u-h) \beta}{u} du, \quad (9)$$

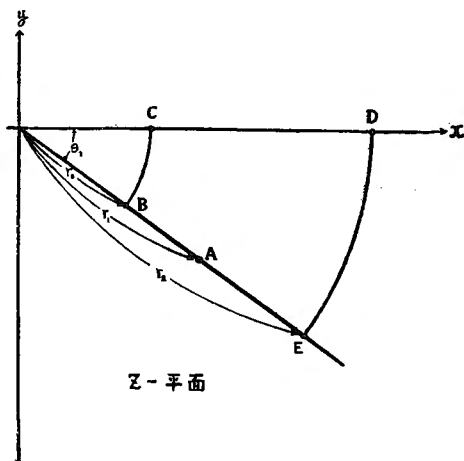
(9) の積分を行うために,

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{z}$$

なる函数を考え, 第 3 図の ABCDEA の如き閉曲線上で積分し,

$r_0 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow \infty$ なる極限を考えると

$$\int_h^\infty \frac{e^{-u(\alpha-i\beta)}}{u} du$$



$$= - \left\{ E + \log r_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \cos n \theta_1}{n \cdot n!} \right\} + i \left\{ \theta_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \sin n \theta_1}{n \cdot n!} \right\}, \quad (10)$$

$$\text{ここに} \quad r_1 = h (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \tan \theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$E = 0.57721 \dots \dots \quad (\text{Euler の常数})$$

(10) の両辺に $e^{h(\alpha - i\beta)}$ を乗じて後、両辺の実数部分を等しいとおけば (9) の積分は次の如くなる。

$$\begin{aligned} & \int_h^{\infty} \frac{e^{-\alpha(u-h)} \cos(u-h) \beta}{u} du \\ &= e^{\alpha h} \left\{ \sin \beta h \left(\theta_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \sin n \theta_1}{n \cdot n!} \right) \right. \\ & \quad \left. - \cos \beta h \left(E + \log r_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \cos n \theta_1}{n \cdot n!} \right) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

結局、目的の積分は (11) の α, β をもとにもどせばよい。即ち

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda \\ &= e^{h(x+a)} \left\{ \sin y h \left(\theta_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \sin n \theta_1}{n \cdot n!} \right) \right. \\ & \quad \left. - \cos y h \left(E + \log r_1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^n \cos n \theta_1}{n \cdot n!} \right) \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{ここに} \quad r_1 = h \left\{ (x+a)^2 + y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x+a}$$

$$E = 0.57721 \dots \dots$$

§3. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda$ の漸近展開

前節 (12) 式の右辺の級数は明らかに収斂級数であるけれども、 r_1 が大なるときは実際計算

に不便である。故に、次に問題の積分を漸近級数に展開する。今、

$$\frac{1}{\lambda + h} = \frac{1}{h} - \frac{\lambda}{h^2} + \frac{\lambda^2}{h^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{h^n} + (-1)^n \frac{\lambda^n}{h^n(h+\lambda)}$$

から

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y d\lambda - \frac{1}{h^2} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+a)} \lambda \cos \lambda y d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{h^3} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+a)} \lambda^2 \cos \lambda y d\lambda - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{h^n} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+a)} \lambda^{n-1} \cos \lambda y d\lambda + \frac{(-1)^n}{h^n} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \lambda^n \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda, \end{aligned}$$

しかるに $x + a > 0$ で n は正の整数であるから

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(x+a)} \lambda^{n-1} \cos \lambda y d\lambda = \frac{I'(n) \cos\left(n \cdot \tan^{-1} \frac{y}{x+a}\right)}{\left\{(\lambda + a)^2 + y^2\right\}^{\frac{n}{2}}} = \frac{(n-1)! \cos\left(n \cdot \tan^{-1} \frac{y}{x+a}\right)}{\left\{(\lambda + a)^2 + y^2\right\}^{\frac{n}{2}}}$$

ここで前節と同様 $r_1 = h \left\{(\lambda + a)^2 + y^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{\lambda + a}$$

とすると r_1, θ_1 は互に独立であるから

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda &= \frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} + \frac{2! \cos 3\theta_1}{r_1^3} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \cos n\theta_1}{r_1^n} + R_n(r_1) = f(r_1) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{ここに} \quad R_n(r_1) = \frac{(-1)^n}{h^n} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \lambda^n \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda$$

