

2次元インバースカスケードの メカニズムを握るドリフト項

八柳祐一

YUICHI YATSUYANAGI

静岡大学教育学部

FACULTY OF EDUCATION, SHIZUOKA UNIVERSITY

羽鳥尹承

TADATSUGU HATORI

核融合科学研究所

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

1 Introduction

2次元点渦系は、2次元乱流 [1-3]、中性 [4] / 非中性 [5, 6] プラズマなど、様々な現象を理解するために広く用いられてきた。上記で述べた現象に共通するキーワードは、「インバースカスケード」と言っても良いだろう。本論文では、正負点渦から成る負温度系で見られるインバースカスケードのメカニズムについて、点渦系に対する運動論的方程式を用いて理解してみたいと思う。得られた運動論的方程式の右辺に現れる衝突項は、拡散項の他にドリフト項を含んだ、いわゆる Fokker-Planck 型をしているのが特徴的である。このドリフト項の重要な働きを初めて指摘したのは、Chavanis である [7]。

平均流の効果が大きい単一符号の点渦系に対する一般的な運動論的方程式は、Chavanis により、projection operator, BBGKY, Klimontovich 形式などの幾つかの手法により求められている [8, 9]。Chavanis, Lemou らは軸対称系に於ける正負点渦系に関して Fokker-Planck 型の衝突項を導いているが [10]、点渦群の角速度分布が一樣減衰の場合、緩和が止ってしまい Boltzmann 型の平衡解へ到達できないという問題がある。Guiding-center 近似を行った磁化プラズマについて、磁場と垂直な断面内での荷電粒子の運動は、2次元 Euler 方程式下での点渦系と同等となる。このような系について、Klimontovich 形式を使って運動論的方程式を導いた結果として、Dubin, O'Neil らの論文が知られる [11, 12]。しかし、この結果では、ドリフト項の重要な働きを正しく捉えてはいない。

我々は、揺らぎが強く作用する単一符号点渦系に対する Fokker-Planck 型衝突項を有する運動論的方程式を解析的に導いた [13]。本論文では、この単一符号の点渦に対する結

果 [13] を正負点渦に対するものに拡張をした結果について、解説を行う。ここでは、これまで Chavanis や Dubin らによって考えられてきた状況とは異なり、平均流の大きさが相対的に小さく、揺らぎが大きな働きをする点渦系に対する運動論的方程式について考察する。Chavanis らの過去の結果は、主に平均流が強いケースに分類できる。すなわち、今回のケースとは、考えている領域が異なることに注意してほしい。「揺らぎが強く作用する」とは、点渦群が生成するマクロな平均流が弱いことを意味する。これは、すなわち、系の点渦数に上限が存在することを示唆している。なお、点渦数に上限が存在することは、本論文中で用いている直線軌道近似が成り立つために必要な条件でもある。得られた運動論的方程式には、これまでと同様拡散項とドリフト項が含まれ、揺らぎの効果が大きい場合においても、ドリフト項がエネルギー保存や H 定理などを満足するために重要な働きをすることを指摘したい。途中の計算プロセスは単一符合の場合と似ている部分も多いので、主に単一符合の場合とは異なる部分に集中して議論を行いたい。

得られた運動論的方程式の衝突項に含まれる拡散項は平均場のエネルギーを減ずる方向に作用するのに対して、ドリフト項はエネルギーを産するように作用する。結果として、系の全平均場エネルギーは保存する。同様に、拡散項は Boltzmann エントロピーを単調増加させるのに対して、ドリフト項は減ずる方向に作用をするが、トータルとしてはエントロピーは増える、すなわち、 H 定理が成り立つ。最終的に系が完全な熱平衡状態に達すると、エントロピー生成率はゼロとなる。この時の関係式として、Einstein の関係式が得られる。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章では、点渦系と運動論的方程式の簡単な導入を行う。第3章では、拡散項とドリフト項の導出過程と具体的な表式を示す。第4章では、拡散項とドリフト項から成る衝突項が満たす、物理的に望ましい性質について解説する。特に、2次元インバースカスケードにおいて負温度でのドリフト項が重要な働きをしていることは注目に値するだろう。最後に第5章で、結果の検討を行う。

2 2次元点渦系に対する運動論的方程式

N_+ 個の正の点渦と、 N_- 個の負の点渦から構成された、ミクロな2次元渦度場を考える。

$$\hat{\omega} \equiv \hat{\omega}_+ + \hat{\omega}_-, \quad (1)$$

$$\hat{\omega}_+ = \sum_{i=1}^{N_+} \Omega \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2)$$

$$\hat{\omega}_- = - \sum_{i=N_++1}^{N_++N_-} \Omega \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (3)$$

