

ナヴィエ・ストークス方程式に対する 風上要素選択スキームの収束性

Convergence of an Upwind-Element Choice Scheme for the Navier-Stokes Equations

早稲田大学理工学術院 田端 正久¹

Masahisa Tabata

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

流れ問題の数値解法において、移流項あるいは物質微分項

$$u \cdot \nabla, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

の適切な近似が安定性と収束性を持つスキームの構築に重要である。ガレルキン (Galerkin) 有限要素近似は中心差分近似に相当し、安定なスキームが得られないことは良く知られている [15]。安定に計算できる有限要素法の開発は40年前に始まるが、風上要素選択法 (upwind-element choice method) [10] は最も早い時期に開発された風上有限要素近似の一つである。この方法は移流拡散問題やナヴィエ・ストークス (Navier-Stokes) 問題等に直接に、あるいは、拡張されて適用された [3, 4, 9, 11]。移流拡散方程式に対しては、開発当初に安定性と収束性が証明された [10] が、ナヴィエ・ストークス方程式に対しては、高レイノルズ数 (Reynolds) でも安定に計算ができるが、収束性は得られていなかった。ここでは、その収束性を証明する。

2 風上要素選択法

Ω を $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, の有界領域とする。流れ場 w での移流項

$$(w \cdot \nabla) u_i \equiv \sum_{j=1}^d w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1)$$

¹E-mail : tabata@waseda.ac.jp

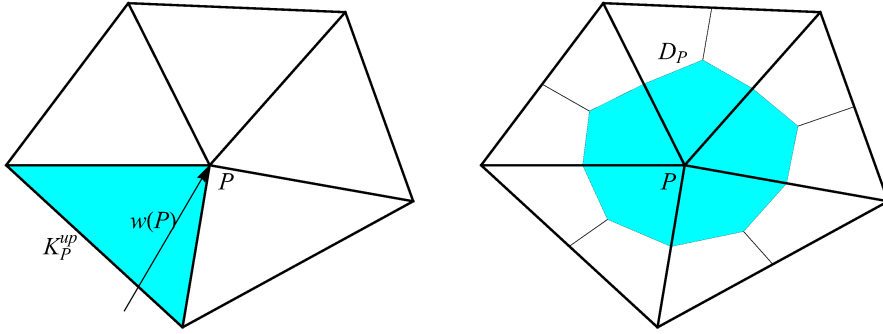


図 1: 節点 P の風上要素 K_P^{UP} (左) と重心領域 D_P (右)

から導かれる三重線形形式

$$a_1(u, v; w) \equiv \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla) u] \cdot v \, dx \quad (2)$$

を考える. 関数 $u, v, w \in V \equiv H_0^1(\Omega)^d$ とすると, a_1 は $V \times V \times V$ で連続である. (2) は v を試験関数として, (1) を弱形式化したものである.

$\mathcal{T}_h$ を領域 Ω の要素分割, $V_h \subset V$ を P_1 有限要素空間とする. $P \in \Omega$ を $\mathcal{T}_h$ の頂点とする. P の w に関する風上要素 $K_P^{UP}(w)$ とは

$$P \in K, \quad K \cap \{x; x = w(P)s + P, s < 0\} \neq \emptyset$$

を満たす要素 $K \in \mathcal{T}_h$ をいう [10]. 複数の要素が条件を満たすときは, どれか一つを選ぶ. どれを選んでも, 以下の結果は同じである. w を略して K_P^{UP} と書くこともある.

頂点 P に付随する重心領域 D_P は,

$$D_P = \bigcup_K \{D_P^K; P \in K \in \mathcal{T}_h\}, \quad D_P^K = \bigcap_{j=1}^d \{x; x \in K, \lambda_{Q(j)}(x) \leq \lambda_P(x)\},$$

で定義される [1, 6, 14]. ここに, $\{P, Q(1), \dots, Q(d)\}$ は要素 K の頂点であり, $\{\lambda_P, \lambda_{Q(1)}, \dots, \lambda_{Q(d)}\}$ はその重心座標である.

風上要素選択法に基づく (2) の近似 a_{1h} は

$$a_{1h}(u_h, v_h; w) \equiv \sum_P \text{meas } D_P [(w(P) \cdot \nabla) u_h(K_P^{UP}(w))] \cdot v_h(P) \quad (3)$$

で定義される [10]. ここに, $u_h, v_h \in V_h$, P は Ω にある $\mathcal{T}_h$ の任意の頂点, meas は面積 ($d=2$), あるいは, 体積 ($d=3$) である. P_1 要素を使っているので, ∇u_h は各要素上, 定数 (行列) である. a_{1h} は u_h, v_h に関する双一次形式であるが, w に関しては線形でない. 一般に, $K_P^{UP}(-w) \neq K_P^{UP}(w)$ だからである.