しかるに

$$\left| R_n(r_1) \right| \leq \left| \frac{1}{h^n} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+a)} \lambda^n \cos \lambda y}{h} d\lambda \right| = \left| \frac{n! \cos\left\{(n+1) \tan^{-1} \frac{y}{x+a}\right\}}{h^{n+1} \left\{(\lambda + a)^2 + y^2\right\}^{\frac{n+1}{2}}} \right| \leq \frac{n!}{r_1^{n+1}} \quad (14)$$

故に $\lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1^n R_n(r_1) = 0$ (15)

次に $\frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} + \frac{2! \cos 3\theta_1}{r_1^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \cos n\theta_1}{r_1^n} + \dots$ (16)

なる級数は発散級数であるが、

$$S_n(r_1) = \frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} + \frac{2! \cos 3\theta_1}{r_1^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \cos n\theta_1}{r_1^n}$$

とおくと (15) より

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} r_1^n \left\{ f(r_1) - S_n(r_1) \right\} = 0 \quad (n \text{ は一定})$$

故に (16) の級数は (13) 式の $f(r_1)$ の漸近級数である。結局、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(\chi+a)} \cos \lambda y}{\lambda + h} d\lambda &\sim \frac{\cos\left(\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos\left(2\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h^2\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}} \\ &+ \frac{2! \cos\left(3\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h^3\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{3}{2}}} - \dots \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式の右边を n 項迄取つたときの誤差の最大値は (14) より

$$\frac{n!}{\left[h\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{n+1}}$$

である。

問題の解を漸近級数で表わせば、(7) より

$$\begin{aligned} T &\sim \frac{T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \log \frac{(\chi+a)^2 + y^2}{(\chi-a)^2 + y^2} \\ &+ \frac{4T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left[\frac{\cos\left(\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos\left(2\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h^2\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}} \right. \\ &\quad + \frac{2! \cos\left(3\tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h^3\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{3}{2}}} - \dots \\ &\quad \left. \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \cos\left(n \tan^{-1} \frac{y}{\chi+a}\right)}{h^n\left\{(\chi+a)^2 + y^2\right\}^{\frac{n}{2}}} \dots \right] \end{aligned} \quad (18)$$

T の数値を (18) 式によつて計算する場合には T_b , a , b , x , y の値を考慮して級数の項数を選ぶことにより、任意の誤差の範囲で T の数値を計算することが出来る。

一例として $a = 100\text{cm}$, $R_0 = 5\text{cm}$, したがつて $b = 100.125\text{cm}$, 又 $h = 0.1\text{cm}^{-1}$ とし、(18)式の級数の2項までとつて計算すると第1表の如くなり、地中温度分布の模様

