

方程式 $x^d = 0$ に対する regula falsi の大域収束性について

龍谷大学 理工学部 数理情報学科 山岸 義和 (YAMAGISHI Yoshikazu)

一変数関数 $p(x)$ の零点を求めるアルゴリズム SOR regula falsi は、漸化式

$$x_{i+2} = x_i - \lambda p(x_i) \frac{x_i - x_{i+1}}{p(x_i) - p(x_{i+1})} \quad (1)$$

で定義される。ただし λ は実定数である。この漸化式は平面の写像

$$(x, y) \mapsto \left(y, x - \lambda p(x) \frac{x - y}{p(x) - p(y)} \right)$$

の反復と同等である。

$p(x) = x^d$ のとき、変数変換 $x = u, y = uv$ によって平面の力学系

$$(u, v) \mapsto (uv, f(v)), \quad f(v) = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{\lambda}{1 + v + \dots + v^{d-1}} \right)$$

と同等である。つまり、漸化式 (1) の初期値 x_0, x_1 に対して $v = x_1/x_0$ とおけば

$$x_n = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} f^k(v), \quad n \geq 1$$

が成り立つ。

$\lambda = 1$ のとき (ふつうの regula falsi)、一次元力学系 f は区間 $[0, 1]$ 上に不動点 α を持つ。 d 位の臨界点 $x = 0$ が α に吸引されることから、 α の安定領域 $A(\alpha)$ は完全不変であり、 $A(\alpha)$ 以外の Fatou 成分は全て単連結であることがわかる。実験によれば、すべての臨界点は α に吸引されるため、 f の Julia 集合は測度零の Cantor 集合である。これにより、方程式 $x^d = 0$ に対する regula falsi の大域収束性が得られる。

収束の速さ

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f^k(v)|$$

をパラメータ λ の関数 (一般に一価関数でない) とみなしてそのグラフを描いたのが図 1 上 ($d = 2, 1 \leq \lambda \leq 2$), 図 2 上 ($d = 3, -0.3 \leq \lambda \leq 2.2$), 図 3 上 ($d = 4, -0.3 \leq \lambda \leq 2.2$) である。水平軸は $\varphi = 0$ を表す。また、写像 $(\lambda, v) \mapsto (\lambda, f(v))$ のアトラクタを描いたのが図 1 下 ($d = 2$), 図 2 下 ($d = 3$), 図 3 下 ($d = 4$) である。

$d = 2, \lambda(\lambda - 2) > 0$ とする。このとき、 f は安定な二周期軌道 $\{0, \infty\}$ をもち、次が成り立つ。

Proposition 1 v の軌道が $\{0, \infty\}$ に吸引されるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(v) = \infty$ ならば x_{2n} は有限な極限値を持ち $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$ である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(v) = \infty$ ならば x_{2n+1} は有限な極限値を持ち $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$ である。

(proof) $v_n = f^n(v)$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(v) = \infty$ の場合

$$x_{2n} = x_0(v_0 v_1) \cdots (v_{2n-2} v_{2n-1}) = x_0 \left(1 - \frac{\lambda}{v_0 + 1} \right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{v_{2n-2} + 1} \right).$$

ここで

$$v_{2n} = f(f(v_{2n-2})) = (1 - \lambda)v_{2n-2} + O(1), \quad (n \rightarrow \infty)$$

より級数 $\sum_n \left| \frac{\lambda}{v_{2n}+1} \right| < \infty$ が絶対収束するから $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$ は収束する。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(v) = \infty$ の場合も同様である。 ■

$d = 2$, $(23 - \sqrt{17})/16 = 1.1798 < \lambda < 1.185$ のとき、 $\varphi = \varphi(\lambda)$ は二価函数である。とくに $\lambda = (23 - \sqrt{17})/16$ のとき f の Julia 集合は区間 $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であり、 f は I 上で絶対連続なエルゴード不変測度 $d\mu$ をもつから、 φ の一方の値は $\int_I \log |v| d\mu$ で表される。 f の安定な固定点を $\alpha \in \mathbb{R}$ とすれば φ のもう一方の値は $\log |\alpha|$ である。以下に示すように、これら二つの収束の速さは一致する。

