

# Strong Partition Cardinal と Spector Forcing

ICOT 佐藤洋祐 (Yosuke Sato)

概要 Mitchell Spector により考案された Strong Partition Cardinal の存在を認める集合論のモデルの Generic extension について概説を与える.

## §0 準備

定義 0.1  $\kappa$  が Strong Partition Cardinal であるとは  $\kappa$  が Partition Property  $\kappa \rightarrow (\kappa)_{\lambda}^{\kappa}$  を任意の順序数  $\lambda < \kappa$  に対して満たすことと定義する.

以下の結果が知られている.

定理 0.2  $\kappa$  が Strong Partition Cardinal  
 $\implies \kappa$  は measurable cardinal

定理 0.3  $\kappa$  が Strong Partition Cardinal  
 $\implies AC_{\kappa}$  は成り立たない

定理 0.4  $\kappa \rightarrow (\kappa)_{\lambda}^{\kappa} \Rightarrow \kappa \rightarrow (\kappa)_{2, \lambda}^{\kappa}$

### § 1 Spector Forcing

$M$  を  $ZF + DC$  の Standard Transitive モデルとし、 $M$  に  
おいて  $\kappa$  は Strong Partition Cardinal であるとする。

定義 1.1 Forcing Condition  $(P, \leq)$  を  
 $(P, \leq) = ([\kappa]^{\kappa}, \subseteq)$  で定義する。

定理 1.2 上の Forcing Condition における Generic  
extension を  $M[G]$  とするとき、 $M[G]$  において以下が成りた  
つ。

- (1)  $G$  は  $\kappa$  上の  $\kappa$ -complete nonprincipal ultrafilter
- (2)  $\kappa^{\kappa}/G$  には  $\kappa$  番目の要素がない、すなわち  $G$  は  $\kappa$  上の  
non-well-founded measure になる。したがって  $DC$  (  
dependent choice) はなりたたない。
- (3)  $AC_{\omega}$  (countable axiom of choice) はなりたつ。

定理 1.2 の証明はいくつかの補題で構成されるが、それを  
述べる前に次の定義を与える。

定義 1.3  $P, Q \in [X]^X$  に対し  $PQ \in [X]^X$  を  $P$  と  $Q$  の合成として定義する. すなわち  $\forall \alpha < X \quad PQ(\alpha) = P(Q(\alpha))$ .

補題 1.4  $\forall \alpha < X \quad M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$

証明

$f \in M^\alpha \cap M[G]$  とする.  $P \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^\alpha$  なる任意の condition  $P$  に対し partition  $F: [X]^X \rightarrow 2^\alpha$  を以下のように定める.

$$F(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \beta < \alpha \mid \exists \kappa \in M \quad PQ \Vdash \underline{f}(\beta) = \kappa \}$$

ここで  $\underline{f}$  は  $f$  の name  $\underline{M}$  は  $M$  に対応する述語.

$M$  において  $X$  は strong partition cardinal なので

$X \rightarrow (X)_\alpha^X$  をみたす. したがって定理 0.4 により

$X \rightarrow (X)_{2^\alpha}^X$  が成り立つ.

よって  $F$  は homogeneous set  $S$  をもつ.  $X$  の部分集合で cardinality  $X$  のものは  $[X]^X$  の元と同一視できるので  $S$  を  $[X]^X$  の元とみなすことができる.

さて  $r \leq PS \iff \exists S' \leq S \quad r = PS'$  に注意すると

$$\forall r \leq PS \quad \forall \beta < \alpha \quad (\exists \kappa \in M \quad r \Vdash \underline{f}(\beta) = \kappa \iff \exists \kappa \in M \quad PS \Vdash \underline{f}(\beta) = \kappa)$$

また  $PS \leq P$  なので  $PS \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^\alpha$ . したがって

$$\forall \beta < \alpha \quad \exists r \leq PS \quad \exists \kappa \in M \quad r \Vdash \underline{f}(\beta) = \kappa$$

以上より

$$\forall \beta < \alpha \quad \exists \kappa \in M \quad PS \Vdash \underline{f}(\beta) = \kappa$$

$f' \in M^\alpha \cap M$  を次のように定める.

$$\forall \beta < \alpha \quad f'(\beta) = \mathcal{X} \iff_{\text{def}} p \Vdash \underline{f}(\beta) = \mathcal{X}$$

このとき  $p \Vdash f' = \underline{f}$  がいえるので

$p \Vdash \underline{f} \in M$  が成り立つ.