を第4図に示す。第1表に示した値に対する誤差の最大値は、

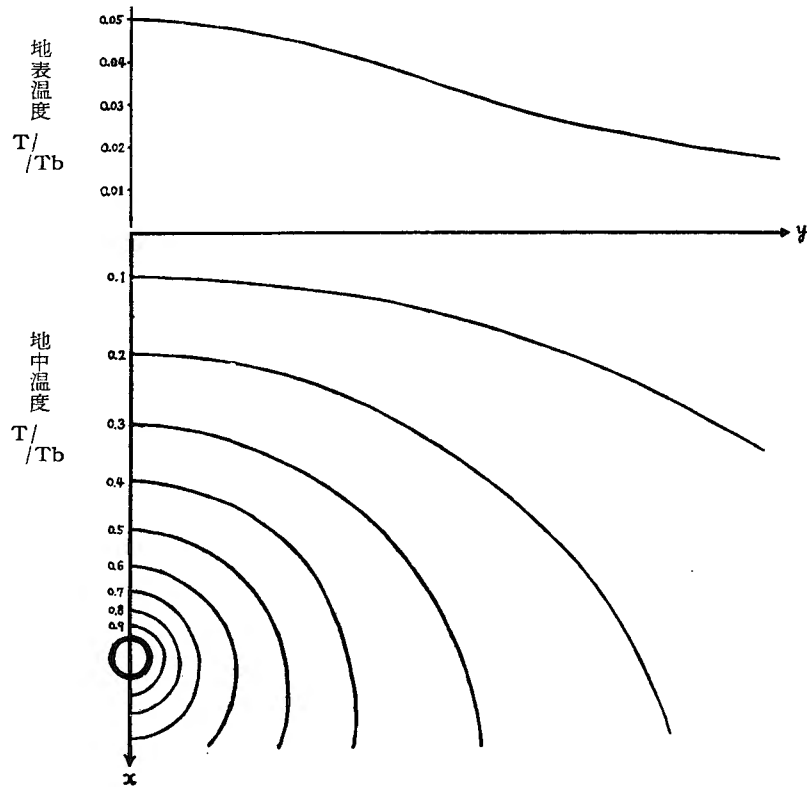
$x = 0, y = 0$ に於て、 1.8×10^{-3} ,

$x = 100, y = 100$ に於て 1.2×10^{-4} である。

第 1 表 計算例、 T/T_b の数値を示す。

$x_{cm} \backslash y_{cm}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
0	.050	.099	.151	.206	.266	.332	.409	.501	.625	.828	—	.850	.669
10	.049	.098	.150	.204	.263	.328	.401	.488	.596	.732	.849	.758	.645
20	.048	.096	.145	.199	.253	.314	.388	.453	.533	.610	.655	.634	.582
30	.046	.092	.140	.189	.237	.295	.351	.411	.468	.516	.544	.541	.517
40	.044	.087	.132	.180	.224	.273	.321	.369	.412	.447	.468	.471	.461
50	.041	.082	.123	.165	.207	.250	.291	.330	.365	.391	.404	.416	.412
60	.038	.076	.114	.153	.190	.228	.262	.295	.324	.347	.363	.370	.370
70	.035	.070	.105	.140	.174	.206	.237	.266	.290	.310	.324	.332	.336
80	.032	.064	.096	.127	.158	.187	.214	.239	.261	.278	.292	.300	.305
90	.029	.059	.088	.116	.143	.170	.194	.216	.235	.251	.264	.273	.278
100	.027	.054	.080	.106	.131	.154	.176	.199	.213	.228	.240	.248	.254
110	.024	.049	.073	.097	.119	.140	.159	.178	.193	.208	.218	.228	.233
130	.020	.041	.061	.081	.099	.117	.133	.148	.161	.174	.184	.192	.199
150	.017	.034	.051	.067	.083	.098	.112	.125	.137	.147	.156	.164	.170

第 4 図



§4. 引湯の冷却

今迄の議論と同様、先ず二次元の問題として考える。埋設引湯導管表面よりの熱の損失は、すべて地表面を通つて大氣中に失われるから、

$$\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta = - \int_0^\infty \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy \quad (19)$$

しかるにもとの微分方程式(4)の条件によつて、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = h(T_2)_{x=0}$$

故に

$$\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta = - \int_0^\infty h(T_2)_{x=0} dy \quad (20)$$

ここに T_2 は(6), (7) より

$$T_2 \sim \frac{4T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left[\frac{\cos \left(\tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right)}{h \left\{ (\chi+a)^2 + y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos \left(2 \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right)}{h^2 \left\{ (\chi+a)^2 + y^2 \right\}} \right. \\ \left. + \frac{2! \cos \left(3 \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right)}{h^3 \left\{ (\chi+a)^2 + y^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} - \dots \dots \dots \right] \quad (21)$$

しかし、(21)の右辺の x を 0 とおいて項別に積分したものが(20)の漸近解であることは証明を要することである。故に、その証明をする。(6), (13) より、

$$(T_2)_{x=0} = \frac{4T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} + \frac{2! \cos 3\theta_1}{r_1^3} - \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \cos n\theta_1}{r_1^n} + R_n(r_1) \right]$$

ただしこの場合は

$$r_1 = h(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{a}$$

したがつて

$$\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta = \frac{-4T_b h}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} + \frac{2! \cos 3\theta_1}{r_1^3} - \dots \dots \dots \right) \right.$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cos n \theta_1}{r_1^n} dy + \int_0^\infty R_n(r_1) dy \Big\} \\ = \frac{-4T_b h}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left\{ \frac{A_1}{h} - \frac{A_2}{h^2 a} + \frac{A_3}{h^3 a^2} - \dots + \frac{A_n}{h^n a^{n-1}} + \int_0^\infty R_n(r_1) dy \right\}$$

$$\text{ここに } A_1 = \frac{\pi}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

$$A_4 = \frac{3\pi}{2}, \quad A_5 = 0 \dots\dots\dots$$

今 $\int_0^\infty R_n(r_1) dy$ について考える。(14) 式から

$$\left| R_n(r_1) \right| \leq \frac{n!}{r_1^{n+1}} = \frac{n!}{\left\{ h(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^{n+1}}$$

故に

$$\left| \int_0^\infty R_n(r_1) dy \right| \leq \int_0^\infty \frac{n!}{h^{n+1} (a^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy = \frac{n!}{h^{n+1} a^n} B$$

$$B \text{ は } n \text{ が奇数のとき } B = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が偶数のとき } B = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)},$$