ここで、 $\hat{\omega} = \hat{\omega}(\mathbf{r}, t)$ は2次元 $x-y$ 平面上の渦度の z 成分、 $\delta(\mathbf{r})$ は Dirac の2次元デルタ関数個々の点渦の循環は、 Ω を正の定数として Ω 、又は $-\Omega$ 、 i 番目の点渦の位置ベクトルは $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ で与えられる。今後、簡単のため、曖昧にならない限り、 t 、及び $\mathbf{r}$ への依

存性は明記しない。 Ω の大きさは系の全循環が一定, すなわち $N_{\pm}\Omega = \text{constant}$ と与えられる。¹⁾

離散化された点渦 (2), (3) は, ミクロな Euler 方程式 (4), (5) の解である。以後, 「ミクロ」な量を明記するために, 表記 $\hat{\cdot}$ を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_+(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\hat{\omega}_+(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_-(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\hat{\omega}_-(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (5)$$

ここで, 正点渦の運動を支配する方程式 (4) と負点渦の運動を支配する方程式 (5) は, 移流項 $\hat{\mathbf{u}}$ を通して結合している点に注意して欲しい。ここから先, スペースの節約のため, 二つの方程式を複号同順, すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\omega}_{\pm}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\hat{\omega}_{\pm}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (6)$$

のように記述する。他のマクロな変数を以下のように導入する。

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \hat{\psi}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\omega}(\mathbf{r}', t) \\ &= \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (8)$$

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}|, \quad (9)$$

$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\psi}$ は, それぞれ 2 次元平面上の速度場と流れ函数, $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向の単位ベクトル, $G(\mathbf{r})$ は境界が無い場合のラプラシアン演算子に対する 2 次元 Green 函数である。

本論文で扱う運動論的方程式は, 以下のような形である:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_{\pm} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega_{\pm}) = -\nabla \cdot \Gamma_{\pm}(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

これらの方程式は,

$$\omega_{\pm} \equiv \langle \hat{\omega}_{\pm} \rangle, \quad (11)$$

$$\hat{\omega}_{\pm} = \omega_{\pm} + \delta\omega_{\pm}, \quad (12)$$

と定義されるマクロな渦度の時間発展を記述する。ここで, $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を表す演算子である。同様に, マクロな速度場は,

$$\mathbf{u} \equiv \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}. \quad (14)$$

¹⁾本モデルには, $N_{\pm}$ に上限が存在する。これは, 点渦が作るマクロな平均場の効果が揺らぎに比べて小さいことを意味する。詳しくは, 文献 [13] 中の Appendix を参照してほしい。

と定義される。拡散束 $\Gamma_{\pm} = \Gamma_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ の具体的表式を求めるにあたり, Klimontovich 形式 [14], すなわち, (12), (14) 式をミクロな Euler 方程式 (6) に代入し, 式全体のアンサンブル平均をとる。これにより得られるマクロな階層の拡散束は, 以下のとおりである。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pm} &= \langle \delta \mathbf{u} \delta \omega_{\pm} \rangle \\ &= - \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \delta \omega' \delta \omega_{\pm} \rangle,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla G(\mathbf{r}). \quad (16)$$

ここで, $\delta \omega(\mathbf{r}', t)$ を $\delta \omega'$ と略記した。同様に, 今後, $\omega(\mathbf{r}', t)$ を ω' と略記する。また, 以下の関係式を使用した。

$$\delta \mathbf{u} = - \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta \omega' \quad (17)$$

次の章では, 拡散束 $\Gamma_{\pm}$ の具体形を導出する。

3 拡散束の評価

拡散束 $\Gamma_{\pm}$ の摂動展開に用いる小さなパラメタ ϵ を導入する。運動論的方程式を構成する各項の ϵ に関する次数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}\omega &\approx \nabla^2 \psi \approx O(\epsilon^0), \quad \mathbf{u} \approx \nabla \psi \approx O(\epsilon^0), \quad \nabla \mathbf{u} \approx \nabla^2 \psi \approx O(\epsilon^0), \\ \nabla \omega &\approx O(\epsilon^{1/2}), \quad \delta \omega \approx O(\epsilon^{1/2}), \quad \delta \mathbf{u} \approx O(\epsilon^{1/2}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &\approx O(\epsilon^{1/2}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \approx O(\epsilon^{1/2}), \quad \nabla \nabla \mathbf{u} \approx O(\epsilon^{1/2}), \\ \Gamma &\approx O(\epsilon).\end{aligned}\quad (18)$$

