

一般パスカル三角形の正方行列化について

上智大・理工 岩堀長慶 (Nagayoshi Iwahori)

§ 1. 序

二項係数 $nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 達を「山の形」に並べた数表 (パスカル三角形)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{array}$$

は高校生にもなじみ深いものである。これを二重数列

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a_{00} & & & \\ & & & & a_{10} & a_{01} & & \\ & & & a_{20} & a_{11} & a_{02} & & \\ & a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} & & & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}$$

と見做すと

$$\begin{cases} \text{初期条件} & a_{0j} = a_{j0} = 1 \quad (j=0, 1, 2, \dots) \text{ 及び} \\ \text{漸化式} & a_{ij} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j} \quad (i, j=1, 2, \dots) \end{cases}$$

と定義された二重数列 $\{a_{ij} \mid i, j=0, 1, 2, \dots\}$ ということになる。以下の記述の都合のために, 二重数列 $\{a_{ij}\}$ の書き方を二通り設定しておく。一つは下半三角行列の形の B であり, もう一つは正方行列の形の $\tilde{B}$ である:

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & & & 0 \\ b_{10} & b_{01} & & \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & \\ b_{30} & b_{21} & b_{12} & b_{03} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \dots \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

そこでパスカル三角形の初期条件と漸化式を次の形で一般化する。いま4つの数列

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots), \quad q = (q_1, q_2, \dots)$$

に対して二重数列 $\{b_{ij}\}$ を

$$\text{初期条件} \quad b_{0j} = \alpha_j \quad (j=0, 1, \dots), \quad b_{j0} = \beta_j \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\text{漸化式} \quad b_{ij} = p_i b_{i,j-1} + q_j b_{i-1,j} \quad (i, j=1, 2, \dots)$$

で定める。そして $n=0, 1, 2, \dots$ に対して $n+1$ 次正方形列

$$\hat{B}_n = \hat{B}_n(\alpha, \beta; p, q) \quad \text{と} \quad B_n = B_n(\alpha, \beta; p, q) \quad \text{とを}$$

$$\hat{B}_n = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_{00} & & & 0 \\ b_{10} & b_{01} & & \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{0n} \end{pmatrix}$$

と定義する。

すると様々な問題が自然発生する。例えば $\det \hat{B}_n$ と α, β, p, q との関係は? $\hat{B}_n$ と B_n 間の関係は? もしくは $\prod_{j=0}^n (\det \hat{B}_j) \neq 0$ ならば, Bruhat 分解の特別な場合なので, 上半三角形行列系 $\hat{B}_j$ ($0 \leq j \leq n$) が存在して $\hat{B}_n = B_n \hat{B}_n$ の形に書ける。このとき $\hat{B}_n$ の形は? などなどである。更に視点を少し広げて, 漸化式の部分を

$$b_{ij} = p_i b_{i,j-1} + q_j b_{i-1,j} + c_{ij}$$

($\{c_{ij}\}$ は与えられた二重数列) と一般化することも考えられる。しかしこれは可成難しくて一般論がわからない。特別な形 (p_i, q_j は皆 $=1$, c_{ij} は定数) の实例に後で触れる。

§2. 或る特別な場合 (GL_n の表現論的解釈の例)

初期条件を $\alpha = (1, 1, \dots)$, $\beta = (1, 1, \dots)$ とし, 漸化式の p と q を $p = (1, 1, \dots)$, $q = (q_1, q_2, q_3, \dots)$ の形とする。 $(q$ は任意の数列)。この時 $\hat{B}_n$ の行列成分が面白い形をもつことが分る。たとえば

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+q_1 & 1+q_1+q_2 \\ 1 & 1+q_1+q_1^2 & 1+q_1+q_2+q_1^2+q_1q_2+q_2^2 \end{pmatrix}$$

である。そこで一般線型群 $GL(m, \mathbb{C})$ の k 次対称表現 $\rho_{m,k}$, すなわち m 個の変数 $x_1, \dots, x_m$ の k 次の齊次多項式全

