

Conjugacy Invariants and Normal Forms of Isometries of Hyperbolic Space

阪大 理 和田 昌昭 (Masaaki Wada)

Introduction.

3次元双曲空間の正の等長写像のつくる群は $PSL_2(\mathbb{C})$ と同型になることはよく知られている。すなわち、 $\mathbb{H}$ を 4元数体とするとき

$$H^3 = \{ z = z_0 + z_1 i + z_2 j \in \mathbb{H} \mid z_2 > 0 \}$$

は、Riemann 計量を

$$ds = \frac{|dz|}{z_2}$$

によって定義することにより双曲空間になる。 $PSL_2(\mathbb{C})$ はその上に Möbius 変換として働く、すなわち

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}),$$

$$z \in H^3$$

に対して

$$g \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

こゝも高次元へ拡張するには、フリフォード多元環の元を成分にもつ 2×2 行列を考えるのが便利であり、実際その

ような試みは古くから行なわれている [V][F1][F2][M]. しかし、これらの仕事は、最近 Ahlfors [A1][A2][A3] がそれを用いて高次元の双曲幾何学を展開しようとするまで忘れられていた。

ここでは クリフォード多元環を用いることによって、一般次元の双曲空間のいくつかのモデルとその等長写像群に統一적인視点を与える。さらに等長写像を共役分類する。これには クリフォード群の共役不変関数が重要な役割を果たす。

§1. クリフォード多元環とクリフォード群の共役不変関数

$E = E^{n,p}$ を $n+p$ 次元の実ベクトル空間、 g をその上の (n,p) 型の 2 次形式とする。

$$\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_n, i_\omega, \dots, i_{\omega+p-1}\}$$

を (E, g) の正規直交基底とする。すなわち

$$v = v_1 i_1 + \dots + v_n i_n + v_\omega i_\omega + \dots + v_{\omega+p-1} i_{\omega+p-1} \in E$$

に対して

$$g(v) = -v_1^2 - \dots - v_n^2 + v_\omega^2 + \dots + v_{\omega+p-1}^2.$$

(E, g) に付随した実クリフォード多元環を C または $C^{n,p}$ とかく。

このとき $\mathcal{B}$ は C を生成し、次の関係式をみたす。

$$i_j^2 = -1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$i_j^2 = 1 \quad (j = \omega, \dots, \omega+p-1)$$

$$i_j i_k = -i_k i_j \quad (j \neq k)$$

C の任意の元は

$$a = \sum a_i I \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

$$I = i_{j_1} \cdots i_{j_r} \quad (j_1 < \cdots < j_r)$$

と一意的に表わされる。上の I に対し $l(I)$ を I の長さとい

い $l(I)$ とかく。 a のノルムは

$$|a| = (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

と定義される。 C の任意の部分集合 A に対して

$$A^{(k)} = \{ a = \sum a_i I \in A \mid l(I) \neq k \Rightarrow a_i = 0 \}$$

$$A_{\text{ev}} = \{ a = \sum a_i I \in A \mid l(I) : \text{odd} \Rightarrow a_i = 0 \}$$

$$A_{\text{od}} = \{ a = \sum a_i I \in A \mid l(I) : \text{even} \Rightarrow a_i = 0 \}$$

とき $a = \sum a_i I \in C$ に対して

$$a^{(k)} = \sum_{l(I)=k} a_i I$$

となく、また

$$a' = \sum (-1)^{l(I)} a_i I$$

$$a^* = \sum (-1)^{\frac{l(I)(l(I)-1)}{2}} a_i I$$

$$a^- = \sum (-1)^{\frac{l(I)(l(I)+1)}{2}} a_i I$$

とすれば、 $a \mapsto a'$ は C の同型、 $a \mapsto a^*$ と $a \mapsto a^-$ は

C の逆同型であり、これは互いに可換であって $a^- = a'^*$

となっている。

さて $C^{n,p}$ のクリフトン群 $P = P^{n,p}$ を次で定義する。

$$P = \{ a \in C \mid a \text{ is invertible } \text{かつ} \ a v a^{-1} \in E \ (\forall v \in E) \}$$

これは容易に確かめられるように C の乗法に関して群になる。
 T の元 a に対して定まる E の変換

$$f_a: E \rightarrow E$$

$$f_a(v) = av a'^{-1} \quad (v \in E)$$

は直交変換である。実際

$$\begin{aligned} f(f_a(v)) &= -(av a'^{-1})'(av a'^{-1}) \\ &= a'v a^{-1} a v a'^{-1} \\ &= v^2 \\ &= f(v). \end{aligned}$$