ここで導入された ϵ は, 渦度の勾配が小さいと仮定している以外²⁾ は, 文献 [8, 9, 15] 及び, その関連論文で Chavanis が導入したものと同等である。このスケーリングにより, (10) 式の左辺は $O(\epsilon^{1/2})$, 右辺は $O(\epsilon^{3/2})$ と見積もられる。 $\Gamma_{\pm}$ を ϵ について摂動展開し, (よく行われるように) 適切な次数の項を集めることによって, 拡散束を構成する拡散項, 及びドリフト項の具体的表式を得る。

上記方針に従い拡散束 (10) を書き換えるにあたり, (12) 式, および (14) 式を (6) 式に代入し, 次数が ϵ に一致する項を集めた線形化方程式を導入する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \omega_{\pm} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \delta \omega_{\pm}) = -\delta \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_{\pm}. \quad (19)$$

マクロな量として線形化方式の左辺第 2 項に現れる $\mathbf{u}$, 及び右辺に現れる $\nabla \omega_{\pm}$ は, ミクロな揺らぎに関する時間スケールにおいて定数だと見なせる。すると, (19) 式は積分可能で, 以下の結果を得る:

$$\begin{aligned}\delta \omega_{\pm} &= - \int_{t_0}^t d\tau \delta \mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \cdot \nabla \omega_{\pm} \\ &\quad + \delta \omega_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_0), t_0),\end{aligned}\quad (20)$$

²⁾ この条件は, 後で導入する直線軌道近似に必要となる。

ここで, $\nabla' \omega'_\pm = \nabla_{\mathbf{r}'} \omega_\pm(\mathbf{r}')$ とした。この近似を, 我々は「直線軌道近似」とよぶ。すなわち, 一定時間内で点渦の軌道は直線的であると近似できるものとする [9, 13]。 t_0 の値は, $t - t_0 \gg t_c$ を満たすように選ぶ。ここで, t_c は揺らぎに関する相関時間である。

文献 [13] で述べた単一符号の点渦系の場合とは状況が同一ではないが, 拡散束の導出過程は似ているので, ここでは詳細な式変形は省略する。詳しくは, 文献 [13] を参照してほしい。

まず初めに, (20) 式を (15) 式に代入する。

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_\pm \\
 = & - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega_\pm \\
 & \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle \\
 & - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla' \omega' \\
 & \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_\pm \rangle.
 \end{aligned} \tag{21}$$

(21) 式には, 揺らぎの相関に関して, 三つの項 $\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle$, $\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_+ \rangle$, $\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_- \rangle$ が含まれている。ここでは, まず初めに, $\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_+ \rangle$ と $\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_- \rangle$ の評価を行う。

$$\begin{aligned}
 & \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_+ \rangle + \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_- \rangle \\
 = & \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega \rangle \\
 = & \left\langle \sum_{i=1}^{N_++N_-} \Omega_i^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle \\
 & + \left\langle \sum_{i=1}^{N_++N_-} \sum_{j \neq i}^{N_++N_-} \Omega_i \Omega_j \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right\rangle \\
 & - \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega.
 \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 式の最後の結果の第 1 項は $i = j$ のケースに, 第 2 項は $i \neq j$ のケースに対応する。

$i = j$ のケースについて, 書き換えると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \sum_{i=1}^{N_++N_-} \Omega_i^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r} + \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle \\
 = & \sum_{i=1}^{N_++N_-} \Omega_i^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r} + \mathbf{u}_i(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}_i) \rangle_\xi \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle \\
 = & \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r} + \mathbf{u}(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_\xi \Omega(\omega_+ - \omega_-).
 \end{aligned} \tag{23}$$

ここで, $\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(\tau)$ を評価するために, 以下の確率過程を導入する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(\tau) &= \int_\tau^t \mathbf{u}(\mathbf{r}_i(\tau'), \tau') d\tau' + \boldsymbol{\xi}_i \\
 &\approx \mathbf{u}_i(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}_i.
 \end{aligned} \tag{24}$$

(24) 式の第1項は直線軌道近似, 第2項は, Brown運動を表す。 $\langle \cdot \rangle_\xi$ によって表現される確率過程には, 時刻 t に位置 $\mathbf{r}_i$ に到達する全ての可能な軌道が含まれる。

$i \neq j$ のケースについて, 点渦間の相関は無いものとして無視可能という近似を行う。すると, 当該項は, 以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^{N_++N_-} \sum_{j \neq i}^{N_++N_-} \Omega_i \Omega_j \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right\rangle \\ &= (\omega_+(\mathbf{r}'', \tau) + \omega_-(\mathbf{r}'', \tau)) \times (\omega_+ + \omega_-) \\ & \quad - \frac{1}{N_+} \omega_+(\mathbf{r}'', \tau) \omega_+ - \frac{1}{N_-} \omega_-(\mathbf{r}'', \tau) \omega_-, \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, 以下の関係式を用いた。

$$\sum_i^{N_++N_-} \Omega_i \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle = \omega_+(\mathbf{r}'', \tau) + \omega_-(\mathbf{r}'', \tau), \quad (26)$$

$$\omega_+(\mathbf{r}'', \tau) = N_+ \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle, \quad (27)$$

$$\omega_-(\mathbf{r}'', \tau) = -N_- \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle. \quad (28)$$