故に $\int_0^\infty R_n(r_1) dy$, 従つて $\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta$ は収斂である。しかも $ha \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| h^n a^{n-1} \int_0^\infty R_n(r_1) dy \right| \leq \frac{n! \cdot B}{ha} \rightarrow 0 \quad (\text{証明終})$$

故に (19) の積分は漸近級数に展開可能であつて、

$$\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta \sim \frac{-4T_b h}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left\{ \frac{A_1}{h} - \frac{A_2}{h^2 a} + \frac{A_3}{h^3 a^2} - \dots \right\}, \quad (22)$$

(22) 式の $\left\{ \right\}$ 内の第 5 項までとれば、

$$\int_0^\pi R_0 \left(\frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=R_0} d\theta \doteq \frac{-2T_b \pi}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left(1 - \frac{3}{h^3 a^3} \right), \quad (23)$$

そのときの誤差の最大値は

$$\frac{4T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \cdot \frac{5!}{h^5 a^5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

前節と同様、 $a = 100\text{cm}$, $b = 100.125\text{cm}$, $h = 0.1\text{cm}^{-1}$ のときは誤差の最大値は $19 \times 10^{-5} T_b$ である。

結局、導管内を流動する温水の温度低下に関しては (1) より、

$$q dT_b \doteq \frac{-4\pi k T_b}{\log \frac{b+a}{b-a}} \left(1 - \frac{3}{h^3 a^3}\right) dl \quad (24)$$

(24) の T_b を T とかくと

$$\left. \begin{aligned} dT &= -KT dl \\ \text{ここに } K &\doteq \frac{4\pi k}{q \log \frac{b+a}{b-a}} \left(1 - \frac{3}{h^3 a^3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

故に $T = Ce^{-Kl}$

C は積分常数、一般に気温を T' とすると

$$T - T' = Ce^{-Kl}$$

引湯管の入口即ち $l = 0$ での温水の温度を T_0 とすると $C = T_0 - T'$ であるから

$$T - T' = (T_0 - T') e^{-Kl}$$

引湯距離 l に従つて温水の冷却する割合は

$$T_0 - T = (T_0 - T') (1 - e^{-Kl}) \quad (26)$$

(26) 式は野満、瀬野両氏が導いた式と同形である。冷却係数 K は (25) 式であらわされたものであるが、地表面条件に於て Newton 冷却を考えないで、地表面を等温として取扱つた場合は

$$K = \frac{4\pi k}{q \log \frac{b+a}{b-a}}$$

であつて、これと (25) 式の K と比較すると $ha = 10$ 程度では Newton 冷却の影響は引湯の冷却には殆んど寄与しないことがわかる。このことは物理的に考えて、地表面条件のとりかたは、地表面近くの温度分布にはかなり影響を及ぼすが、導管近くの温度分布にはほとんど影響を与えず、したがつて導管表面よりの熱の損失に寄与する点も少いことからうなずけるものである。

終りに御指導を賜つた瀬野錦蔵博士に感謝の意を表する。なお、この研究の費用の一部は文部省科学研究費によつたものである。

参 考 文 献

- 1) J. H. Awbery ; Heat Flow when the Boundary Condition is Newton's Law. (Phil. Mag. vol. 7, 1929).
- 2) 拔山四郎 ; 温流体の地下輸送管よりの熱損失特に温水輸送に於ける温度降下に就いて (機械学会誌 第30巻, 1927).
- 3) 野手悌士 ; 地表面の熱抵抗を考慮した埋設管による地中温度の分布について (機械学会誌 第41巻, 1938).
- 4) 野満隆治, 瀬野錦蔵 ; 引湯の研究 I 引湯の冷却 (地球物理第5巻, 1941).

The Distribution of Underground Temperature Generated by Subterranean Conduit of Hot water, and the Cooling of the Flowing Hot Water.

K. YUHARA

The mathematical treatment of the problem as to the distribution of the underground temperature generated by subterranean conduit of hot water was incomplete up to now, when the radius of conduit is not negligibly small relative to the depth of it. And the consideration for the ground surface conditions was inadequate. The author gets the solution when a cylindrical thermal origin is buried in the ground and the surface condition is the Newton cooling. This solution agrees with the Awbery's solution at limiting case that the radius of cylinder approaches to zero. Then, the solution is expressed by the asymptotic series to be convenient for numeration.

The cooling of hot water flowing through the conduit is discussed by using of the above solution. Then, it is confirmed theoretically that the surface condition is not effective to the cooling of the hot water.