従って f は $T^{n,p}$ から直交群 $O(n,p)$ への準同型であるが、これについて次の完全列がなりたつ。

$$1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow T^{n,p} \xrightarrow{f} O(n,p) \rightarrow 1$$

証明. $v \in E$, $f(v) \neq 0$ とすると E は

$$E = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$$

と、直交部分空間の直和に分解される。任意の $u \in E$ は

$$u = tv + w \quad (t \in \mathbb{R}, w \perp v)$$

と書かれる。このとき $wv + vw = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} v u v'^{-1} &= v(tv + w)v'^{-1} \\ &= -tv + w \\ &\in E. \end{aligned}$$

よって $v \in T$ であり P_v は $\langle v \rangle^\perp$ に関する対称変換である。
Cartanの定理によれば、 $O(n, p)$ はこのような対称変換
によって生成されるから P は上への写像である。次に、

$A = \sum a_i I \in \text{Ker } P$ としよう。任意の $v \in E$ に対して
 $Av = vA'$ がなりたつから、特に $i_j \in B$ に対しては、

$$a_i I i_j = a_i i_j I'$$

でなければならぬが、 $I \neq 1$ のとき $i_j \in I$ とする i_j
をとれば $I i_j = -i_j I$ だから $a_i = 0$ 。すなわち $A \in \mathbb{R}$
でなければならぬ。 $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ のときは $P_A = \text{id}$ とな
ることは容易にわかる。証明終。

これから T は E の可逆元で生成されることがわかる。
すなわち $A \in T$ に対して

$$\begin{aligned} P_A &= P_{v_1} \cdots P_{v_r} \quad (v_j \in E, v_j^2 \neq 0) \\ &= P_{v_1 \cdots v_r} \end{aligned}$$

とかけると $\text{Ker } P = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ だから $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ があって

$$A = t v_1 \cdots v_r$$

となる。

C の元 A のスピンノルム $N(A)$ は

$$N(A) = A^{-1} A \in C$$

と定義される。 T の元が E の元の積でかけるときを使

えば 次は容易に示される。

命題 $a \in T$ のとき $N(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であり N は T から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への準同型

T の部分群 $\text{Pin}(n, p)$ と $\text{Spin}(n, p)$ を次のように定義する。

$$\text{Pin}(n, p) = \{a \in T^{n, p} \mid N(a) = \pm 1\},$$

$$\text{Spin}(n, p) = \{a \in T^{n, p}_{\text{ev}} \mid N(a) = \pm 1\}.$$

これらについて 次の完全列がなりたつ。

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{Pin}(n, p) \xrightarrow{\rho} \text{O}(n, p) \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{Spin}(n, p) \xrightarrow{\rho} \text{SO}(n, p) \rightarrow 1.$$

次に T による共役不変な C 上の関数について述べる。

補題 $a \in C, \alpha \in T$ ならば $(\alpha a \alpha^{-1})^{(k)} = \alpha a^{(k)} \alpha^{-1}.$

証明. まず $v \in E, f(v) \neq 0$ なる v に対して

$$v a^{(k)} v^{-1} \in C^{(k)}$$

を示す。 $b = v a^{(k)} v^{-1}$ とおけば、明らかに

$$b \in C^{(k-2)} \oplus C^{(k-1)} \oplus C^{(k)} \oplus C^{(k+1)} \oplus C^{(k+2)}$$

であるから

$$b = b^{(k-2)} + b^{(k-1)} + b^{(k)} + b^{(k+1)} + b^{(k+2)}$$

よって

$$b' = (-1)^k (b^{(k-1)} - b^{(k-1)} + b^{(k)} - b^{(k+1)} + b^{(k+2)})$$

$$b^- = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (-b^{(k-2)} + b^{(k-1)} + b^{(k)} - b^{(k+1)} - b^{(k+2)})$$

であるが、一方

$$\begin{aligned} b' &= (v a^{(k)} v^{-1})' \\ &= (-1)^k v a^{(k)} v^{-1} \\ &= (-1)^k b \end{aligned}$$

だから $b^{(k-1)} = b^{(k+1)} = 0$. また

$$\begin{aligned} b^- &= (v a^{(k)} v^{-1})^- \\ &= N(v)^{-1} (v a^{(k)} v^{-1})^- \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} N(v)^{-1} v a^{(k)} v^{-1} \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} b \end{aligned}$$

だから $b^{(k-2)} = b^{(k+1)} = b^{(k+2)} = 0$. 従って $b = b^{(k)} \in C^{(k)}$.