$i = j$ と $i \neq j$ のケースを統合し, (22) 式を書き換える。

$$\begin{aligned} & \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_\pm \rangle \\ &= \pm \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r} + \mathbf{u}(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_\xi \omega_\pm \\ & \quad - \frac{1}{N_\pm} \omega_\pm(\mathbf{r}'', \tau) \omega_\pm. \end{aligned} \quad (29)$$

同様に, 残りの1項も評価できて,

$$\begin{aligned} & \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle \\ &= \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_\xi (\omega'_+ - \omega'_-) \\ & \quad - \frac{1}{N_+} \omega_+(\mathbf{r}'', \tau) \omega'_+ - \frac{1}{N_-} \omega_-(\mathbf{r}'', \tau) \omega'_-. \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。

引き続き, (29), (30) 式の評価を進めるために, 以下の保存則を要請する。

$$\int d\mathbf{r}' \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle = 0, \quad (31)$$

$$\int d\mathbf{r} \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_\pm(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (32)$$

これらの関係式を用い, (21) 式を評価する。

$$- \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega_\pm$$

$$\begin{aligned}
& \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle \\
= & -\Omega \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (\omega'_+ - \omega'_-) \nabla\omega_{\pm} \\
& \times \left[\pi\delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right], \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla' \omega' \\
& \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega_{\pm} \rangle \\
= & \pm\Omega \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \omega_{\pm} \nabla' \omega' \\
& \times \left[\pi\delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right]. \tag{34}
\end{aligned}$$

ここまで得られた結果をまとめると、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pm} = & -\Omega \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
& \times \left[\pi\delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right] \\
& \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla\omega_{\pm} \mp \omega_{\pm} \nabla' \omega'] \tag{35}
\end{aligned}$$

ここで、以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau)) \\
= & \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau))). \tag{36}
\end{aligned}$$

得られた拡散則(35)式は、二つの部分、すなわち、 $\nabla\omega_{\pm}$ に比例する拡散テンソル $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 、および $\omega_{\pm}$ に比例するドリフト速度 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ に分けることが可能である。

$$\Gamma_{\pm} = -\mathbf{D} \cdot \nabla\omega_{\pm} \pm \mathbf{V}\omega_{\pm}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = & \Omega \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
& \times \left[\pi\delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right] \\
& \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} (\omega'_+ - \omega'_-) \tag{38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} = & \Omega \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
& \times \left[\pi\delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right] \\
& \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla' \omega' \tag{39}
\end{aligned}$$

(38) 式と (39) 式には、振動項 $\exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ が含まれている。得られた衝突項の性質を正しく理解するためには、この振動項に由来する高周波成分を取り除く必要がある。そのために、得られた結果に空間平均を施す。空間平均を行うサイズは、位置が $\mathbf{r}$ で指定される 1 辺 $2L$ の小さな正方領域 $\Lambda(\mathbf{r})$ ごとに行う。拡散束 $\Gamma_{\pm}$ の空間平均は、以下のよう定義される。

$$\langle \Gamma_{\pm} \rangle_s \equiv \Gamma_{s\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\Lambda(\mathbf{r})|} \int_{\Lambda(\mathbf{r})} d\mathbf{r}'' \Gamma_{\pm}(\mathbf{r}''). \quad (40)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ や ω といったマクロな量は、 $\Lambda(\mathbf{r})$ 内で定数であると見なせるものとする。すなわち、空間平均すべき量として被積分関数内に残るのは、 $\exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ のみである。

空間平均を行った結果得られる式は、以下のとおりである。

$$\Gamma_{s\pm}(\mathbf{r}) \equiv -\mathbf{D}_s \cdot \nabla \omega_{\pm} \pm \mathbf{V}_s \omega_{\pm}, \quad (41)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{k_{\min}} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\omega'_+ - \omega'_-)}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3}, \quad (42)$$

$$\mathbf{V}_s = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{k_{\min}} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot \nabla' \omega'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3}. \quad (43)$$

これは、運動論的方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_{\pm} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega_{\pm}) = -\nabla \cdot \Gamma_{\pm}(\mathbf{r}) \quad (44)$$

