

slice algebra について

山形大 理 富 山 淳

A, B を Banach 代数とし, A, B の α -ノルムによるテンソル積を $A \otimes_\alpha B$ とかく. α が Schatten の意味での λ -ノルムより小さくなるとき $\varphi \in A^*$ について $A \otimes_\alpha B$ から B への線型連続写像 R_φ を

$$R_\varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i=1}^n \langle a_i, \varphi \rangle b_i$$

とつくること出来る. $\psi \in B^*$ についても同様に

$$L_\psi : A \otimes_\alpha B \longrightarrow A$$

が定義出来る. この時 R_φ, L_ψ の定義から等式

$$\langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

が $A \otimes_\alpha B$ の任意の元 x について成立する. これを Fubini 型の定理とす.

次に α が更に local property をもつととし, Banach 代数 $A_0, B_0, A(\subset A_0), B(\subset B_0)$ について $A_0 \otimes_\alpha B_0$.

$A \otimes B$ が又 Banach 代数になっているとする。

定義. $A \otimes B$ の Banach 部分代数 S が $A \otimes B$ を含み、任意の $\varphi \in A^*$, $\psi \in B^*$ に対して $R_\varphi(S) \subset B$ 且つ $L_\psi(S) \subset A$ となるとき、 S を $A \otimes B$ の slice algebra とする。

補題. 1. S を $A \otimes B$ の slice algebra とし、 $\varphi \in A^*$, $\psi \in B^*$ をとると $\varphi \otimes \psi$ の S 上への product functional の形での拡大は一意である。

証明. $\tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ を φ の A 上への拡大, $\tilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ を ψ の B 上への拡大とすると、任意の $x \in S$ について

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi} \rangle &= \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \tilde{\psi} \rangle = \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \psi \rangle \\ &= \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \hat{\psi} \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle = \langle L_{\hat{\psi}}(x), \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle L_{\hat{\psi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle x, \hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

Slice algebra は作用素環のテンソル積にもあらわれ、重要な役割を果たすことが予想されるが、ここでは Function algebra のテンソル積での slice algebra の意味を、多変数解析関数における Hartogs の定理などを背景に考えてみる。

A, B をコンパクトな空間 X, Y における関数環とする。

このとき A, B の λ -ノルムで定義される積 $A \otimes B$ は自然な意味で $C(X) \otimes C(Y) = C(X \times Y)$ の部分環として、 $X \times Y$ 上の関数環と見做す。今 $C(X)$ 上の X に関する evaluation から与えられる関数による対応を R_x , $y \in Y$ によるものを L_y とかくことにすると、容易にわかるように $F(x, y)$ について $R_x(F)$, $L_y(F)$ は関数 F の slice $\{x\} \times Y$ 及び $X \times \{y\}$ への制限関数とありわしてゐる。従つて R_x , L_y は homomorphism である。さて R_x , L_y は $R_y (\varphi \in C(X)^*)$, $L_y (\psi \in C(Y)^*)$ の中の特例のものであるが、これについて

補題 2. $F \in C(X \times Y)$ について次のことは同値である。

(i) 任意の $\varphi \in C(X)^*$, $\psi \in C(Y)^*$ について

$$R_\varphi(F) \in B \text{ 且つ } L_\psi(F) \in A$$

(ii) 任意の $x \in X$, $y \in Y$ について

$$R_x(F) \in B \text{ 且つ } L_y(F) \in A$$

(iii) X, Y の dense な集合 Z_1, Z_2 について

$$R_x(F) \in B \text{ 且つ } L_y(F) \in A$$

証明. (iii) から (i) をみるべく。今ある $\varphi \in C(X)^*$ が存在して $R_\varphi(F) \notin B$ とすると、

$$\exists \psi \in C(Y)^* : \langle B, \psi \rangle = 0, \langle R_\varphi(F), \psi \rangle \neq 0.$$

よつて任意の $x \in Z_1$ について

$$L_y(F)(x) = \langle R_x(F), \varphi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow L_y(F)(x) = 0 \quad \text{for all } x \in X.$$

しかしこれは

$$\langle L_y(F), \varphi \rangle = \langle R_y(F), \varphi \rangle \neq 0$$

に矛盾する。よって任意の y について $R_y(F) \in B$. L_y についても同様である。以上から

定理 1. $T = A \otimes B$ については最大の slice algebra が存在する。

これを $S_T(X \times Y)$ とかくことにする。

証明. $S_T(X \times Y) = \{ F \in C(X \times Y) \mid \text{任意の } x \in X, y \in Y \text{ について } R_x(F) \in B, L_y(F) \in A \}$

