

n 次元中間値の定理と戦略形ゲームへのその応用 An n -dimensional intermediate-value theorem and its application to a strategic game

川崎英文 *

HIDEFUMI KAWASAKI

九州大学大学院数理学研究院

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

Poincaré-Miranda の定理は n 次元の零点定理で、Poincaré [5] の予想を Miranda [4] が証明したものである。Miranda [4] は零点定理が Brouwer の不動点定理と同値であることも示している。Poincaré-Miranda の定理は中間値の定理の拡張と言われることがあるが、教科書にある慣れ親しんだ形の記述はこれまでなかった。川崎は [2] で n 次元中間値の定理を明示し、それが Poincaré-Miranda の定理と同値であることを示した。さらに、対戦型の 2 人ゲームと 3 人ゲームへの応用を図り、混合戦略により実現可能な利得関数の値域を示した。

本稿では、[2] で与えた n 次元中間値の定理の意味を考察し、定理の仮定の必然性を示す。さらに、対戦型の n 人ゲームに応用した結果を報告する。

1 序

$a_i < b_i$ ($i = 1, \dots, n$) として、 $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とする。1 次元の中間値の定理は次のようになる。

(A) $\min\{f(a), f(b)\} \leq \gamma \leq \max\{f(a), f(b)\}$ なる任意の γ に対し、 $f(c) = \gamma$ なる $a \leq c \leq b$ が存在する。

(B) 特に $\min\{f(a), f(b)\} < \gamma < \max\{f(a), f(b)\}$ ならば、 $f(c) = \gamma$ なる $a < c < b$ が存在する。

通常、中間値の定理は (B) の形で述べられるが、(A) は Brouwer の不動点定理 (1 次元) や Poincaré-Miranda の定理 (1 次元) と同値なので、(A) の形式で n 次元中間値の定理を記述する。

定理 1 (Poincaré-Miranda の定理) 連続写像 $g = (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ について、各 g_i が境界条件 (1) または (2) を満たすならば g は I に零点をもつ。

$$g_i(x) \leq 0 \ (x \in I, x_i = a_i), \quad 0 \leq g_i(x) \ (x \in I, x_i = b_i), \quad (1)$$

$$g_i(x) \geq 0 \ (x \in I, x_i = a_i), \quad 0 \geq g_i(x) \ (x \in I, x_i = b_i). \quad (2)$$

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

零点定理から中間値の定理を導くには、連続写像 $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $g(x) := f(x) - \gamma$ に零点定理を適用し、境界条件 (1)(2) を適切に翻訳すればよい。

定理 2 (n 次元中間値の定理 [2]) 連続写像 $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して

$$\overline{\alpha}_i := \max\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = a_i\}, \quad \overline{\beta}_i := \max\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = b_i\},$$

$$\underline{\alpha}_i := \min\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = a_i\}, \quad \underline{\beta}_i := \min\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = b_i\}$$

とおくとき、

$$\min\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\} \leq \gamma_i \leq \max\{\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

を満たす任意の $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ に対して、 $f(c) = \gamma$ なる $c \in I$ が存在する。さらに、(3) が狭義の不等式で成立する γ_i については $a_i < c_i < b_i$ が成立する。

定理 2 の証明には Poincaré-Miranda の定理を用いたが、 $\gamma = \mathbf{0}$ をとることにより逆の関係を示すことができる [2]。また、Poincaré-Miranda の定理と Brouwer の不動点定理が同値であることを含めて、諸定理の関係は Mawhin [3] が分かり易い。

2 不等式 (3) の意味

不等式 (3) を満たす γ_i が存在しないとき、定理 2 は何も述べていないことになる。そこで、(3) の意味を考えることにする。因みに、[2] には本節の考察はない。

補題 1 次の 3 条件は同値である。

(a) 不等式 (3) を満たす γ_i が存在する。

(b) $(\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i) \cap (\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i) = \emptyset$ 。