の拡散束を与える。 $\Gamma_{s\pm}$ の定義は、(37) 式と同様である。ここで、二つの項 $\mathbf{V}_s \omega_+$ と $\mathbf{V}_s \omega_-$ が反対符号となっていることは興味深い。この逆符号の効果は、文献 [16, 17] に紹介されているような正負符号の点渦からなる系での平衡分布で見られる「異符号粒子の分離」を生む。(42) 式には、二つの未知のパラメタ L , $k_{\min}$ が含まれる。 $L = gR$ と仮定しよう。ここで、 g は $g \ll 1$ 程度の係数である。 $g = 1/4\pi$ とすると、拡散束の表式は若干簡略化され、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \Gamma_s(\mathbf{r}) &= \Gamma_{s+} + \Gamma_{s-} \\ &= -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\ &\quad \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega - (\omega_+ - \omega_-) \nabla' \omega']. \end{aligned} \quad (45)$$

正負ケースを加算した拡散束は、以下の運動論的方程式に対応する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) = -\nabla \cdot \Gamma_s(\mathbf{r}). \quad (46)$$

4 拡散束の物理的意味づけ

本章では、拡散束 (45) が持つ物理的性質について検討する。

4.1 局所／大域熱平衡状態に於ける拡散束

局所熱平衡状態では、システムに温度が異なる小領域が点在する。このような小領域ごとに、拡散束 (45) がゼロとなることを示そう。(45) 式をシンボリックな形に書き換える。

$$\Gamma_s(\mathbf{r}) = -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \gamma[\omega, \psi; \omega', \psi'] \quad (47)$$

ここで、 γ は $\omega, \psi, \omega', \psi'$ の汎関数を表す。システム内の小領域ごとに局所的に均一の温度となっている状態について考える。このような状態では、以下の局所的平衡状態を記述する式が成り立つ。

$$\omega_{\text{leq}\pm} = \omega_{0\pm} \exp(\mp \beta_{\text{leq}} \Omega \psi_{\text{leq}}). \quad (48)$$

β_{leq} は、各小領域ごとに異なる温度を表す。(48) 式を (47) 式中の γ に代入する。 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ が同じ小領域に含まれているとすると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \gamma[\omega_{\text{leq}}, \psi_{\text{leq}}; \omega'_{\text{leq}}, \psi_{\text{leq}}] \\ = & \frac{(\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}})}{|\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}|^3} \\ & \times (\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}) \cdot [(\omega'_{\text{leq}+} - \omega'_{\text{leq}-}) \nabla(\omega_{\text{leq}+} + \omega_{\text{leq}-}) - (\omega_{\text{leq}+} - \omega_{\text{leq}-}) \nabla'(\omega'_{\text{leq}+} + \omega'_{\text{leq}-})] \\ = & -\beta \Omega (\omega'_{\text{leq}+} - \omega'_{\text{leq}-}) (\omega_{\text{leq}+} - \omega_{\text{leq}-}) \\ & \times \frac{(\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}})}{|\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}|^3} (\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}) \cdot (\nabla \psi_{\text{leq}} - \nabla' \psi'_{\text{leq}}) \\ = & 0 \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、関係式 $\mathbf{u}_{\text{leq}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi_{\text{leq}}$ を使った。 $\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}$ は $\nabla \psi_{\text{leq}} - \nabla' \psi'_{\text{leq}}$ に垂直なので、 γ は恒等的にゼロとなる。すなわち、詳細釣り合いが各小領域内で成り立っていることを意味する。さらに緩和が進み、系全体で β が一様となると、以下の Boltzmann 型熱平衡解へ到達する [16]。

$$\omega_{\text{eq}\pm} = \omega_{0\pm} \exp(\mp \beta \Omega \psi_{\text{eq}}), \quad (50)$$

この状態では、

$$\begin{aligned} \nabla' \omega'_{\text{eq}} &= \nabla'(\omega'_{\text{eq}+} + \omega'_{\text{eq}-}) \\ &= -\beta \Omega (\omega'_{\text{eq}+} - \omega'_{\text{eq}-}) (\nabla' \psi'_{\text{eq}} - \nabla \psi_{\text{eq}} + \nabla \psi_{\text{eq}}). \end{aligned} \quad (51)$$

となり、 $(\mathbf{u}_{\text{eq}} - \mathbf{u}'_{\text{eq}}) \cdot (\nabla' \psi'_{\text{eq}} - \nabla \psi_{\text{eq}}) = 0$ が成り立つため、ドリフト項 (43) は以下のように書き換えられ、

$$\mathbf{V}_{s,\text{eq}} = -\beta \Omega \mathbf{D}_{s,\text{eq}} \cdot \nabla \psi_{\text{eq}} \quad (52)$$