体のなす空間 $S_k(x_1, \dots, x_m)$ を表現空間とする表現の指標を $\chi_{m,k}$ とする。 $\chi_{m,k}$ が対角行列 $h = \text{diag.}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ で与える値は

$$\chi_{m,k}(h) = \chi_{m,k}(q_1, \dots, q_m) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m} q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_k}$$

である。以下 $\chi_{m,k}(q_1, \dots, q_m)$ を $\chi_{m,k}$ と書く。 $\chi_{m,0} = 1$ である。また $\chi_{0,k} = 1$ とおく。すると $\tilde{B}_n$ の成分 b_{ij} を表わす式は

$$(2.1) \quad \begin{cases} b_{ij} = \chi_{j,0} + \chi_{j,1} + \dots + \chi_{j,i} & (j=1, 2, \dots) \\ b_{i0} = 1 & (i=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

となることを示せる。(証明は帰納法を用いて簡単にできる。 $\tilde{B}_2, \tilde{B}_3$ 位の実験で (2.1) が見えにくる。) 次に分解 $\tilde{B}_n = B_n \hat{B}_n$ を与える行列 $B_n, \hat{B}_n$ の具体形も分る。今より易くするため $n=4$ で書くと

$$(2.2) \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & q_1 & 1 & \\ 0 & q_1^2 & q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2.3) \quad \hat{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & q_3 & \\ & & q_4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^x$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & q_2 & \\ & & & q_3 & \\ & & & & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q_1 & & \\ & & q_2 & \\ & & & q_3 & \\ & & & & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これを用いると $\det \tilde{B}_n = (\det B_n) \cdot (\det \hat{B}_n) = q_1 q_2^2 \cdots q_n^n$ が得られる:

$$(2.4) \quad \det \tilde{B}_n = \det \hat{B}_n = q_1 q_2^2 q_3^3 \cdots q_n^n$$

③ 上智大数学科1年の杉谷哲也君も別の方法で(2.4)を示した。

§ 3. 実例若干

[例1] $q_1 = q_2 = \cdots = 1$ の時はパスカル三角形の行列入 B_n で、 $\hat{B}_n = {}^t B_n$ (B_n の転置行列) となる。 $\det \tilde{B}_n = 1$ である。 B_n^{-1} の形は (例: $n=3$)

$$(3.1) \quad B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (B_n \text{の}(i,j) \text{成分の} (-1)^{i+j} \text{倍} \\ \text{が } B_n^{-1} \text{の}(i,j) \text{成分}) \end{array}$$

となるから、 $\tilde{B}_n$ に関し次のような事実が簡単にわかる:
 $\tilde{B}_n^{-1}$ と $\tilde{B}_n$ とは相似行列である。 n が偶数(>0)ならば、
 1 は $\tilde{B}_n$ の固有値である。 $\tilde{B}_n$ の固有多項式を $f_n(x) = x^{n+1} - \alpha_1 x^n + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_{n+1}$ とおくと、 $\alpha_0 = 1$ とし?

$$(3.2) \quad \alpha_j = (-1)^{n+1} \alpha_{n+1-j} \quad (0 \leq j \leq n+1)$$

となる。すなわち $\tilde{B}_n$ の j 次の首座小行列式の総和 α_j と $(n+1-j)$ 次首座小行列式の総和 α_{n+1-j} とは符号を除

いて一致する。

[例 2] 変数 q を用いて $q_j = q^j$ ($j = 1, 2, \dots$) とした時。

ガウス q -項係数 と呼ばれる 量 (q の多項式)

$$\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} = \prod_{\nu=1}^{i+j} (q^\nu - 1) / \prod_{\alpha=1}^i (q^\alpha - 1) \prod_{\beta=1}^j (q^\beta - 1)$$

を用いて $b_{ij} = \begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}$ と書ける。(2.2), (2.3) から

$$(3.3) \quad \hat{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & q^{1^2} & & \\ & q^{1^2} & q^{2^2} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & q^{n^2} \end{pmatrix} {}^t B_n \quad \therefore \tilde{B}_n = B_n \begin{pmatrix} 1 & q & & \\ & q & q^{n^2} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & q^{n^2} \end{pmatrix} {}^t B_n$$