とすればよい。

slice algebra についての基本的な課題は $S_T(X \times Y)$ が T と等しくなるかどうかで、これは $X \times Y$ 上での連続関数が各変数について A, B とこのクラスに限定された連続性(解析性(?))をもつとき、 $A \otimes B$ に入るかどうかという問題であり、Hartogs の定理との関連が生ずる理由もこの辺にある。そしてこれに於ける形の結果を関数環で求めるのがここでの目的であるが、矢張り準備として

補題3 $S_T(X \times Y)$ の Silov 境界 $\partial_{S_T(X \times Y)}$ は ∂_T に等しい。従って $\partial_{S_T} = \partial_A \times \partial_B$

証明. $S_T(X \times Y)$ の定義から $\partial_A \times \partial_B$ が境界の一部分になることは殆んど明らかだから上のことが成立つる。

A, B の maximal ideal の空間を M_A, M_B とし、Gelfand 表現を $f \rightarrow \hat{f}$ であらわすことにする。今 $\omega \in M_A$ について ω を A 上の関数と見て、 $C(X)$ への拡大 $\hat{\omega}$ を考える。 M_B の元についてと同様にすれば

補題4. $(\omega_1, \omega_2) \in M_A \times M_B$ とすると $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は $S_T(X \times Y)$ 上 multiplicative である。

証明. $F, G \in S_T(X \times Y)$ について

$$\begin{aligned} R_{\hat{\omega}_1}(FG)(y) &= \langle FG, \hat{\omega}_1 \otimes e_y \rangle = \langle L_y(FG), \hat{\omega}_1 \rangle \\ &= \langle L_y(F)L_y(G), \omega_1 \rangle = \langle L_y(F), \omega_1 \rangle \langle L_y(G), \omega_1 \rangle \\ &= R_{\hat{\omega}_1}(F)(y) R_{\hat{\omega}_1}(G)(y) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } R_{\hat{\omega}_1}(FG) = R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_1}(G)$$

このことは $L_{\hat{\omega}_2}$ についても同様である。

$$\begin{aligned} \langle FG, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle &= \langle R_{\hat{\omega}_1}(FG), \hat{\omega}_2 \rangle \\ &= \langle R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_1}(G), \omega_2 \rangle = \langle R_{\hat{\omega}_1}(F), \omega_2 \rangle \langle R_{\hat{\omega}_1}(G), \omega_2 \rangle \\ &= \langle F, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle \langle G, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle \end{aligned}$$

ここで補題1によつて $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は $S_T(X \times Y)$ 上一意にきまるが、この対応 $(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は以下に述べるように連続になるから、 $M_A \times M_B$ は $S_T(X \times Y)$ の極大イデアル空間の部分空間と見とることが出来る。

$M_A \times M_B$ 内で今 $(\omega_1^*, \omega_2^*) \longrightarrow (\omega_1, \omega_2)$ とする。 $\{\hat{\omega}_1^*\}$, $\{\hat{\omega}_2^*\}$ をそれぞれ $C(X)$, $C(Y)$ 上へのノルムを保存した拡大汎関数の集合とすると、共役空間の単位球の弱コンパクト性から、subnet $\{\hat{\omega}_1^{\alpha}\}$, $\{\hat{\omega}_2^{\alpha}\}$ が存在して $\hat{\omega}_1^{\alpha} \longrightarrow \varphi$, $\hat{\omega}_2^{\alpha} \longrightarrow \psi$ と弱収束する。これから $\varphi|A = \omega_1$, $\psi|B = \omega_2$, 又 $\hat{\omega}_1^{\alpha} \otimes \hat{\omega}_2^{\alpha}$ は $\varphi \otimes \psi$ に弱収束するから補題1より $S_T(X \times Y)$ 上では

$$\hat{\omega}_1^{\alpha} \otimes \hat{\omega}_2^{\alpha} \longrightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$$

以上のことは又 $\{\hat{\omega}_1^{\alpha}\}$, $\{\hat{\omega}_2^{\alpha}\}$ の任意の subnet についても、これを出發点として言えるから結局 $\hat{\omega}_1^{\alpha} \otimes \hat{\omega}_2^{\alpha}$ は $S_T(X \times Y)$ 上 $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ に弱収束する。

$$\text{系. } \widehat{S_T(X \times Y)}|M_A \times M_B = S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)$$

$$\text{又 } S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)|X \times Y = S_T(X \times Y)$$

以下 $A, B \in \mathcal{I}$ の Silva 境界 ∂_A, ∂_B 上で maximal algebra になつてゐるものとする。

補題5. $A, B \in X, Y$ 上の関数環とすると, $\partial_A \subseteq X, \partial_B \subseteq Y$ とする. $F \in C(X \times Y)$ によって $T[F]$ は F と $T = A \otimes B$ とで生成された関数環とすると, $\partial_{T[F]} = \partial_T$ だろう

$$F|_{\partial_T} \in S_T(\partial_T)$$

証明. $x_0 \in A$ の Choquet 境界の点とすると, $R_{x_0}(F)$ と B とで生成された Y 上の関数環を R とする. $\partial_R = \partial_B$ である.