3 ナヴィエ・ストークス方程式の有限要素近似

流速 $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ と圧力 $p: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とし、ナヴィエ・ストークス方程式によって記述される非圧縮粘性流体問題:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (4a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (4b)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T) \quad (4c)$$

$$u = u^0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (4d)$$

を考える。ここに、

$$f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad u^0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

は与えられた外力、初期流速であり、 ν は拡散係数である。関数空間

$$V \equiv H_0^1(\Omega)^d, \quad Q \equiv L_0^2(\Omega)$$

を使って、(4a)-(4c) は $(u, p): (0, T) \rightarrow V \times Q$ を未知関数とする弱形式、 $\forall t \in (0, T)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right) + a_1(u(t), v; u(t)) + a_0(u(t), v) + b(v, p(t)) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, \quad (5a)$$

$$b(u(t), q) = 0, \quad \forall q \in Q, \quad (5b)$$

に書き替えられる。ここに、 $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)^d$ 内積であり、

$$a_0(u, v) \equiv \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx, \quad b(v, q) \equiv - \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx$$

である。

V/Q を近似する有限要素空間 V_h/Q_h として、 P_2 同相 P_1/P_1 要素 [2] を使う。この要素で、 Q_h は $\mathcal{T}_h$ で P_1 要素であり、 V_h は $\mathcal{T}_h$ の各要素を 2^d 個に分割した要素分割 $\mathcal{T}_{h/2}$ で P_1 要素である。時間刻みを Δt とし、 $N_T \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$ と置く。問題 (4) のガレルキン有限要素近似スキームは、 $\{(u_h^n, p_h^n) \in V_h \times Q_h; n = 0, \dots, N_T\}$ を、 $n = 1, \dots, N_T$ として、

$$(\bar{D}_{\Delta t} u_h^n, v_h) + a_1(u_h^n, v_h; u_h^{n-1}) + a_0(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (6a)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (6b)$$

$$u_h^0 = I_h u^0 \quad (6c)$$

で求めることである。ここに、 $I_h: C(\bar{\Omega})^d \rightarrow V_h$ は補間作用素であり、 $\bar{D}_{\Delta t}$ は後退時間差分作用素

$$\bar{D}_{\Delta t} u_h^n \equiv \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$$

である。通常, (6a) の a_1 は安定性を良くするために, 連続問題で同値な

$$a_1^{skew}(u, v; w) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{[(w \cdot \nabla)u] \cdot v - [(w \cdot \nabla)v] \cdot u\} dx$$

で置き換えられる。 P_2 同相 P_1/P_1 要素は下限上限 (inf-sup) 条件を満たす [2] ので, ガレルキン有限要素法の収束結果, 例えば [12] から, Δt と h に関する安定条件は不要で,

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(\Delta t + h) \quad (7)$$

が成立する。ここに, $\ell^\infty(H^1)$, $\ell^2(L^2)$ のノルムは, 一般に X をバナッハ空間として,

$$\|v\|_{l^\infty(X)} \equiv \max_{n=0, \dots, N_T} \|v^n\|_X, \quad \|v\|_{l^2(X)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|v^n\|_X^2 \right\}^{1/2}$$

で定義される。

4 質量集中化風上要素選択スキーム

Δt を時間刻み, V_h/Q_h を P_2 同相 P_1/P_1 要素とするとき, ナヴィエ・ストークス方程式 (4) の質量集中化風上要素選択スキームは

$$(\bar{D}\Delta t u_h^n, v_h)_h + a_{1h}(u_h^{n-1}, v_h; u_h^{n-1}) + a_0(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \forall v_h \in V_h \quad (8a)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (8b)$$

である。ここに, $(\cdot, \cdot)_h$ は集中質量近似 L^2 内積

$$(u_h, v_h)_h \equiv \sum_P \text{meas } D_P u_h(P) \cdot v_h(P),$$

であり, 質量集中化作用素 (lumping operator) [14], $\bar{\cdot}: V_h \rightarrow L^2(\Omega)^d$

$$\bar{v}_h(x) \equiv v_h(P), \quad x \in D_P$$

を使うと,

$$(u_h, v_h)_h = (\bar{u}_h, \bar{v}_h)$$

である。(8a) で集中質量近似と風上要素選択は要素分割 $\mathcal{T}_{h/2}$ で適用する。厳密解 (u, p) に必要な微分可能性を仮定する。次の収束結果が得られる。

定理。正定数 $h_0, c_0, c(\nu, T, u, p)$ が存在し,

$$h \leq h_0, \quad \Delta t \leq \begin{cases} c_0 (1 + |\log h|)^{-1/2} & (d = 2) \\ c_0 h^{1/2} & (d = 3) \end{cases} \quad (9)$$

なら,

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(\Delta t + h) \quad (10)$$

が成立する.