さて

$$v a v^{-1} = \sum_{k=0}^{n+p} v a^{(k)} v^{-1}$$

であるが、上に示したように $v a^{(k)} v^{-1} \in C^{(k)}$ だから

$$(v a v^{-1})^{(k)} = v a^{(k)} v^{-1}$$

である。任意の $\alpha \in P$ に対しては E の元の積に表わし

ておいて 帰納的に示せばよい。証明終。

系 $A \in C^{n,p}$ のとき任意の $\alpha \in T^{n,p}$ に対し

$$(\alpha A \alpha^{-1})^{(0)} = A^{(0)}$$

$n+p$ が奇数のときはさらに次もなりたつ.

$$(\alpha A \alpha^{-1})^{(n+p)} = A^{(n+p)}$$

定義 $k = 0, 1, \dots, n+p$ に対し C 上の実数値関数 T_k を

$$T_k(a) = ((a^{(k)})^{-1} a^{(k)})^{(0)} \quad (a \in C)$$

で定義する.

定理 $a \in C$, $\alpha \in T$ に対し $T_k(\alpha a \alpha^{-1}) = T_k(a)$.

証明

$$\begin{aligned} T_k(\alpha a \alpha^{-1}) &= (((\alpha a \alpha^{-1})^{(k)})^{-1} (\alpha a \alpha^{-1})^{(k)})^{(0)} \\ &= ((\alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{-1} \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\ &= N(\alpha)^{-1} ((\alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{-1} \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\ &= N(\alpha)^{-1} (\alpha (a^{(k)})^{-1} \alpha^{-1} \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\ &= (\alpha (a^{(k)})^{-1} a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\ &= \alpha T_k(a) \alpha^{-1} \\ &= T_k(a). \end{aligned}$$

証明終.

最後に $O(n,p)$ の元 ξ に対し $\rho_a = \xi$ とする
 $a \in T$ をとれば.

$$T_k(\xi) = T_k(a) = T_k(-a)$$

と定義できることを注意しておく。

§2. 双曲空間の $su(n, 1)$ モデル

以下では $C^{n,0}$, $T^{n,0}$ 等を略して C^n , T^n 等とかく。

定義 C^n の元を成分とする 2×2 行列 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件を満たすとき、 g を n 次のクリフォード行列と呼び、その全体を $\mathcal{C}^n$ とかく。

$$(c1) \quad a, b, c, d \in T^n \cup \{0\}$$

$$(c2) \quad ab^*, cd^* \in E^n$$

$$(c3) \quad ad^* - bc^* = 1$$

$\mathcal{C}^n$ は行列の積に関して群になるが、証明は容易ではない。

ここではその証明は省略するが、次のことだけと注意しておく。

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n$ ならば

$$(c1_{ev}) \quad a, d \in T_{ev}^n \cup \{0\} \text{ かつ } b, c \in T_{od}^n \cup \{0\}$$

$$\text{または } (c1_{od}) \quad a, d \in T_{od}^n \cup \{0\} \text{ かつ } b, c \in T_{ev}^n \cup \{0\}.$$

$\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$ を E^n の一点コンパクト化とする。

$\mathcal{C}^n$ の $\hat{E}^n$ への作用を $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n, z \in E^n$

に対して

$$(1) \quad gz = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

によつて定義する。これは well defined で連続な作用だが、それを一々示すのはやめて、 $z \mapsto gz$ が、どのような変換であるかを具体的に示すことにしよう。まず $g \in \mathcal{C}^n$ に対して、次のような分解がなりたつ。

$$c=0 \text{ のとき } g = \begin{pmatrix} 1 & ab^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|^{-1}a & 0 \\ 0 & |a|^{-1}a^* \end{pmatrix},$$

$$c \neq 0 \text{ のとき } g = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & |c|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c|^{-1}c & 0 \\ 0 & |c|^{-1}c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これはどれも次の4つの型の変換の合成である。

$$1) \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z + v \quad (v \in E^n) \quad \text{平行移動}$$

$$2) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} z = r^2 z \quad (r \in \mathbb{R}) \quad \text{相似拡大(縮小)}$$

$$3) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix} z = az a^{-1} \quad (a \in T^n) \quad \text{回転}$$

$$4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z = \frac{z}{|z|^2} \quad \text{単位球面に関する反転}$$

従つて g による変換は一般に E^n の Möbius 変換と呼ばれるものである。また、任意の Möbius 変換が $\mathcal{C}^n$ の元 g によつて (1) のように表わされることもわかる。

以下では g による E^n の変換を $[g]$ とかくことにしよう。作用の核は $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ だから $[g] = [-g]$ である。