今 ∂_B が R の境界に落ちることを

$$\exists f \in R ; \|f\| > \|f\|_{\partial_B}$$

ここで f は $f = R_{x_0}(G)$ ($G \in T[F]$) とかけると考えて

よ. $C(X) \otimes C(Y) = C(X, C(Y))$ による identification で

$R_x(G)$ は X 上の連続関数と見とらえるから

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U (x_0 \text{ の近傍}) ; \|R_x(G) - R_{x_0}(G)\| < \varepsilon \text{ for } x \in U.$$

よって $\varepsilon \in \|f\| - \|f\|_{\partial_B}$ より $\varepsilon < 0$ とする. x_0 が Choquet 境界の点であるから

$$\exists g \in A ; g(x_0) = \|g\| = 1 \text{ 且 } |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\|G\|} \text{ in } \partial_A \text{ for } x \sim U.$$

$$H = G(g \otimes 1) \in T[F] \text{ によって}$$

$$(x, y) \in \{x \sim U\} \times \partial_B \text{ のとき}$$

$$|H(x, y)| = |G(x, y)| |g(x)| \leq \|G\| \frac{\varepsilon}{\|G\|} = \varepsilon$$

$$(x, y) \in \partial_A \cap U \times \partial_B \text{ のとき}$$

$$|H(x, y)| \leq |G(x, y)| \leq \|R_x(G)\|_{\partial_B} \leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon$$

従って $\partial_{T[F]} = \partial_T$ だろう

$$\begin{aligned}\|H\| &\leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon = \|f\|_{\partial_B} + \varepsilon < \|f\| = \|R_{x_0}(G)\| \\ &= \|R_{x_0}(H)\| \leq \|H\|\end{aligned}$$

よって ∂_B は R の境界となり $\partial_R = \partial_B$. しかるに B は Y 上では relative maximal algebra になっているから $B = R$ i.e. $R_{x_0}(F) \in B$, 同様に任意の B の Choquet 境界の y に対して $L_y(F) \in A$. よって補題 2 から

$$F|_{\partial_A \times \partial_B} \in S_T(\partial_A \times \partial_B)$$

定理 2. $A, B \in X, Y$ 上の圈数環で ∂_A, ∂_B 上では maximal algebra になっているものとする. 今 ∂_A, ∂_B が X, Y の proper な部分集合にならなければ, $S_T(X \times Y)$ は relative maximal algebra である.

証明. 圈数環 $S \supset S_T(X \times Y)$, $\partial_S = \partial_{S_T(X \times Y)} = \partial_T$ であり $F \in S$ とすると, $\partial_{T(F)} = \partial_T$. よって $F|_{\partial_A \times \partial_B}$ は $S_T(\partial_A \times \partial_B)$ に入る. しかるに補題 4 の系から

$$S_T(X \times Y)|_{\partial_A \times \partial_B} = S_T(\partial_A \times \partial_B).$$

よって $F|_{\partial_A \times \partial_B}$ は $S_T(X \times Y)$ の圈数に拡大出来るが、これは F 自身にほかならない.

以上の証明からわかるように、^{にこのとき} $S_T(M_A \times M_B)$ は $\partial_A \times M_B \cup M_A \times \partial_B$ を含む任意の圈集合上で relative maximal

algebra に存在することが言える。

A_1 を Disk algebra としたとき、 C^n 内の polycylinder D^n 上連続で、内部で解析的な関数全体のつくる代数 A_n は $n+1$ の A_1 と同型な積と見做すことができる。よく知られているように Γ を D^n の topological boundary を含む任意の閉集合としたとき $A_n|_{\Gamma}$ は $C(\Gamma)$ の中で relative maximal algebra に存在が成り立つとき $A_n|_{\Gamma} = S_{A_n}(D^n)|_{\Gamma}$ となる事柄によるものである。ここで上記の等式が Hartogs の定理の abstract な構成と見做すことができるがその背景の結果としては次のことが成立する。