トータルの拡散束はゼロとなる。(52) 式は、いわゆる Einstein の関係式に相当するものである [8, 9]。

4.2 熱平衡状態近傍での $d\omega/d\psi$ の符号

もし、逆温度 β の符号が負ならば、

$$\frac{d\omega_{\text{eq}}}{d\psi_{\text{eq}}} = -\beta\Omega(\omega_{\text{eq}+} - \omega_{\text{eq}-}) \quad (53)$$

より、 $d\omega_{\text{eq}}/d\psi_{\text{eq}} \geq 0$ が得られる。ここで、

$$\omega_{\text{eq}} = \omega_{\text{eq}+} + \omega_{\text{eq}-} \quad (54)$$

である。また、(50) 式を用いた。点渦系は、いわゆる「激しい緩和 (violent relaxation)」, すなわち平均場により駆動される無衝突緩和過程により、平衡解近傍の状態へ容易に遷移可能である。到達した平衡状態近傍の状態では、ほぼ、

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = 0 \quad (55)$$

または、同等の関係式

$$\omega = \omega(\psi). \quad (56)$$

が成り立っていると考えられる。このような平衡状態近傍では

$$\frac{d\omega}{d\psi} \geq 0 \quad (57)$$

が成り立つことも十分期待できる。以下では、(57) 式が成立していることを仮定する。

4.3 エネルギー保存則

平均場エネルギー E の時間変化は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{\partial \omega'}{\partial t} \omega + \omega' \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \\ &= \int d\mathbf{r} \psi \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned} \quad (58)$$

ここで、関係式

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \psi \omega \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \omega' \omega. \end{aligned} \quad (59)$$

を用いた。空間平均後の運動方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = -\nabla \cdot \Gamma_s \quad (60)$$

を (58) 式に代入し、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int d\mathbf{r} \psi (-\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) - \nabla \cdot \Gamma_s) \\
&= \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \mathbf{u}\omega + \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \Gamma_s \\
&= \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \Gamma_s \\
&= -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \nabla \psi \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega - (\omega_+ - \omega_-) \nabla' \omega'] \quad (61)
\end{aligned}$$

(61) 式での積分変数 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ を入れ替えた積分と元の積分の半々の和をとることにより、以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -\frac{\Omega}{2R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' (\nabla \psi - \nabla' \psi') \cdot \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\
&\quad \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega - (\omega_+ - \omega_-) \nabla' \omega'] \\
&= 0. \quad (62)
\end{aligned}$$

これは、拡散束が系の平均場エネルギーを保存することを意味する。

さらに、上記のエネルギー保存は、拡散項によるエネルギー散逸とドリフト項によるエネルギー生成が釣り合うことにより実現されていることも指摘したい。それは、以下のよう説明される。(61) 式を、拡散項に関連した部分とドリフト項に関連した部分に分離する：

$$\frac{dE}{dt} = \left. \frac{dE}{dt} \right|_D + \left. \frac{dE}{dt} \right|_V = 0, \quad (63)$$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_D = -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \nabla \psi \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot (\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega, \quad (64)$$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_V = \frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \nabla \psi \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot (\omega_+ - \omega_-) \nabla' \omega'. \quad (65)$$

渦度 ω が流れ関数 ψ の関数である場合には ((56) 式参照), (64) 式, 及び (65) 式は以下のように書き換えられる。

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_D = -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\nabla \psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega'_+ - \omega'_-) \frac{d\omega}{d\psi}, \quad (66)$$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_V = \frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\nabla \psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega_+ - \omega_-) \frac{d\omega'}{d\psi'}. \quad (67)$$

よって, $d\omega/d\psi \geq 0$ ならば,

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_V = - \left. \frac{dE}{dt} \right|_D \geq 0. \quad (68)$$

と結論づけられる。拡散項はエネルギーを減少させるのに対して、ドリフト項はエネルギーを増加させる働きを持っていることがわかる。同符号点渦は凝集するとエネルギーが増大するので、拡散項は常識通り凝集した点渦(クランプ)を崩す一方、ドリフト項は逃げ出そうとする点渦を拉致して再びクランプへ引き戻す働きをもっていると解釈できる。

4.4 H 定理

Boltzmann の流儀に従い、エントロピー関数 S を H 関数で定義する。

$$S = -k_B H, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} H &= \int d\mathbf{r} \frac{\omega_+}{\Omega} \ln \frac{\omega_+}{\Omega} + \frac{\omega_-}{-\Omega} \ln \frac{\omega_-}{-\Omega} + \text{const.} \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \omega_+ \ln \omega_+ - \omega_- \ln |\omega_-| - 2N \ln \Omega + \text{const.} \end{aligned} \quad (70)$$