I. 上半空間モデル

$$H^n = \{ z = z_1 i_1 + \cdots + z_n i_n \in E^n \mid z_n > 0 \}$$

とする。 $\mathcal{C}^{n-1}$ の元 g を $\mathcal{C}^n$ の元と考えれば、

$$z = v + z_n i_n \quad (v \in E^{n-1}, z_n \in \mathbb{R})$$

に於て

$$(2) \quad g z = |cz+d|^{-2} \{ (|z|^2 ac + bd + avd - bvc) + z_n i_n \}$$

となるから g は $\hat{E}^n$ および H^n を不変にする。このとき

$[g]|_{H^n}$ を $[g]|_{\hat{E}^n}$ の Poincaré 拡張という。

H^n 上の Riemann 計量を

$$ds = \frac{|dz|}{z_n}$$

で定義すれば、よく知られているように H^n は双曲空間になる。

このとき $\mathcal{C}^{n-1}$ が等長写像によって H^n に作用することは

次のようにしてわかる。 $g \in \mathcal{C}^{n-1}$, $w = g z$ とす

ると (2) より

$$w_n = |cz+d|^{-2} z_n.$$

一方

$$w(cz+d) = az+b.$$

$$dw(cz+d) + wcdz = a dz$$

$$dw = \{ a - (az+b)(cz+d)^{-1}c \} (cz+d)^{-1}$$

$$= c^{*-1}(cz+d)^{-1}c : dz (cz+d)^{-1}$$

$$|dw| = |cz+d|^{-2} \cdot |dz|$$

従って

$$\frac{|dw|}{w_n} = \frac{|dz|}{z_n}.$$

$\mathcal{C}^2$ と $PSL_2(\mathbb{C})$ との関係もよこておこう。 $v \in E^3$

に於て

$$D(V) = (1-i_1)(1+i_2)(1-i_3) V (1+i_3)^{-1}(1-i_2)^{-1}(1+i_1)^{-1}$$

とあけは、 D は H^3 を

$$\{ z_0 + z_1 i_1 + z_2 i_2 \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 > 0 \}$$

の上に、1対1に写す。

$$g = \begin{pmatrix} a_0 + a_{12} i_1 i_2 & b_1 i_1 + b_2 i_2 \\ c_1 i_1 + c_2 i_2 & d_0 + d_{12} i_1 i_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^2_{ev}$$

に於て

$$D g D^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 + a_{12} i & b_1 + b_2 i \\ -c_1 + c_2 i & d_0 - d_{12} i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

が対応する。

II 単位球モデル

$$B^n = \{ z \in \mathbb{E}^n \mid |z| < 1 \}$$

に Riemann 計量

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

を代入すると、 B^n は次の行列による Möbius 変換により H^n と等長同相になる。

$$\phi_n = \begin{pmatrix} 1 & -i_n \\ -i_n & 1 \end{pmatrix} : H^n \rightarrow B^n$$

$\mathcal{U}^{n-1}$ には

$$\mathcal{U}^{n\#} = \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ f' & e' \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^n \right\}$$

が対応する。この $\mathcal{U}^{n\#}$ が等長変換により B^n に作用する。

Ⅲ 双曲面モデル

$$Q_+^n = \{z = z_1 i_1 + \dots + z_n i_n + z_0 i_0 \in E^{n+1} \mid q(z) = 1, z_0 > 0\}$$

とおき、 Q_+^n 上の Riemann 計量を

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz \cdot dz^- \\ &= dz_1^2 + \dots + dz_n^2 - dz_0^2 \end{aligned}$$

で定義する。次の行列による Möbius 変換で B^n が Q_+^n に等長に写像される。

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & i_0 \\ -i_0 & 1 \end{pmatrix} : B^n \longrightarrow Q_+^n.$$

E^{n+1} に対するのは、 $Pin(n, 1)$ の指数 2 の部分群

$$Pin^+(n, 1) = \{a \in T^{n+1} \mid N(a) = 1\}$$

である。 $Pin^+(n, 1)$ は ρ による E^{n+1} に作用するが、これは実は Q_+^n を不変にし、 Q_+^n 上に等長写像として作用している。 $O(n, 1)$ の元で Q_+^n を集合として不変にするもの全体は $O(n, 1)$ の指数 2 の部分群をつくる。これを $O^+(n, 1)$ とかけば、これは ρ による $Pin^+(n, 1)$ の像であり、 Q_+^n の等長写像群である。

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow Pin^+(n, 1) \xrightarrow{\rho} O^+(n, 1) \longrightarrow 1$$

§3 双曲空間の等長写像の標準型

定義 $g \in \mathbb{C}^{n*}$ は

- i) B^n に不動点をもつとき elliptic といい、
- ii) B^n に不動点をもたず、 ∂B^n に不動点をもつだけとき parabolic といい、
- iii) B^n に不動点をもたず、 ∂B^n に不動点を2つもつとき hyperbolic といい、