となり, $\tilde{B}_n$ は対称行列で, $\det \tilde{B}_n = q^{1^2+2^2+\dots+n^2}$ が得られる。 $q=1$ とおくと, [例 1] が生ずる。 $B_n^{-1} = C_n^\Delta = (c_{ij})$ とおくと, (3.1) の q -version の形で成分 c_{ij} の式が出る。

$$(3.4) \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} q^{1+2+\dots+(i-j-1)} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

[例 3] $q_j = j+1$ ($j = 1, 2, \dots$) とした時。

第 2 種 Stirling 数 という名の量 $S(m, k)$ が $\tilde{B}_n$ の成分 b_{ij} として登場する。 $(S(m, k))$ は $\{1, 2, \dots, m\}$ を k 個の部分集合に直和分割する仕方の総数。 $b_{ij} = S(i+j, j)$ である。公式 (2.3) を用いて

$$(3.5) \quad \det \tilde{B}_n = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdots n^{n-1}$$

が得られる。この式は R. Stanley 論文: 「パン屋の 1 ダース予想」([1] 参照) 中に登場する或る未解決予想の "行列式型のいいみえ" となっている点に興味深い。未解決予想とは

「 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ で、 a_{ij} は皆 0 または -1 で、 A の各行、各列の和はすべて $= 1$ となり、各行、各列では 1 と -1 とが出現するときは、途中の 0 を無視すれば、 1 と -1 とは隣接している」という行列を n 次交代符号行列と呼ぶ。その総数を A_n とおく。例えば $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 7$ (置換行列が $3! = 6$ 個, もう一つは $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in A_3$) である。

$$(3.6) \quad A_n = \frac{1! 4! 7! \cdots (3n-2)!}{n! (n+1)! \cdots (2n-1)!}$$

が予想式である。 A_n の分子、分母が $\begin{pmatrix} 2.4 \\ \text{ } \end{pmatrix}$ の形 (3.5) に近い) となり、行列式的解釈が期待される:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_j = (3n-3j+1)(3n-3j)(3n-3j-1) & (1 \leq j \leq n-1) \\ Q_j = 2n-j & (1 \leq j \leq n-1), \quad Q_n = n! \end{cases}$$

とあくと

$$(3.7) \quad \begin{cases} A_n \text{ の分子} = \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2^2 \tilde{Q}_3^3 \cdots \tilde{Q}_{n-1}^{n-1} \\ \quad \quad \quad \text{分母} = Q_1 Q_2^2 Q_3^3 \cdots Q_{n-1}^{n-1} Q_n^n \end{cases}$$

となる。対応する $\tilde{B}_n, B_n$ 達の意味づけは果して何か?

§4. 付記若干

本来のパスカル三角形 (図 1) から上部と左部に与る成分を削りとると、初期条件 α, β のみが変わり、漸化式 p, q は変わらない。例えば始の左行と左列を削りつつ作った $n+1$ 次正方行列

$$A_{k,n} = \begin{pmatrix} \binom{2k}{k} & \binom{2k+1}{k} & \dots & \binom{2k+n}{k} \\ \binom{2k+1}{k+1} & \binom{2k+2}{k+1} & \dots & \binom{2k+n+1}{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2k+n}{k+n} & \binom{2k+n+1}{k+n} & \dots & \binom{2k+2n}{k+n} \end{pmatrix}$$

の行列式の値はどう考えれば出て来るか? Bruhat 分解の考え方が有効である: $A_{k,n} = D^{-1}XYF$ と分解する. 但し

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} d_j &= \binom{k+j}{k}, \\ f_j &= \binom{2k+j}{k} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{00} & & & 0 \\ x_{10} & x_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \dots & y_{0n} \\ & y_{11} & \dots & y_{1n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_{ij} = \binom{2k+i}{-j+i}, \quad y_{ij} = \binom{j}{i}$$

である。 $\det X = \det Y = 1$ なので

$$(4.1) \quad \det A_{k,n} = \prod_{j=0}^n \binom{2k+j}{k} / \prod_{j=0}^n \binom{k+j}{k}$$