Proposition 2 f を実係数二次有理函数とし、 f の Julia 集合が区間 $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であるとする。 f の安定固定点を $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。このとき I 上の f の絶対連続なエルゴード不変測度を $d\mu$ とすると、

$$\log |\alpha| = \int_I \log |v| d\mu$$

が成り立つ。

(proof) 不変測度 $d\mu$ を計算するために、 f が Blaschke 積と semi-conjugate であることをみよう。 f の臨界点のひとつ c によって $I = [f(c), +\infty] \cup [-\infty, f(f(c))]$ と表される。Möbius 変換

$$v = M(y) = \alpha \frac{y - b}{y - d}$$

が $M(-1) = f(c)$, $M(1) = f(f(c))$, $M(\infty) = \alpha$ をみたすように係数 b, d を定める。 $g(y) = M^{-1}(f(M(y)))$ とおく。Joukowski 写像

$$j(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$$

と、てきとうな Blaschke 積

$$B(w) = w \frac{w - a}{-aw + 1}$$

によって

$$g \circ j = j \circ B$$

が成り立つ。Blaschke 積 B は原点を固定点にもつから、 B は単位円周上の Lebesgue 測度を保つ。したがって区間 $[-1, 1]$ 上の確率測度

$$\frac{dy}{\pi \sqrt{1 - y^2}}$$

は g で不変である。簡単な複素積分の計算により

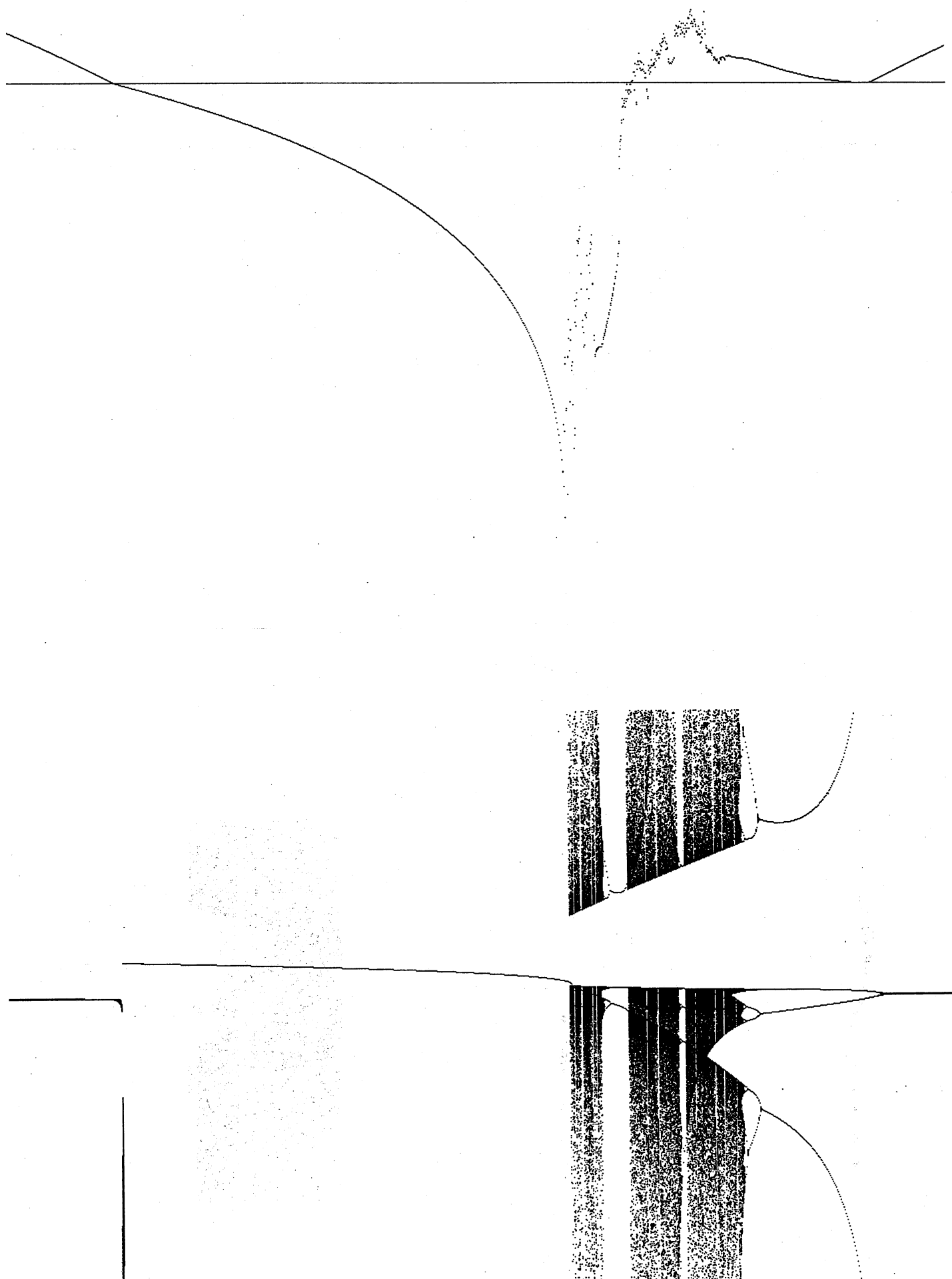
$$\int_I \log |v| d\mu = \int_{-1}^1 \log \left| \alpha \frac{y - b}{y - d} \right| \frac{dy}{\pi \sqrt{1 - y^2}} = \log |\alpha|$$