以上より  $\forall p \, p \Vdash \underline{f} \in M^\alpha \Rightarrow \exists r \leq p \, r \Vdash \underline{f} \in M$

が示された.

これにより  $p \Vdash \underline{f} \in M^\alpha$  なる任意の  $p$  に対し

$D = \{r \in [X]^\alpha \mid r \Vdash \underline{f} \in M\}$  は  $p$  以下で dense すなわち

$\forall q \leq p \, \exists r \leq q \, r \in D$  となる.

さて  $p$  を  $G$  の元としてとれるので  $D \cap G \neq \emptyset$

よって  $\exists r \in G \, r \Vdash \underline{f} \in M$  すなわち  $M[G] \models \underline{f} \in M$

したがって  $f \in M$

q.e.d.

補題 1.5 任意の condition  $p, q \in [X]^\alpha$  に対し  $p, q$  が final segment を共有する. すなわちある  $\alpha < \mathcal{X}$  が存在して

$p - \alpha = q - \alpha$  なら、任意の generic filter  $G$  に対し

$$p \in G \iff q \in G$$

証明

$p \in G \Rightarrow q \in G$  を示せば十分.

そのためには  $\{r \in [X]^\alpha \mid r \leq q\}$  が  $p$  以下で dense になる

ことをいえばよいが容易に示せる.

q.e.d.

補題 1.6  $M^X \cap M[G] = M^X \cap M$

証明

$f \in M^X \cap M[G]$  とする. 補題 1.4 より  $\forall \alpha < X \ f \restriction \alpha \in M$

$P \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^X \ \& \ \forall \alpha < X \ f \restriction \alpha \in \underline{M}^X$  なる任意の condition

$p$  に対し partition  $F: [X]^X \rightarrow 2$  を以下のように定める.

$$F(q) = 0 \quad \text{iff} \quad \exists x \in M \ p \Vdash f \restriction nq = x$$

ここで  $nq$  は  $q$  の最小元を表わす.

$S \in [X]^X$  を  $F$  の homogeneous set とする

$p_S \leq p$  より  $p_S \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^X \ \& \ \forall \alpha < X \ f \restriction \alpha \in \underline{M}^X$

よって  $\exists t \leq p_S \ \exists x \in M \ t \Vdash f \restriction nS = x$

よって  $\exists r \leq S \ \exists x \in M \ p_r \Vdash f \restriction nS = x$

$nS = n(r \cup \{nS\})$  なので

$$\exists r \leq S \ \exists x \in M \ p_r \Vdash f \restriction n(r \cup \{nS\}) = x$$

$p_r$  と  $p(r \cup \{nS\})$  は final segment を共有するので補題 1.5

により  $p(r \cup \{nS\}) \Vdash f \restriction n(r \cup \{nS\}) = x$

したがって  $F(r \cup \{nS\}) = 0$

よって  $S$  が homogeneous であるので  $F^*[S]^X = \{0\}$

任意の  $\alpha < S$  に対し  $S' = (S - \alpha) \cup \{\alpha\}$  とおくと

$nS' = \alpha$ ,  $S' \leq S$  より  $\exists x \in M \ p_{S'} \Vdash f \restriction \alpha = x$

$p_{S'}$  と  $p_S$  は final segment を共有するので

$p_S \Vdash f \restriction \alpha = x$  したがって任意の  $\beta < \alpha$  に対し

$$\exists z \in M \text{ such that } \text{ps } \vdash \underline{z}(\beta) = z$$

$\alpha$  はいくらでも大きくとることができるので、これが任意の  $\beta < \kappa$  に対してなりたつ。

よって  $\text{ps } \vdash \underline{z} \in M$  が補題 1.4 の証明と同様いえる。

したがって同様に  $\underline{z} \in M$  が成りたつ。

q.e.d.