を得る。 k を固定して $\det A_{k,n}$ を n の関数と考えると (4.1) から, これは n の k^2 次の多項式となることがわかる。

上と同様に $b_{ij} = \begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} = (\text{ガウスの二項係数})$ とした行列 $\tilde{B}_n$ から例えば第1行と第1列を削りとった行列の行列式も出来る。いま

$$G_n = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ n-1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

とあくと,

$$(4.2) \quad \det G_n = q^{2\binom{n-1}{3} + 3\binom{n-1}{2}} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

となる。

* * *

次に (2.2) と一寸異なる視野からパスカル三角形, ガウス三角形の $\blacksquare$ 三角行列表示を眺めて見る。下半三角形行列の形のパスカル三角形

$$(4.3) \quad C_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

は $\log$ をとると, 中零行列

$$(4.4) \quad N_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ 2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従って

$$(4.5) \quad C_n = \exp(N_n) = I + N_n + \frac{1}{2!} N_n^2 + \cdots$$

となる。ついでに, 此の式から C_n の左乗 (左は整数) の形が直ぐ出る:

はまだうまくいえない状態である。

* * *

序の終で述べた実例を述べる。 $\alpha = (\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots)$

$\beta = (\alpha+1, \alpha+2, \dots)$, $p = (1, 1, \dots)$, $q = (1, 1, \dots)$

として $\tilde{B}_n = (b_{ij})$ を $b_{i,j} = b_{i-1,j} + b_{i,j-1} + k$
(k は与えられた定数) で定める。 $\det \tilde{B}_n = F_n(x)$ は^{*}と^{*}の
ような多項式か？

上式から, $\tilde{B}_n$ の左から (4.3) の C_n の逆行列 C_n^{-1} を掛け
、 $\tilde{B}_n$ の右から ${}^t C_n$ の逆行列 を掛けることにより — 即
ち $\tilde{B}_n$ の各行から前の行を引算し, また各列から前の列を引算
する — という操作を繰返して, 次式を得る。

$$(4.10) \quad C_n^{-1} \tilde{B}_n {}^t C_n^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+k & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \alpha+k & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 & & 1 & \alpha+k \end{pmatrix} = D_n \text{ とする.}$$

よって, $\tilde{B}_n = C_n D_n {}^t C_n$ となり, $\det \tilde{B}_n = \det D_n$
となる。 $f_n(x) = \det D_n$ とおくと, D_n の形から漸化式

$$\begin{cases} f_n(x) = x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) \\ \text{初期条件 } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2 + kx - 1 \end{cases}$$

が得られる。特に $k=0$ とおくと, $f_n(x)$ は チェビシエフ
多項式となり, 根は $2 \cos \frac{\pi}{n+1} j$ ($1 \leq j \leq n$) となる。こ
うな考え方は $p=(1, 1, \dots)$, $q=(1, 1, \dots)$ の時は

いつも有効である。例えば (4.1) に出現した行列 $A_{k,n}$ に対しては $C_n^{-1} A_{k,n} C_n^{-1}$ を作ると, 「準対角行列」

$$\begin{pmatrix} \xi_k & \xi_{k-1} & \cdots & \xi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_{k-1} & \xi_k & \xi_{k-1} & \cdots & \xi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

但し, $\xi_k = \binom{2k}{k}$, $\xi_{k-1} = \binom{2k}{k-1}$, $\cdots$, $\xi_0 = \binom{2k}{0} = 1$ である。

しかし, この形から行列式を算出するのは漸化式が容易に出ないという難点がある。Bruhat 分解の方法が遥に強力である。

[参考文献]

- (及び SLN. 1234号)
- [1] R.P. Stanley: Enumerative Combinatorics, vol. 1, 1987
 - [2] " : Unimodality and Lie Superalgebras, Studies in Applied Math. 72, 1985, 263-281
 - [3] " : Unimodal sequences arising from Lie algebras, Lec. Note in Pure and App. Math. 57, 1980, 127-136
 - [4] " : $GL(n, \mathbb{C})$ for combinatorialists, London Math. Soc. Lec. Notes Ser. #82, 1983, 187-199
 - [5] 雨宮-岩堀-小池: On some generalization of B. Kostant's partition function, Prog. in Math. 14, 1981 松島記念号
 - [6] I.G. Macdonald: Sym. functions and Hall polynomials, Oxford.