注意. 収束オーダーは (7) と (10) で同じである. (6) は陰解法 (移流項に対して半陰解法とも言う) であるので, Δt に対して安定性の条件は必要ないが, 空間方向に通常のガレルキン近似を適用しているため, 移流が支配的 (高レイノルズ数) になると不安定になり計算が破綻する. 一方, (8) は移流項を陽的に近似しており, 条件 (9) は非線形移流項を評価するために要る. この条件は, CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件に比べて, はるかに弱い条件である. 風上近似を用いているので, 移流が支配的になっても安定に計算ができる. 風上近似に含まれる数値拡散を小さくするために流れ方向に精度を上げたスキームも開発されている [11]. 集中質量近似を用いているので, $\|u_h - u\|_{\ell^\infty(L^2)}$ で $O(h^2)$ に改良されることはない.

スキーム (8) では移流項を陽的に近似しているので, 各時間ステップで解くべき連立一次方程式の行列はストークス型の対称行列である. スキーム (6) では非対称行列が表れるのに比べ, 効率的な計算ができる.

5 ラグランジュ・ガレルキン法との同等性

ラグランジュ・ガレルキン (Lagrange-Galerkin) 法は物質微分 $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$ の近似に基づいている [7]. ϕ を $\Omega \times (0, T)$ 定義されたスカラー関数とする. ベクトル値関数 $X : (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^d$ が

$$\frac{dX}{dt} = u(X, t), \quad \forall t \in (0, T)$$

を満たしていると,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) (X(t), t) = \frac{d}{dt} \phi(X(t), t) \approx \frac{\phi(X(t), t) - \phi(X(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t},$$

が成立する. $X_1^n : \Omega \rightarrow \Omega$ を

$$X_1^n(x) \equiv x - u^n(x) \Delta t, \quad n = 0, \dots, N_T$$

と置くと, $(D\phi^n/Dt, \psi)$ を

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_h \right)$$

で近似することができる. ここに, $\phi_h^{n-1} \circ X_1^n$ は合成関数

$$(\phi_h^{n-1} \circ X_1^n)(x) \equiv \phi_h^{n-1}(X_1^n(x)).$$

である。

ナヴィエ・ストークス方程式にラグランジュ・ガレルキン法を適用すると、

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_{1h}^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + a_0(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \forall v_h \in V_h \quad (11a)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (11b)$$

となる。ここに、

$$X_{1h}^{n-1}(x) \equiv x - u_h^{n-1}(x)\Delta t$$

であり、流速場は直前に得られた既知流速 u_h^{n-1} を使っている。

V_h/Q_h に P_2 同相 P_1/P_1 有限要素を使えば、下限上限条件を満たしており、[8] の手法により (9) の下で、収束結果 (10) を得ることができる。(11) では、対称行列を持つ連立一次方程式を解くことになる。

(11a) の第 1 項を質量集中化した質量集中化ラグランジュ・ガレルキンスキーム

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_{1h}^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right)_h + a_0(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \forall v_h \in V_h \quad (12a)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (12b)$$

を考える。 P を $\mathcal{T}_{h/2}$ の任意の頂点とし、

$$X_{1h}^{n-1}(P) \in \bigcup \{K \in \mathcal{T}_{h/2}; K \cap P \neq \emptyset\} \quad (13)$$

を満たしているとする。

命題. (13) の下で、スキーム (8) と (12) は同値である。

証明. (8a) の左辺第 1,2 項の和は

$$\sum_P \text{meas} D_P \left\{ \frac{u_h^n(P) - u_h^{n-1}(P)}{\Delta t} + (u_h^{n-1}(P) \cdot \nabla) u_h^{n-1}(K_P^{UP}) \right\} \cdot v_h(P) \quad (14)$$

である。一方、(13) から、 $X_{1h}^{n-1}(P) \in K_P^{UP}$ であり、 u_h^{n-1} はそこで 1 次多項式なので、

$$u_h^{n-1}(P - u_h^{n-1}(P)\Delta t) = u_h^{n-1}(P) - (u_h^{n-1}(P)\Delta t) \cdot \nabla u_h^{n-1}$$

となる。この式を (12a) の左辺第 1 項に代入すれば、(14) が得られる。

6 定理の証明の概要

質量集中化風上要素選択スキーム (8) は条件 (13) の下で質量集中化ラグランジュ・ガレルキンスキーム (12) に同値になる。この同値性は、スキーム (8) の収束性を示すのに有益のように思われるが、ラグランジュ・ガレルキンスキーム (11) とス

スキーム (12) の差異である質量集中化の影響を解析すると, a_1 と a_{1h} の違いを評価することになり, 結局, (4) の弱形式との差を直接, 評価することになる. その結果, スキーム (8) の収束証明はスキーム (12) を経由せず, 条件 (13) も不要になる.