(注) 実際には任意の順序数  $\alpha$  に対し

$$M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M \quad \text{が成りたつことが知られている。}$$

補題 1.7  $M[G] \models \underline{G}$  は  $X$  上の  $\kappa$ -complete nonprincipal ultrafilter

証明

$(P, \leq)$  が splitting すなわち任意の condition  $p$  に対し incompatible な  $p$  の extension  $r, s$  が存在するので  $G \notin M$ 。したがって  $G$  は principal にはなりえない。

さて " $M[G] \models \underline{G}$  は  $X$  上の filter" は明らかなので次を示せば十分。

$$\text{任意の } \delta < \kappa \text{ に対し } \bigcup_{\alpha < \delta} A_\alpha = X \Rightarrow \exists \alpha \ A_\alpha \in G$$

補題 1.6 により任意の  $\alpha < \delta$  に対し  $A_\alpha \in M$

$$\text{よって補題 1.4 により } \langle A_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle \in M$$

$$\forall p \in [X]^\kappa \quad \bigcup_{\alpha < \delta} (p \cap A_\alpha) = p \quad \text{なので}$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha < \delta} (p \cap A_\alpha)} = \overline{p} = X.$$

$M$  で  $X$  が measurable なので regular になることに注意すると

$$\exists \alpha < \delta \quad \overline{p \cap A_\alpha} = X.$$

したがって  $\forall p \in [X]^\chi \exists r \in [X]^\chi r \leq p$  かつ  $r \leq A_\alpha$  for some  $\alpha < \delta$ .

よって  $D = \{r \in [X]^\chi \mid r \leq A_\alpha \text{ for some } \alpha < \delta\}$  は dense になる.

よって  $\exists p \in G \cap D$  すなわち  $\exists p \in G \exists \alpha p \leq A_\alpha$

したがって  $\exists \alpha A_\alpha \in G$

q. e. d.

補題 1.8  $\forall \alpha, \beta < \chi \quad M[G] \models X \rightarrow (X)^\alpha_\beta$

証明

Partition  $F: [X]^\alpha \rightarrow \beta$  に対し  $M$  の中で

Partition  $F': [X]^\chi \rightarrow \beta + 1$  を次のように定める

$$F'(q) = \begin{cases} \text{the least } \eta < \beta \text{ such that } q \Vdash F(q \restriction \alpha) = \eta & \text{if exists} \\ \beta & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\{X \in [X]^\chi \mid X \text{ は } F' \text{ の homogeneous set}\}$  は明らかに  $M$  に含まれ、dense なので  $\exists s \in G$   $s$  は  $F'$  の homogeneous set

$M[G] \models F: [X]^\alpha \rightarrow \beta$  なので

$\exists r \leq s \quad r \Vdash F(s \restriction \alpha) = \eta \quad \text{for some } \eta < \beta$  となる.

$r \leq s$  より  $s \restriction \alpha = (r \cup (s \restriction \alpha)) \restriction \alpha$

$$\text{よって } r \Vdash F((r \cup (s \restriction \alpha)) \restriction \alpha) = \eta$$

$r$  と  $r \cup (s \restriction \alpha)$  は final segment を共有するので

$$r \cup (s \restriction \alpha) \Vdash F((r \cup (s \restriction \alpha)) \restriction \alpha) = \eta$$

$$\text{したがって } F'(r \cup (s \restriction \alpha)) = \eta$$

$$\text{よって } F' "[S]^X = \{\eta\}$$

$$\forall t \in [S]^\alpha \quad (S - Ut) \cup t \in [S]^X \text{ なので}$$

$$(S - Ut) \cup t \Vdash F(\{(S - Ut) \cup t\} \restriction \alpha) = \eta$$

$$\{(S - Ut) \cup t\} \restriction \alpha = t \text{ なので}$$

$$(S - Ut) \cup t \Vdash F(t) = \eta$$

$S$  と  $(S - Ut) \cup t$  は final segment を共有するので

$$(S - Ut) \cup t \in G \quad \text{したがって } M[G] \models F(t) = \eta$$

よって  $S$  は  $F$  の homogeneous set になる.

q.e.d.

補題 1.9  $X^X/G$  には  $X$  番目の要素がない

証明

補題 1.4 の証明と同様に  $f \in X^X$  に対し

$p \Vdash f$  is not constant almost everywhere を満たす任意の

condition  $p$  に対し condition  $q \leq p$  と  $g \in X^X$  が存在し

て

$q \Vdash g < f$  almost everywhere &  $g$  is not constant almost everywhere

が成り立つことを示せば十分.