[付録]

$1^k + 2^k + \cdots + n^k = P_k(n)$ は n の $k+1$ 次多項式で定数項は 0 となる. そこで $P_k(n) = b_{k,0} \binom{n}{1} + b_{k-1,1} \binom{n}{2} + \cdots + b_{0,k} \binom{n}{k+1}$

と置く. 但し $b_{0,0} = 1$ とする. さてと行列 $\tilde{B} = (b_{rs})$ は

$$\begin{array}{l} 0) \\ 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \end{array} \begin{pmatrix} \overset{0}{1} & \overset{1}{1} & \overset{2}{2} & \overset{3}{6} & \overset{4}{24} & \cdots \\ 1 & 3 & 12 & 60 & 360 & \cdots \\ 1 & 7 & 50 & 390 & 3360 & \cdots \\ 1 & 15 & 180 & 2100 & \cdots \\ 1 & 31 & 602 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

となる. これは初期条件 $\alpha = (0!, 1!, 2!, 3!, \dots)$, $\beta = (1, 1, \dots)$

漸化式は $r \geq s$ の時 $b_{r,s} = s \cdot b_{r,s-1} + (s+1) b_{r-1,s}$ である.

$r < s$ の時も $b_{r,s} = s \cdot b_{r,s-1} + (s+1) b_{r-1,s}$ である.

よって, これは §1 の $\tilde{B}_n$ の条件は満たしていない. しかし例えは $n=4$ とし

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 24 \\ 1 & 3 & 12 & 60 & 360 \\ 1 & 7 & 50 & 390 & 3360 \\ 1 & 15 & 180 & 2100 & \cdot \\ 1 & 31 & 602 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 7 & 25 & 65 & 140 \\ 1 & 15 & 90 & 350 & 1050 \\ 1 & 31 & 301 & 1701 & 6951 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

がわかる. 右辺の第一項は例 3 の Stirling 数の行列であり, 右辺第二項は対角成分が $0!, 1!, 2!, \dots$ である. よって

Stirling 数の公式

$$(*) \quad S(m, k) = \frac{1}{k!} \{ k^m - \binom{m}{1} (k-1)^m + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \cdot 1^m \}$$

から上の $b_{r,s}$ が得られる.

ついでにもう一つ: 多項式 $b_{k,0} t^k + b_{k-1,1} t^{k-1} + \cdots + b_{0,k}$ は実は $(t+1)$ で割り切れることが云える. 割りつた商を

$$C_{k-1,0} t^k + C_{k-2,1} t^{k-1} + \cdots + C_{0,k-1}$$

とあくと,

$$n^k = C_{k-1,0} \binom{n}{1} + C_{k-2,1} \binom{n}{2} + \cdots + C_{0,k-1} \binom{n}{k}$$

の成立がわかる。行列 (C_{ij}) ($C_{0,0}=1$) は

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 7 & 25 & 65 & 140 \\ 1 & 15 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 31 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1! \\ 2! \\ 3! \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

となり, やはり Stirling 数で書ける。上式は次式と同じである。

$$C_{ij} = S(i+j, j) \cdot j!$$

(★) を行列形で書くとより印象的である:

$$(★★) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 & 7 & 15 \\ & & 2 & 12 & 50 \\ & & & 6 & 60 \\ & & & & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{pmatrix}$$

従って右辺の行列 (n 次の場合) の行列式は

$$(n-1)! (n-2)! \cdots 2! 1! = 2^{n-2} 3^{n-3} \cdots (n-1)!$$

となり, 例 3 中の話 (交代符号行列の因数) とまた関係が出現しそうな気がする。尚 (★★) は前述の $P_k(n)$ と

$$(★★★) \quad (n+1)^m = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} b_{m-j,j}$$

という形で関連している。ついでに (★) から出るもう一つのことは, n

$$n \geq k \text{ なら } n^k - \binom{k}{1}(n-1)^k + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}(n-k)^k = k! [\text{終}]$$