H 関数の時間微分は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \frac{\partial \omega_+}{\partial t} (\ln \omega_+ + 1) - \frac{\partial \omega_-}{\partial t} (\ln |\omega_-| + 1) \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \mathbf{u} \omega_+ \cdot \nabla \ln \omega_+ - \mathbf{u} \omega_- \cdot \nabla \ln |\omega_-| \\ &\quad + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_{s+} \cdot \nabla \ln \omega_+ - \Gamma_{s-} \cdot \nabla \ln |\omega_-| \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_+ - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_- \\ &\quad + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_{s+} \cdot \nabla \ln \omega_+ - \Gamma_{s-} \cdot \nabla \ln |\omega_-| \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_{s+} \cdot \nabla \ln \omega_+ - \Gamma_{s-} \cdot \nabla \ln |\omega_-|. \end{aligned} \quad (71)$$

簡単のため、以下の記法を導入する。

$$\begin{aligned} \nabla \ln \omega_+ &= \mathbf{v}_+, \quad \nabla \ln |\omega_-| = \mathbf{v}_-, \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}' &= \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (72)$$

(45) 式を (71) 式へ代入する。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= -\frac{1}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \mathbf{v}_+ \cdot \frac{\mathbf{U}\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^3} \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega_+ - \omega_+ \nabla' \omega'] \\ &\quad - \frac{1}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \mathbf{v}_- \cdot \frac{\mathbf{U}\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^3} \cdot [(\omega'_+ - \omega'_-) \nabla \omega_- + \omega_- \nabla' \omega'] \\ &= -\frac{1}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{U}|^3} \\ &\quad \times [\omega_+ \omega'_+ (\mathbf{v}_+ \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \cdot (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}'_+)) \\ &\quad - \omega_- \omega'_- (\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \cdot (\mathbf{v}_- - \mathbf{v}'_-)) \\ &\quad + (\omega'_+ - \omega'_-) (\omega_+ \mathbf{v}_+ \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_- + \omega_- \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_+)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_-\omega'_-(\mathbf{v}_-\cdot\mathbf{U}\mathbf{U}\cdot(\mathbf{v}_--\mathbf{v}'_-)) \\
& -\omega_+\omega'_-(\mathbf{v}_+\cdot\mathbf{U}\mathbf{U}\cdot(\mathbf{v}_++\mathbf{v}'_-)) \\
& -\omega_-\omega'_+(\mathbf{v}_-\cdot\mathbf{U}\mathbf{U}\cdot(\mathbf{v}_-+\mathbf{v}'_+))].
\end{aligned} \tag{73}$$

(73) 式中の積分変数 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ を入れ替えたものと入れ替えないものを半分ずつ加算する。

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} = & -\frac{1}{2R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{U}^3|} \\
& \times [\omega_+\omega'_+|(\mathbf{v}_+-\mathbf{v}'_+)\cdot\mathbf{U}|^2 \\
& +\omega_-\omega'_-|(\mathbf{v}_--\mathbf{v}'_-)\cdot\mathbf{U}|^2 \\
& -\omega_+\omega'_-|(\mathbf{v}_+-\mathbf{v}'_-)\cdot\mathbf{U}|^2 \\
& -\omega_-\omega'_+|(\mathbf{v}_--\mathbf{v}'_+)\cdot\mathbf{U}|^2] \leq 0.
\end{aligned} \tag{74}$$

(74) 式中の被積分関数は正、又はゼロなので、 dH/dt は負、またはゼロとなる。よって、エントロピー関数 (69) は、広義単調増加関数となる。

さらに、拡散項はエントロピーを増加させるのに対して、ドリフト項はエントロピーを減少させる働きを持つことを示すことができる。(71) 式を、拡散項に由来する部分とドリフト項に由来する部分を分離する。なお、ここでは H 関数の代わりに、エントロピー関数 S を用いた。

$$\frac{dS}{dt} = \left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{D}} + \left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{V}} \geq 0, \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{D}} &= \frac{k_B}{R} \int d\mathbf{r} \frac{\nabla\omega_+ \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla\omega_+}{\omega_+} - \frac{\nabla\omega_- \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla\omega_-}{\omega_-} \\
&= \frac{k_B}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\nabla\omega_+ \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{u}')|^2}{\omega_+} - \frac{|\nabla\omega_- \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{u}')|^2}{\omega_-},
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{V}} &= -\frac{k_B}{R} \int d\mathbf{r} \mathbf{V} \cdot \nabla\omega \\
&= -\frac{k_B}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \nabla\omega \cdot \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{u}')(\mathbf{u}-\mathbf{u}')}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|^3} \cdot \nabla'\omega'.
\end{aligned} \tag{77}$$

(76) 式は、 $d\omega/d\psi$ の符号に関わらず

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{D}} \geq 0 \tag{78}$$

が成り立つことを示す。一方、(77) 式は以下のように書き換えられ、

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{V}} = -\frac{k_B}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\nabla\psi \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|^3} \frac{d\omega}{d\psi} \frac{d\omega'}{d\psi'} \tag{79}$$