(c) 関数 f_i の向かい合った 2 つの境界での値域 $\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = a_i\}, \{f_i(x) \mid x \in I, x_i = b_i\}$ の重なりは高々 1 点である。

このとき、(3) は γ_i がこれらの 2 つの開区間の隙間にあることを意味する。

証明. (a) は $\min\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\} \leq \max\{\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i\}$ と同値で、これは $\overline{\alpha}_i \leq \underline{\beta}_i$ ($\leq \overline{\beta}_i$) または $\overline{\beta}_i \leq \underline{\alpha}_i$ ($\leq \overline{\alpha}_i$) と同値である。つまり、 $(\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i)$ と $(\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i)$ は交わらない。また、 $\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = a_i\} = [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$, $\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = b_i\} = [\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i]$ なので、(b) は (c) と同値である。■

注意 1 補題 1 により、向かい合う 2 つの境界での f_i の値域

$$\{f_i(x) \mid x \in I, x_i = a_i\} = [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i], \quad \{f_i(x) \mid x \in I, x_i = b_i\} = [\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i]$$

の隙間が大きいくほど、 γ_i の範囲が広がることになる。1 次元の場合は $[a, b]$ の境界における $f(x)$ の値は $f(a)$ と $f(b)$ であり、(c) が成立するので中間値の定理の主張が空になることはない。

また、2 次元以上の場合、 I の向かい合う境界での f_i の値域の重なりが高々 1 点ならば、その隙間に γ_i が入り込むことができる。その様子を描いたのが次の図 1 である。

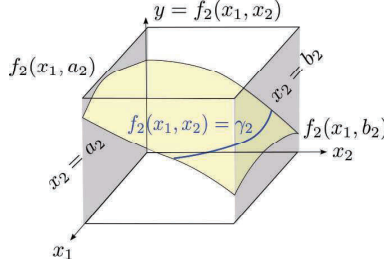


図 1: 関数 f_2 の境界 $x \in I, x_2 = a_2$ での値域は, 境界 $x \in I, x_2 = b_2$ での値域より上にある. 2つの値域の間の値 γ_2 をとり, 水平面 $y = \gamma_2$ でグラフをカットすると, 曲線 $f_2(x_1, x_2) = \gamma_2$ が表れる.

3 戦略形 n 人ゲームへの応用

本節では定理 2 を, 純戦略が 2 つである次の戦略形 n 人ゲームに適用する.

- プレイヤーを $i = 1, \dots, n$ で表し, 特定のプレイヤーには k を充てる.
- 各プレイヤーの選択枝 (純戦略) を j, l で表し, l ではない選択枝を $\bar{l}$ で表す.

$$\text{i.e. } \bar{l} := \begin{cases} 2 & (l = 1) \\ 1 & (l = 2) \end{cases} \quad (4)$$

- 1 次元確率ベクトルの空間を Δ_1 で表す. プレイヤー i の確率ベクトル $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2) \in \Delta_1$ が混合戦略である.
- $a_i^{j_1 \dots j_n}$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, 2$) を実数として, プレイヤー i の利得関数を多重線形関数

$$f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 a_i^{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

とする. プレイヤー i は他のプレイヤーの戦略を考慮して, 利得 f_i の最大化を図る.

プレイヤー $k = 1, \dots, n$ と選択枝 $l = 1, 2$ に対して, α_k^l を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_k^l &:= \min\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid x_k^{\bar{l}} = 1, \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \ (i = 1, \dots, n)\}, \\ \overline{\alpha}_k^l &:= \max\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid x_k^{\bar{l}} = 1, \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \ (i = 1, \dots, n)\}, \\ \underline{\beta}_k^l &:= \min\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid x_k^l = 1, \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \ (i = 1, \dots, n)\}, \\ \overline{\beta}_k^l &:= \max\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid x_k^l = 1, \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \ (i = 1, \dots, n)\}. \end{aligned}$$

例えば, $\underline{\beta}_k^l$ はプレイヤー k が純戦略 l を確率 1 で選択したとき, 考えられる最小利得であり, $\overline{\beta}_k^l$ は考えられる最大利得である.