(u, p) を (4) の解とする. (u^n, p^n) のストークス射影 $(\hat{u}_h^n, \hat{p}_h^n) \in V_h \times Q_h$ を

$$\begin{aligned} a_0(\hat{u}_h^n, v_h) + b(v_h, \hat{p}_h^n) &= a_0(u^n, v_h) + b(v_h, p^n), \quad \forall v_h \in V_h \\ b(\hat{u}_h^n, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

で定義する. $e_h^n \equiv u_h^n - \hat{u}_h^n$, $\epsilon_h^n \equiv p_h^n - \hat{p}_h^n$ において, (e_h, ϵ_h) に関する誤差方程式

$$(\bar{D}_{\Delta t} e_h^n, v_h)_h + a_0(e_h^n, v_h) + b(v_h, \epsilon_h^n) = \langle R^n, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \quad (15a)$$

$$b(e_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (15b)$$

を導く. ここに, R^n は残差項である. $v_h = \bar{D}_{\Delta t} e_h^n$, $q_h = \epsilon_h^n$ を代入して, 離散 Gronwall (Gronwall) の不等式を用いて,

$$\|e_h\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|\bar{D}_{\Delta t} e_h\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(\Delta t + h)$$

を得る. その際, $\langle R^n, v_h \rangle$ に含まれる項, $a_1(u^n, v_h; u^n) - a_{1h}(\hat{u}_h^{n-1}, v_h; u_h^{n-1})$ の評価には次の補題を用いる.

補題. $u \in W^{2,\infty}(\Omega)^d$, $w \in L^2(\Omega)^d$, $v_h, w_h, w_h^{(1)}, w_h^{(2)} \in V_h$ とする. 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} |a_1(I_h u, \bar{v}_h; \bar{w}) - a_{1h}(I_h u, \bar{v}_h; \bar{w})| &\leq c h |u|_{W^{2,\infty}} \|\bar{v}_h\| \|\bar{w}\|, \\ |a_{1h}(I_h u, v_h; w_h^{(2)}) - a_{1h}(I_h u, v_h; w_h^{(1)})| &\leq c \left\{ h |u|_{W^{2,\infty}} \|w_h^{(1)}\| + |u|_{W^{1,\infty}} \|w_h^{(2)} - w_h^{(1)}\| \right\} \|v_h\|. \end{aligned}$$

証明の詳細については [13] を参照されたい.

7 おわりに

ナヴィエ・ストークス方程式に対する風上要素選択有限要素スキームの収束性を証明した. このスキームは高レイノルズでも安定に計算できる. 数値拡散を減少するために開発された流れ方向 3 次精度風上近似 [11] にも適用でき $O(\Delta t + h)$ の収束結果を得ることができるが, 集中質量近似を使っているため, これ以上の収束精度の改善は不可能である. しかし, より良い数値計算結果が得られている. この事実をどのように解析, 証明するかは今後の課題であり, その方向の研究は新たなスキームの開発に繋がるものであろう.

参考文献

- [1] K. Baba and M. Tabata. On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations. *R.A.I.R.O., Analyse numérique/Numerical Analysis*, Vol. 15, pp. 3–35, 1981.
- [2] M. Bercovier and O. Pironneau. Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables. *Numerische Mathematik*, Vol. 33, pp. 211–224, 1979.
- [3] M. O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Periaux, P. Perrier, and O. Pironneau. A finite element approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. iterative methods of solution. In *Approximation methods for Navier-Stokes problems*, Vol. 771 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 78–128. Springer, Berlin, 1980.
- [4] R. Glowinski. Finite element methods for incompressible viscous flow. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, Vol. 9 of *Handbook of Numerical Analysis*, pp. 3–1176. Elsevier, 2003.
- [5] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 50, No. 2, pp. 361–380, 2016.
- [6] O. Pironneau and M. Tabata. Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 64, pp. 1240–1253, 2010.
- [7] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [8] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, pp. 459–483, 1988.
- [9] F. Thomasset. *Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] M. Tabata. A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing. *Memoirs Numer. Math.*, 4:47–63, 1977.
- [11] M. Tabata and S. Fujima. Finite-element analysis of high Reynolds number flows past a circular cylinder. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 38, pp. 411–424, 1991.

- [12] M. Tabata and D. Tagami. Error estimates for finite element approximations of drag and lift in nonstationary Navier-Stokes flows. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 371–389, 2000.
- [13] M. Tabata. Convergence of an upwind-element choice scheme for the Navier-Stokes equations, to appear.
- [14] 田端正久. 偏微分方程式の数値解析. 岩波書店, 東京, 2010.
- [15] 田端正久. 項目「風上近似と特性曲線法」. 応用数理ハンドブック, 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顕 (編). 朝倉書店, 東京, 2013.