仮定 (57) が成り立つとすると、

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{V}} \leq 0. \tag{80}$$

を得る。 $\beta < 0$ なる熱平衡状態においては,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{v}} = - \left. \frac{dS}{dt} \right|_{\mathbf{D}} \leq 0, \quad (81)$$

となり, エントロピー生成は止まることが確認できる。上記の結果は, 負温度での熱平衡分布でよく見られる同符号で凝集したクランプが生成されるためには, クランプ生成のために減らさなくてはならないエントロピーを捨てるための背景渦が必ず必要であることを示している。これは, 純電子プラズマによる渦実験 [18–21] や数値シミュレーションによっても既に示唆されていた結果である [17]。

5 検討&結論

本論文では, 集団運動効果を含まない非軸対称, 2次元正負点渦系に対する Fokker-Planck 型衝突項を具体的に導出した。得られた衝突項は思いの外対称的で, きれいな形をしている。

得られた拡散束 (45) は, $O(\epsilon)$ の大きさである。一方, 簡単な見積により, 拡散項は点渦数 $N_{\pm}$ に対して $1/N_{\pm}$ の大きさであることが分かる。すなわち, 摂動展開で用いた小さなパラメタ ϵ は結果的に $1/N_{\pm}$ 程度であることがわかる。

2次元乱流での逆カスケードにおいて, ドリフト項が大きな働きをしていることを再度指摘したい。(41)式において, ドリフト項の符号は渦度の符号に調和して変化するのに対して, 拡散項の符号は常に負である。この結果は, ドリフト項が負温度点渦系の平衡解としてよく知られた「正負点渦が分離した分布」を生成する主たる機構を提供していると言えるだろう。

得られた拡散束は物理的に望ましいいくつかの性質を持っているが, 同時に以下の問題も残っている。第1に, 最終的に得られた結果 (42) 式, 及び (43) 式には, 二つの未知のパラメタ k_{min} , L が残ったままであり, これを陽に決定する方法は, いまのところ存在しない。第2に, $\mathbf{D}$ に関する積分 (42) と, $\mathbf{V}$ に関する積分 (43) は, 個別に発散積分になっていることが挙げられる。ただし, 両方を組み合わせた $\Gamma_{s\pm} = -\mathbf{D}_s \cdot \nabla \omega_{\pm} \pm \mathbf{V}_s \omega_{\pm}$ は, 正則でる。これらの問題を解決すべく, 引き続き, 検討を進める予定である。

謝 辞

The authors are grateful to Prof. Chavanis for helpful comments. 本研究は, JSPS 科研費 24540400 の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- [1] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan: Rev. Mod. Phys. **78** (2006) 87.

- [2] P. Tabeling: Phys. Rep. **362** (2002) 1.
- [3] R. H. Kraichnan and D. Montgomery: Rep. Prog. Phys. **43** (1980) 547.
- [4] J. B. Taylor and B. McNamara: Phys. Fluids **14** (1971) 1492.
- [5] D. H. E. Dubin and D. Z. Jin: Phys. Lett. A **284** (2001) 112.
- [6] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, T. Ebisuzaki, T. Hatori and T. Kato: Phys. Plasmas **10** (2003) 3188.
- [7] P. H. Chavanis: Phys. Rev. E **58** (1998) R1199.
- [8] P. H. Chavanis: Phys. Rev. E **64** (2001) 026309.
- [9] P. H. Chavanis: Physica A **387** (2008) 1123.
- [10] P. H. Chavanis and M. Lemou: Eur. Phys. J. B **59** (2007) 217.
- [11] D. H. E. Dubin and T. M. O'Neil: Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1286.
- [12] D. H. E. Dubin: Phys. Plasmas **10** (2003) 1338.
- [13] Y. Yatsuyanagi, T. Hatori and P. H. Chavanis: arXiv:1308.1765.
- [14] Y. L. Klimontovich: *The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967).
- [15] P. H. Chavanis: J. Stat. Mech. **2012** (2012) P02019.
- [16] G. Joyce and D. Montgomery: J. Plasma Phys. **10** (1973) 107.
- [17] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida and T. Ebisuzaki: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 054502.
- [18] A. Sanpei, Y. Kiwamoto, K. Ito and Y. Soga: Phys. Rev. E **68** (2003) 016404.
- [19] Y. Soga, Y. Kiwamoto, A. Sanpei and J. Aoki: Phys. Plasmas **10** (2003) 3922.
- [20] D. Z. Jin and D. H. E. Dubin: Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4434.
- [21] K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn and C. F. Driscoll: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3277.