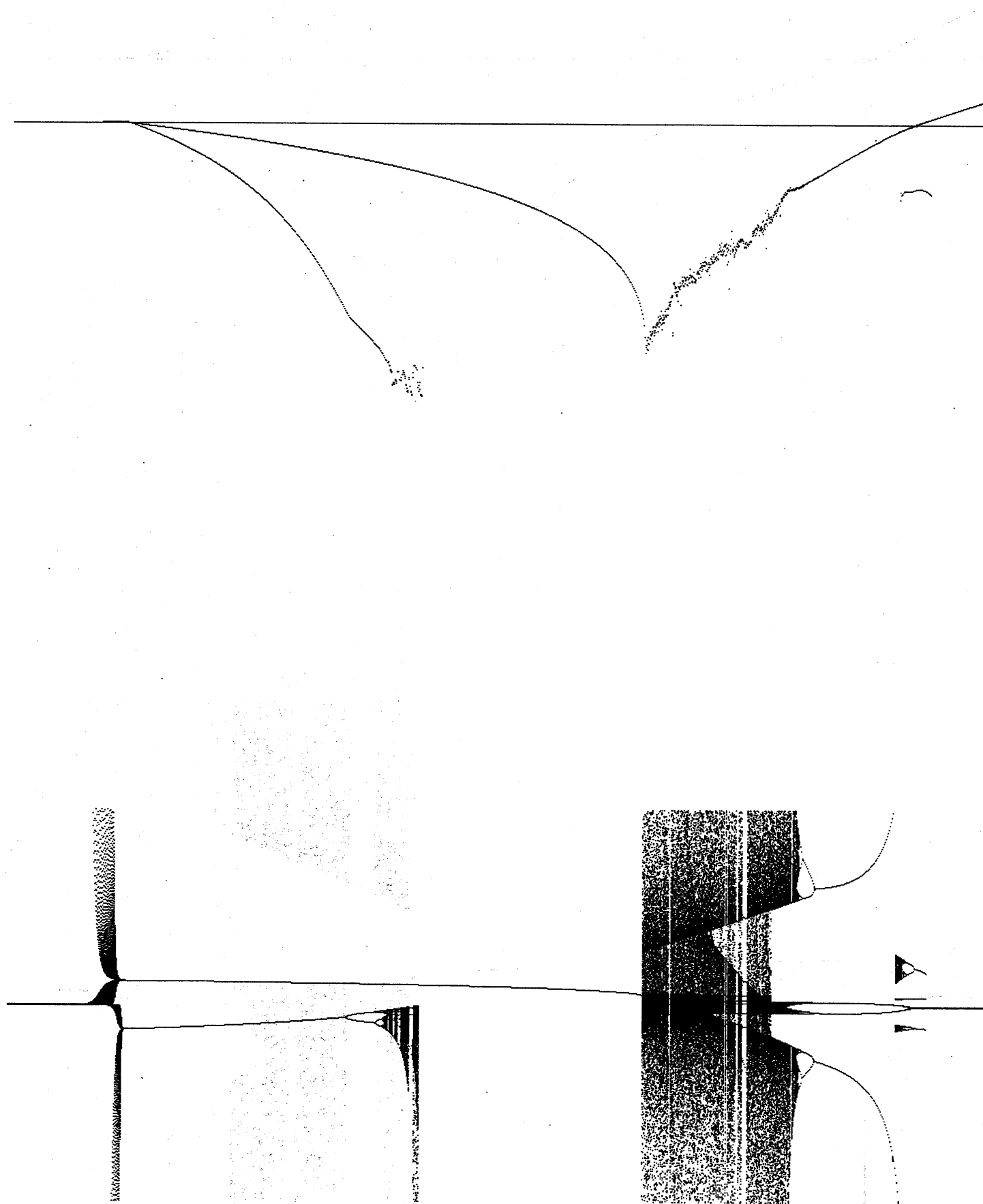
が成り立つ。 ■

一般の $d \geq 2$ で、 $|\lambda - 1| > 1$ のとき、 f の二周期軌道 $\{0, \infty\}$ は安定だが、それ以外に安定軌道が存在することもある。方程式 $x^3 = 0$ に対する SOR regula falsi で、二周期軌道 $\{0, \infty\}$ 以外の安定周期軌道を f が持つような複素パラメータ λ の存在を複素領域 $|\lambda - 1| > 1$, $1.8 \leq \Re(\lambda) \leq 1.9$, $0.7 \leq \Im(\lambda) \leq 0.8$ の範囲で示したのが図 4 であり、マンデルブロート集合の形状をしている。