Γ を $M_A \times M_B$ 内の閉集合とする。 Γ 上で $A \otimes B$ の関数で局所的に近似出来る関数 $\in \Gamma$ 上 $A \otimes B$ -holomorphic な関数と呼びその全体を $H_T(\Gamma)$ であらう。

定理3. A, B をそれぞれ $\partial A, \partial B$ 上で essential な maximal algebra とする。 $\partial A, \partial B \in M_A, M_B$ の proper な部分集合とすると $\Gamma = \partial A \times M_B \cup M_A \times \partial B$ に対して

$$H_T(\Gamma) = S_T(M_A \times M_B)|_{\Gamma}$$

証明. $(x_0, y_0) \in \partial A \times M_B$ をとる。今 x_0 の近傍 U を $\overline{U} \subset \partial A$ とすると $\overline{AU} = C(\overline{U})$ 。 V を y_0 の任意の近傍とす

3. こゝに $F \in S_T(M_A \times M_B)$ に対して $F|_{\overline{U} \times \overline{V}} \in \overline{T|_{\overline{U} \times \overline{V}}}$ とするところをいふ。

$$\begin{aligned} \overline{T|_{\overline{U} \times \overline{V}}} &= \overline{(A \otimes B|_{\overline{U} \times \overline{V}})} \supset (\overline{A|_{\overline{U}}}) \otimes (\overline{B|_{\overline{V}}}) \\ &= C(\overline{U}) \otimes (\overline{B|_{\overline{V}}}) = C(\overline{U}, \overline{B|_{\overline{V}}}) \end{aligned}$$

一方 $x \rightarrow R_x(F) \in B$ は M_A 上の連続関数である。 $\delta > \tau$ 以上より、こゝから $F|_{\overline{U} \times \overline{V}} \in C(\overline{U}, B|_{\overline{V}})$ i.e. $F|_{\overline{U} \times \overline{V}} \in \overline{T|_{\overline{U} \times \overline{V}}}$.

$(x_0, y_0) \in M_A \times \partial_B$ の時も同様であるから

$$S_T(M_A \times M_B)|_{\Gamma} \subset H_T(\Gamma). \quad \text{次に}$$

$F \in H_T(\Gamma)$ とする任意の $x \in \partial_A, y \in \partial_B$ に対して

$$R_x(F) \in H_B(M_B), \quad L_y(F) \in H_A(M_A). \quad \delta > \tau$$

$$\begin{aligned} \sup_{\partial_A \times \partial_B} |F(x, y)| &= \sup_{\partial_A} \sup_{M_B} |R_x(F)(y)| = \sup_{\partial_A} \sup_{\partial_B} |R_x(F)(y)| \\ &= \sup_{\partial_A \times \partial_B} |F(x, y)| \end{aligned}$$

同様に

$$\sup_{M_A \times \partial_B} |F(x, y)| = \sup_{\partial_A \times \partial_B} |F(x, y)|$$

$$\text{i.e.} \quad \partial_{H_T(\Gamma)} = \partial_T \quad \text{従って} \quad S_T(M_A \times M_B)|_{\Gamma} = H_T(\Gamma)$$

尚 $\sup$ の等式は、要するに Rickart [3] の結果、又は $\delta > \tau$ と強く、Glicksberg [2] に $\delta > \tau$ $H_A(M_A) = \hat{A}$, $H_B(M_B) = \hat{B}$ が得られることに依る。

註 1. 定理 3 は A, B に essential といふ仮定をとりあう
 ことも成立する。

註 2. Slice algebra の名は Birtel [1] による。[1] では
 定理 2 と 3 が表現空間 (M_A, M_B) が metrizable の時に証明さ
 れているが、定理のつづきにも証明にも不正確さや誤りが多い。

文 献

1. F. T. Birtel; Products of maximal function algebras.
 Tulane 大での Function algebra についての Symposium
 報告 (1965)
2. I. Glicksberg; Maximal algebras and a theorem of
 Radó, Pacific J. Math., 14 (1964), 919-941
3. C. E. Rickart; Analytic phenomena in general function
 algebras, Pacific J. Math. 18 (1966), 361-377
4. N. Mochizuki; The tensor product of function algebras
 Tohoku Math. J., 17 (1965), 139-146
5. J. Tomiyama; Tensor products of commutative
 Banach algebras, Tohoku Math. J., 12 (1960), 147-154
6. ———; Applications of Fubini type theorem to the
 tensor products of C^* -algebras; Tohoku Math. J.,
 19 (1967), 213-226