次の補題 2 と定理 3 は, $n = 2, 3$ の場合に [2] で示している.

補題 2 プレイヤー k とその選択肢 $l = 1, 2$ について、以下が成り立つ。

$$\underline{\alpha}_k^l = \min\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = \bar{l}, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \quad (5)$$

$$\bar{\alpha}_k^l = \max\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = \bar{l}, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \quad (6)$$

$$\underline{\beta}_k^l = \min\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = l, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \quad (7)$$

$$\bar{\beta}_k^l = \max\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = l, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}. \quad (8)$$

ただし、 $\bar{l}$ は (4) で定義される。

証明. (7) の右辺を $\underline{b}_k^l$ とおき、 $k = 1$ の場合に等式を示すことにする。 $(x_1, \dots, x_n)$ を $\underline{\beta}_k^l$ の定義式の最小解とすると、

$$\begin{aligned} \underline{b}_1^l &= \sum_{j_2=1}^2 \cdots \sum_{j_n=1}^2 x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} a_1^{lj_2 \cdots j_n} \\ &\geq \underline{b}_1^l \sum_{j_2=1}^2 \cdots \sum_{j_n=1}^2 x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} = \underline{b}_1^l \prod_{i=2}^n (x_i^1 + x_i^2) = \underline{b}_1^l. \end{aligned}$$

逆に、 $\underline{b}_1^l = a_1^{lj_2, \dots, j_n}$ とすると、 $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ として、 $a_1^{lj_2, \dots, j_n} = f_1(e_1, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \geq \underline{b}_1^l$ なので (7) が示された。 (8) も同様に示される。 また、 $\underline{\alpha}_k^l = \underline{\beta}_k^l$, $\bar{\alpha}_k^l = \bar{\beta}_k^l$ なので、(7) と (8) から (5) と (6) が得られる。 ■

定理 3 各プレイヤーが 2 つの純戦略をもつ上述の n 人戦略形ゲームにおいて、

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_k &:= \min\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = 1, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \\ \bar{\alpha}_k &:= \max\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = 1, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \\ \underline{\beta}_k &:= \min\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = 2, j_i = 1, 2 (i \neq k)\}, \\ \bar{\beta}_k &:= \max\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid j_k = 2, j_i = 1, 2 (i \neq k)\} \end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$\min\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i\} \leq \gamma_i \leq \max\{\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

を満たす任意の $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ に対して、利得 γ を実現する混合戦略 $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_1^n$ が存在する。すなわち、

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \gamma_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

さらに、(9) が狭義の不等式で成立する γ_i については、 $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ は Δ_1 の内点である。

証明. 定理 2 と補題 2 を組み合わせればよい。 ■

例 1 ([2]) プレイヤーが 2 人のゲーム (双行列ゲーム) を考える。記述を簡潔にするために混合戦略を $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \Delta_1$, プレイヤー i の利得を

$$f_i(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

で表す。このとき、

$$\min\{\max\{a_1, b_1\}, \max\{c_1, d_1\}\} \leq \gamma_1 \leq \max\{\min\{a_1, b_1\}, \min\{c_1, d_1\}\} \quad (10)$$

$$\min\{\max\{a_2, c_2\}, \max\{b_2, d_2\}\} \leq \gamma_2 \leq \max\{\min\{a_2, c_2\}, \min\{b_2, d_2\}\}, \quad (11)$$

を満たす任意の (γ_1, γ_2) に対して、その利得を実現する混合戦略 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_1^2$ が存在する。さらに、 γ_1 が (10) を狭義に満たせば $\mathbf{x}$ は Δ_1 の内点であり、 γ_2 が (11) を狭義に満たせば $\mathbf{y}$ は Δ_1 の内点である。

プレイヤーが3人のときも同様である [2]。

4 結び

純戦略が3つ以上のときは、以下のような対応が考えられる。ポイントは、注意1で述べたように、利得関数の値域に大きな差ができるように向かい合う2つの境界を選ぶことである。そのためには境界が狭い方がよい。3節で考察したゲームとの違いは以下の通りである。

