

(t)-design に関する Gross タイプの定理

阪大理 永尾 汎 (Hiroshi Nagao)

鹿大理 厚見 寅司 (Tsuyoshi Atsumi)

上越教育大 伊藤 達郎 (Tatsuro Ito)

Def. $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $F = \{\alpha, \beta, \dots\}$ $|F| = q$

$V = N \times F$ $S \subseteq V$ $S = \{(i_1, \alpha_1), \dots, (i_k, \alpha_k)\}$

$S : (k)\text{-subset} \xleftrightarrow{d.} i_1, \dots, i_k \text{ はすべて異なる.}$

Def. $\mathcal{B}$ は $(k)\text{-subsets}$ のある family とするとき

$(V, \mathcal{B})$ が $(t) - ((n, q), k, \lambda)$ design $\xleftrightarrow{d.} \forall (t)\text{-subset } T$

を含む $B \in \mathcal{B}$ の個数が λ 度 λ 個.

(t) -design は また t -design of type $q-1$ [2] として

知られてゐる. 以下 $2 \leq t < k < n$, $2 \leq q$ と仮定する.

Lemma 1. $(V, \mathcal{B}) : (t) - ((n, q), k, 1)$ design とする.

$I : (i)\text{-subset}$, $J : (j)\text{-subset}$ s.t.

(i) $I \cap J = \emptyset$

(ii) $\exists B \in \mathcal{B} \supseteq I \cup J$.

とあるとき $\lambda(I, J) = \#\{C \in \mathcal{B} \mid I \subseteq C, J \cap C = \emptyset\}$

この数は i, j, t, n, q, h で決まり、 $\lambda_{i,j}$ と表す。

$$\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j-1} - \lambda_{i+1,j-1} \quad \text{が成り立つ。}$$

Theorem 1. $(V, \mathcal{B}) : (t) - ((n, q), h, 1)$ design $t = \text{odd}$
 $\Rightarrow \lambda_{0,h} > 0$

Theorem 2. $(V, \mathcal{B}) : (t) - ((n, 2), h, 1)$ design
 $t = \text{even} \Rightarrow \lambda_{0,h} > 0$

上の定理は Gross の定理 [3] の拡張である。
 t -design の時と同様に (t) -design に対しても " λ_i " とか
 "design の拡大" 等が定義される。

次のような結果を得る。

$$\lambda_i = \frac{\lambda \binom{n-i}{t-i} q^{t-i}}{\binom{h-i}{t-i}} \quad 0 \leq i \leq t.$$

$(V, \mathcal{B}) : (t) - ((n, q), h, \lambda)$ design が拡大可能な場合は

$$b(n+1)q \equiv 0 \pmod{h+1}$$

Fisher's Inequality

$(2) - ((n, q), h, \lambda)$ design ならば

$$b \geq nq$$

$\lambda=1$ である (t)-design の例

例 1. $(N, \mathcal{C}) : 3-(2^d, 4, 1)$ design である ($d \geq 3$)

$$N = \{1, 2, \dots, 2^d\}, F = GF(2), V = N \times F$$

$$\mathcal{B} = \{B \mid B = \{(i_1, \alpha_1), (i_2, \alpha_2), (i_3, \alpha_3), (i_4, \alpha_4)\} \text{ (4)-subset of } V, \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \in \mathcal{C}, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0\}$$

$(V, \mathcal{B}) : (3)-(2^d, 2), 4, 1)$ design である.

例 2. (t)- $((h, g), h, \lambda)$ design $(V, \mathcal{B})$ は $t \leq t$

制約数 h , 水準 g , $3 \leq t$ の orthogonal array とおける
である。 $A = \{1, 2, \dots, h\} \times F$

$(A, \mathcal{B}) : \text{index } \lambda \text{ の orthogonal array } (h, h, g, t)$ と
する。 $G \triangleq N = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n > h$) 上の 1 重可移群とする。

$B \in \mathcal{B}$ に対して $B^\sigma = \{(i^\sigma, \alpha) \mid (i, \alpha) \in B\}$ と定める。

$$V = N \times F \quad \mathcal{B}^G = \{B^\sigma \mid B \in \mathcal{B}, \sigma \in G\}$$

$(V, \mathcal{B}^G) : (t)-((n, g), h, \lambda')$ design となる。

Orthogonal array $(15, 8, 7.5)$ は存在する。 []

M_{24} は $\{1, 2, \dots, 24\}$ 上の 5 重可移群である
上の "参照"

$(5)-((24, 17), 8, 1)$ design が存在する。

Proposition 1. $(t)-(n, v, k, 1)$ design with
 $1 < t+1 \leq k < n$ が存在すれば

$$(n-t-1)q \geq (t+1)(k-t-1)$$

とは Bush, Cameron の結果の拡張である。

以下 $(V, B) : (t)-(n, v, k, 1)$ design に対して成立する
 結果である。

Lemma 2.
$$\lambda_{i,j} = \sum_{r=0}^j (-1)^r \binom{j}{r} \lambda_{i+r}.$$

特に
$$\binom{n-t}{k-t} \lambda_{0,k} = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-r}{k-r} q^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}.$$

証明) sieve method を用いる。

$$f(t) = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-r}{k-r} q^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}$$

となく

次の公式は重要である。

Lemma 3.
$$f(k)q^{-k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{n-k}{k-r} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^r > 0$$

よって $(*) \quad f(t)q^{-t} = f(k)q^{-k} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}$

$$- \left\{ \sum_{r=t}^b (-1)^r \binom{b}{r} \binom{n-r}{b-r} q^{-r} \right\}.$$

証明

$$(1+x)^n \left(1 - \frac{1}{q} \frac{x}{x+1} \right)^b = (1+x)^{n-b} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{q} \right) x \right)^b$$

展開して x^b の係数を考えよ.