图1 d=2

図2. $d=3$

图3. $d=4$

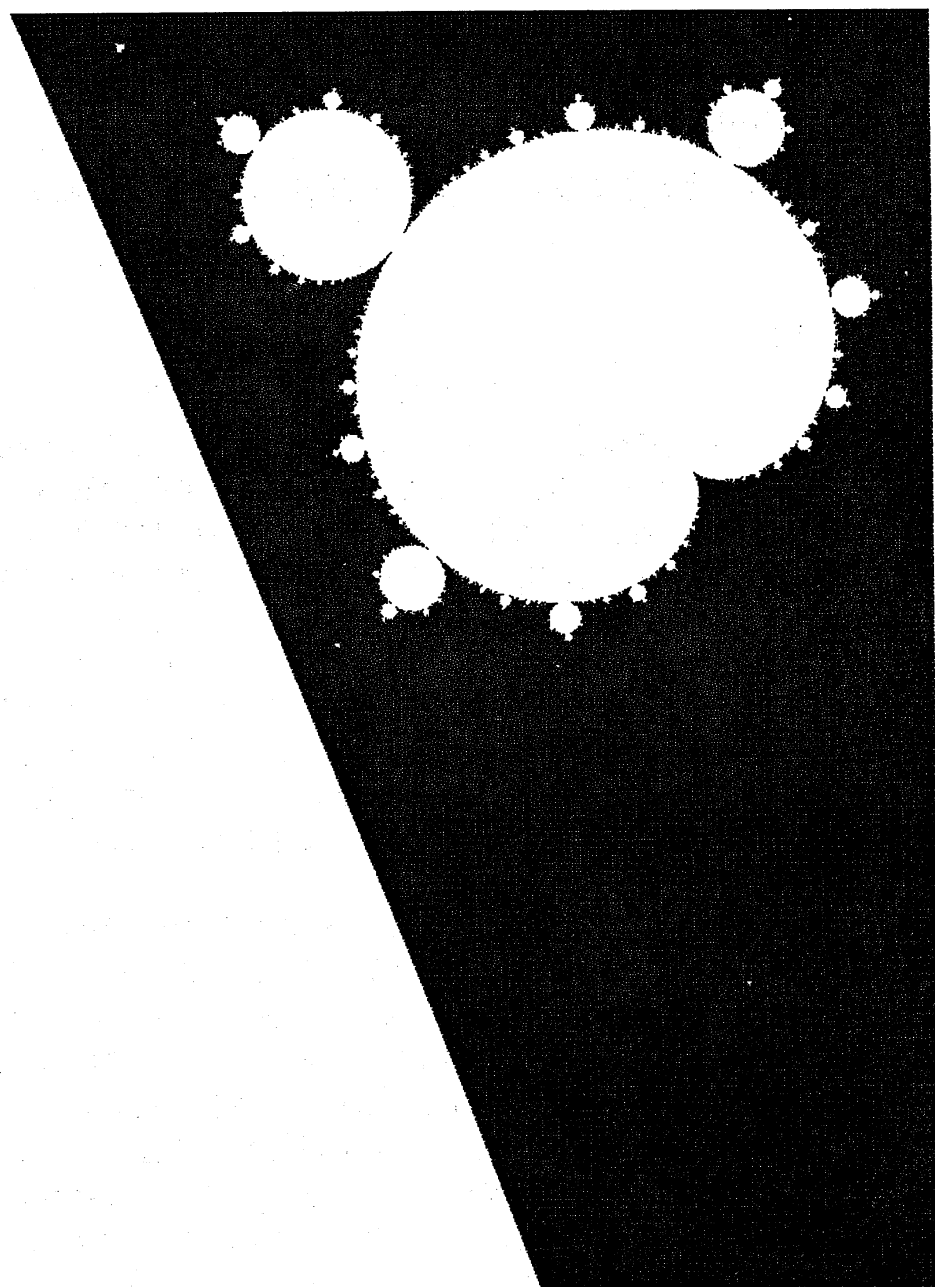


图 4