- プレイヤー i の選択枝（純戦略）を $j_i = 1, 2, \dots, m_i$ で表す。
- m 次元確率ベクトルの空間を Δ_m で表し、確率ベクトル $\mathbf{x}_i \in \Delta_{m_i-1}$ をプレイヤー i の混合戦略とよぶ。標準単位ベクトル $\mathbf{e}_{j_i} \in \Delta_{m_i-1}$ は純戦略 j_i を表す。
- $a_i^{j_1 \dots j_n}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j_i \leq m_i$) を実数として、プレイヤー i の利得関数は

$$f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} a_i^{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}.$$

プレイヤー i に対し、任意に2つの選択枝 $j_i \neq l_i$ をとり固定する。 $[\mathbf{e}_{j_i}, \mathbf{e}_{l_i}]$ を $\mathbf{e}_{j_i}$ と $\mathbf{e}_{l_i}$ を結ぶ線分として

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_k &:= \min\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{j_k}, \mathbf{x}_i \in [\mathbf{e}_{j_i}, \mathbf{e}_{l_i}] (i \neq k)\}, \\ \overline{\alpha}_k &:= \max\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{j_k}, \mathbf{x}_i \in [\mathbf{e}_{j_i}, \mathbf{e}_{l_i}] (i \neq k)\}, \\ \underline{\beta}_k &:= \min\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{l_k}, \mathbf{x}_i \in [\mathbf{e}_{j_i}, \mathbf{e}_{l_i}] (i \neq k)\}, \\ \overline{\beta}_k &:= \max\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{l_k}, \mathbf{x}_i \in [\mathbf{e}_{j_i}, \mathbf{e}_{l_i}] (i \neq k)\} \end{aligned}$$

とする。つまり、それぞれのプレイヤーの選択枝を2つに絞った上で3節と同様に定義する。これにより、選択枝が2の場合に帰着され、3節の結果が適用できる。また、プレイヤー i の2つの選択枝の組合せが増えるため、 γ_i の範囲が広がることが期待できる。

この方法以外に、例えば

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_k &:= \min\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{j_k}, \mathbf{x}_i \in \Delta_{m_i-1} (i \neq k)\} \\ \overline{\beta}_k &:= \max\{f_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mid \mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{j_k}, \mathbf{x}_i \in \Delta_{m_i-1} (i \neq k)\} \end{aligned}$$

と定義することも考えられるが, $[\underline{\beta}_k, \overline{\beta}_k]$ が広がるため, 隙間が出来ない可能性が高くなってしまふ. なお, 補題 2 の証明と同様にして, 次の等式他を示すことができる.

$$\underline{\beta}_k = \min\{a_k^{j_1, \dots, j_n} \mid 1 \leq j_i \leq m_i \ (i \neq k)\}.$$

最後に Nash 均衡に触れておく. 残念ながら, 本稿の手法では Nash 均衡を捉えることができない. つまり, Nash 均衡 x^* での利得 $\gamma := f(x^*)$ が不等式 (3) を満たすとは限らない. そのような例は簡単につくることができる.

5 謝辞

本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている.

参 考 文 献

- [1] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in: J. Tannery, (ed.) Introduction a la Théorie des Fonctions d'Une Variable. **2**, 2nd ed. Paris: Hermann, 1910, pp. 437–477.
- [2] H. Kawasaki, An n-dimensional intermediate value theorem and its application to the game theory, *Linear and Nonlinear Analysis*, **8**, No.1, (2022) 81–87.
- [3] J. Mawhin, *Simple Proofs of the Hadamard and Poincaré-Miranda Theorems Using the Brouwer Fixed Point Theorem*, *The American Mathematical Monthly*. **126** (2019) 260–263.
- [4] C. Miranda, *Un osservatione su un theorema di Brouwer*, *Boll. Unione Mat. Ital.* **3** (1940) 5–7.
- [5] H. Poincaré, *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **97** (1883) 251–252.