Lemma 4. $\frac{n-m}{b-m} \geq \frac{n-p}{b-p} \quad (n > b \geq p)$

$$\frac{n-t+1}{b-t+1} \geq \frac{b}{t+1} \geq \frac{b-l}{l+1} \quad (l \geq t)$$

証明

Fisher の不等式より

定理 1 の証明

$t = \text{odd}$ より (*) は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(t) q^{-t} &= f(b) q^{-b} + \left\{ \binom{b-1}{t-1} \binom{n-t}{b-t} q^{-t} - \binom{b}{t+1} \binom{n-t-1}{b-t-1} q^{-t-1} \right\} \\ &\quad + \sum_l \left\{ \binom{b}{l} \binom{n-l}{b-l} q^{-l} - \binom{b}{l+1} \binom{n-l-1}{b-l-1} q^{-l-1} \right\}. \end{aligned}$$

$$l \in \{t+2, t+4, \dots, 2 \left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor + 1\}.$$

$$\binom{h}{l} \binom{n-l}{h-l} q^{-l} - \binom{h}{l+1} \binom{n-l-1}{h-l-1} q^{-l-1}$$

$$= q^{-l-1} \binom{h}{l} \binom{n-l-1}{h-l-1} \left(\frac{n-l}{h-l} q - \frac{h-l}{l+1} \right) \geq 0$$

Lemma 4.5)

$$\text{よ、 } f(t) > 0 \quad \therefore \lambda_0, h > 0.$$

定理 2 の証明に、 $t = \text{even}$, $q = 2$ のとき

$t = 2$ 一般の q について成立

$t = 4$ あとで証明する

$t \geq 6$ と仮定する。

$h - t = 1$ or 2 公式 (*) を用いて定理は成立

$$t \geq 2(h - t) \quad n \geq 2h \Rightarrow f(t) > 0$$

$$t \geq 6, \quad h - t = 3 \text{ or } 4 \Rightarrow f(t) > 0$$

$h - t \geq 4$ のとき Proposition 1 より $n \geq 2h$.

Lemma 5 (Strong Fisher's inequality)

(2)- $((n, q), h, 1)$ design $(V, \mathcal{B})$ のパラメータ q についての

(i), (ii) のうち少なくとも一つは成立する。

$$(i) \quad (n-1)q = h(h-1)$$

$$(ii) \quad (n-1)q = (h-1)(h+q)$$

$$\Rightarrow q \geq 2\sqrt{h}$$

or

$$(n-1)q > (h-1)(h + \sqrt{h})$$

(2) - $((n-t+2, 2), h-t+2, 1)$ による strong Fisherh inequality を $\frac{t}{2}$ 回用 $t=1$ のとき

$$q=2, \quad 2\sqrt{h-t+2} \geq 2\sqrt{3} \geq 2$$

より (i), (ii) の場合の可能な拡大を決定する。

可能な t パラメータ λ は直接公式 (*) で計算 ($\lambda, h > 0$ かつ t)。

Proposition 2. $(t) - ((n, 2), h, 1)$ design $t \geq 4$, even.

$$n \geq 2h \quad \text{かつ}$$

$$(n-2h+t-2) \cdots (n-2h+1) q^{t-2} \frac{t!}{3}$$

$$> h(h-1)^2 \cdots (h-t+3)^2 (h-t+2)$$

$$t \geq 4 \quad f(t) > 0$$

今 $(t) - ((n, 2), h, 1)$ design (V, B) に対して $t \geq 4$ かつ $n \geq 4h$

仮定する。

$$n \geq 2h, \quad t \geq 6, \quad h-t \geq 4$$

$$(n-t+1)2 > (h-t+1)(h-t+2 + \sqrt{h-t+2})$$

もし $k-t \geq 9$ ならば

$$(n-2k+t-2) \cdots (n-2k+1) 2^{t-2} \frac{t!}{3} \\ > k(k-1)^2 \cdots (k-t+3)^2 (k-t+2)$$

$k-t = 8, 7, \dots, 4$ の場合と, $t=4$ の場合が $n=2$.

Remark.

$t = \text{even}$ のとき q が小さいとき上の方法で示さね

が $\frac{1}{2}t$ 個が少く (ゆかりで表).

References

1. Cameron. Extremal results and Configuration Theorems For Steiner systems. Annals of Discrete Mathematics 7(1980) 43-63.
2. Deza. Four fundamental parameters of code and their combinatorial significance. Info. and Control 23 (1973) 407-438.
3. Gross. Intersection Triangles and Bloch intersection Numbers of Steiner systems. Math. Z. 139 (1974) 87-104.