$\mathbb{C}^n \ni \text{Pin}^+(n,1)$ の元に対しても同様に定義する。

定理 $\xi \in O^+(n,1)$ の元とすると ξ は $O^+(n,1)$ 内で次のただ一つの標準型と共役になる。

- i) ξ が elliptic のとき

$$P_{i_1 \dots i_r} (\cos \theta_1 + \sin \theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \dots (\cos \theta_s + \sin \theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s})$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \dots \geq \theta_s > 0 \right)$$

- ii) ξ が parabolic のとき

$$P_{i_1 \dots i_r} (\cos \theta_1 + \sin \theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \dots (\cos \theta_s + \sin \theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s}) (1 + i_{r+2s+1} (i_{r+2s+2} + i_\omega))$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \dots \geq \theta_s > 0 \right)$$

- iii) ξ が hyperbolic のとき

$$P_{i_1 \dots i_r} (\cos \theta_1 + \sin \theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \dots (\cos \theta_{s-1} + \sin \theta_{s-1} i_{r+2s-3} i_{r+2s-2}) (\cosh \theta_s + \sinh \theta_s i_{r+2s-1} i_\omega)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \dots \geq \theta_{s-1} > 0, \quad \theta_s > 0 \right)$$

注意 定理は双曲面モデルの等長写像に關して述べられて
いるが、これを上半空間モデルあるいは単位球モデ
ルに翻訳するのは容易にできる。

証明の方針.

それが実際に標準型の一つと共役になることは、構成的
に示す。まず $f_\alpha = \xi$ とする $\alpha \in \text{Pin}^+(n, 1)$ をとる。

例えば α が elliptic のときは、次のようにする。 $\psi^{-1}\alpha\psi$
 $= g \in \mathcal{C}^{n\#}$ は elliptic だから不動点 $v \in B^n$ をとる。

$$h = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^{n\#}$$

とすれば $h v = 0$ 。よって $h g h^{-1} 0 = 0$ 。

$$h g h^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \quad a \in \text{Pin}(n).$$

$f_a \in C(n)$ に對しては、固有値の議論によつて $\eta \in C(n)$
があり、

$$\eta f_a \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_s \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad R_j = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_j & -\sin 2\theta_j \\ \sin 2\theta_j & \cos 2\theta_j \end{pmatrix}$$

$$= f_{i_1 \dots i_r (\cos \theta_1 + \sin \theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \dots (\cos \theta_s + \sin \theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s})}$$

α が parabolic または hyperbolic のときは、上半空間モデルで
同様の議論をすればよい。

さて、これらの標準型が、どの二つも互いに $C^+(n, 1)$
内で共役にならないことは、共役不変関数 T_k を用いて証明

さしる。まず不動点の個数は共役不変量だから、異なる型の等長写像としは共役にはならない。elliptic の場合に T_k を計算してみると、まず

$$r = \min \{ k \mid T_k \neq 0 \}$$

$$r+2s = \max \{ k \mid T_k \neq 0 \}$$

がわかる。さらに $\sin^2 \theta_1, \dots, \sin^2 \theta_s$ の j 番目の基本対称式を P_j とすると、

$$T_{r+2k} = \sum_{j=k}^s (-1)^{j-k} C_k P_j \quad (k=0, \dots, s)$$

となるが、これは P_j について解ける

$$P_j = \sum_{k=j}^s C_k T_{r+2k}$$

従って T_k から $\theta_1, \dots, \theta_s$ も決まってしまう。

References

- [A1] Ahlfors, L.V. Möbius Transformations and Clifford Numbers, Differential Geometry and Complex Analysis, Springer-Verlag, 1985.
- [A2] — Old and New in Möbius Groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, Vol. 9, 1984.
- [A3] — On the fixed points of Möbius transformations in $\mathbb{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, Vol. 10, 1984.
- [F1] Fueter, R. Sur Les Groupes Improprement Discontinus, Comptes. Rendus. Acad. des Sci. Paris 182, 432-434, 1926.
- [F2] — Über Automorphe Funktionen in Bezug auf Gruppen, Die in Der Ebene Uneigentlich Diskontinuierlich Sind, Crelle Journal 157, 1927.
- [M] Maass, H. Automorphe Funktionen von Mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16, 53-104, 1949.
- [V] Vahlen, K. Th. Über Bewegungen und Complexe Zahlen, Math. Annalen, 55, 585-593, 1902.
- [W] Wada, M. Conjugacy Invariants and Normal Forms of Isometries of Hyperbolic Space, preprint.