ここで  $P \in G$  としてもよいことに注意する.

Partition  $F: [X]^2 \rightarrow 3$  を次のように定義する.

$$F(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(\alpha) < f(\beta) \\ 1 & \text{if } f(\alpha) = f(\beta) \\ 2 & \text{if } f(\alpha) > f(\beta) \end{cases}$$

さて  $F$  の homogeneous set が  $G$  からとれるので

$P \in G$  とあわせて homogeneous set  $X \leq P$  をとることができる.

もし  $F''[X]^2 = \{1\}$  なら

$X \models f$  is constant almost everywhere

よって  $M[G] \models f$  is constant almost everywhere.

となり矛盾.

もし  $F''[X]^2 = \{2\}$  なら

$f(x(0)) > f(x(1)) > \dots$

となり矛盾

よって  $F''[X]^2 = \{0\}$  でなければならぬ.

さて  $q \in [X]^X$  を  $q = \{x(\beta+1) \mid \beta < \kappa\}$  とおき

$$g \in X^X \text{ を } g(\alpha) = \begin{cases} f(x(\beta)) & \text{if } \alpha = x(\beta+1) \\ 0 & \alpha \notin q \end{cases}$$

で定義する.

任意の  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{Q}$  に対し  $\alpha_1 < \alpha_2$  なら、ある  $\beta_1 < \beta_2$  があ

って、 $\alpha_1 = X(\beta_1 + 1) < \alpha_2 = X(\beta_2 + 1)$  とおけるので

$F''[X]^2 = \{0\}$  より  $g(\alpha_1) = f(X(\beta_1)) < f(X(\beta_2)) = g(\alpha_2)$

よって  $\mathcal{Q} \Vdash g$  is not constant almost everywhere

また任意の  $\alpha \in \mathcal{Q}$  に対し  $\alpha = X(\beta + 1)$  とおけ

$g(\alpha) = f(X(\beta)) < f(X(\beta + 1)) = f(\alpha)$

よって  $\mathcal{Q} \Vdash g < f$  almost everywhere

q. e. d.

補題 1.10 任意の  $\alpha < \chi$  に対し

$$M \models AC_\alpha \Rightarrow M[G] \models AC_\alpha$$

証明

$f$  を  $M[G]$  で 定義域を  $\alpha$  とする関数で  $\forall \beta < \alpha, f(\beta) \neq \emptyset$  とする.

$P \Vdash \underline{f}$  は 定義域を  $\alpha$  とする関数で  $\forall \beta < \alpha, \underline{f}(\beta) \neq \emptyset$

なる任意の condition  $P$  に対し partition

$F: [X]^\chi \rightarrow \alpha + 1$  を次のように定義する.

$$F(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \text{the least } \beta < \alpha \text{ if exists such that} \\ \quad P\mathcal{Q} \Vdash \tau \in \underline{f}(\beta) \text{ なる term } \tau \text{ が} \\ \quad \text{存在しない} \\ \alpha \text{ otherwise} \end{cases}$$

$F$  の homogeneous set を  $S$  とする

もしある  $\beta < \alpha$  に対し  $F''[S]^X = \{\beta\}$  なら

$\forall r \leq p_S \quad r \Vdash \tau \in \dot{f}(\beta)$  なる term  $\tau$  が存在しない.

$p_S \leq p$  より  $p_S \Vdash \dot{f}(\beta) \neq \emptyset$  なので矛盾

よって  $F''[S]^X = \{\alpha\}$

$M \models AC_\alpha$  なので  $\langle \tau_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M$  をとり

$\forall \beta < \alpha \quad p_S \Vdash \tau_\beta \in \dot{f}(\beta)$  とできる

これを使えば  $p_S \Vdash \dot{f}$  が choice function をもつ

が示される,

よって、前と同様にして  $M[G] \models AC_\alpha$  が成り立つ.

q. e. d.

### 参考文献

- [1] J. M. HENLE ; Aspect of choiceless combinatorial set theory, Ph. D. Thesis MIT 1976
- [2] E. M. Kleinberg ; Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness, Lecture Notes in Mathematics vol. 612 Springer Berlin, 1977
- [3] M. Spector ; A measurable cardinal with a nonwellfounded ultrapower, The Journal of Symbolic Logic vol. 45, 1980