

Univalent Mappings of Several Complex Variables

東京電機大学工学部 鶴見 和之

(Kazuyuki Tsurumi)

本講では, $\mathbb{C}^m$ の単位球 B 上の単葉写像族の中で重要な役割を演ずる *starlike*, *convex* 及び *星-like* である写像の定義及びそれらに関連する定理を与える。

これらの写像は1変数の単葉函数の拡張として得られるものであるが, 1変数の諸定理の多変数 (Hilbert 空間, Banach 空間も含めて) への拡張もあまり進んでおらず, また, 多変数の写像として, 1変数とは異なる性質もあまり得られていない様に思えます。

記号 :

$\mathbb{C}^m$ の実数を列ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ で表し, 次の記号を用いる :

$z' := (z_1, \dots, z_m)$ (転置), $z^* := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ (転置共役)

$$\|z\| := \sqrt{z^* z} := \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2}$$

$$B := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$$

$$\mathbb{C}^n \text{ の領域から } \mathbb{C}^n \text{ への写像 } f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} \text{ (31ベクトル}$$

を表す) に対し

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobian 行列})$$

$$J_f(z) := \det(Df(z)) \quad (f \text{ の Jacobian})$$

$$J_f(z) \neq 0 \iff f(z) \text{ は局所單葉である.}$$

$\mathcal{H}(B)$: 領域 B から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の全体

$\mathcal{S}(B)$: 原点 0 を含む領域 B から $\mathbb{C}^n$ への正規化された ($f(0)=0$, $Df(0)=I$ (単位行列)) 單葉写像 $f(z)$ の全体.

§ 1. Starlike mappings

1.1. 定義 ^[11] $f(z) \in \mathcal{S}(B)$ が starlike であるとは,
 $\forall t (0 \leq t \leq 1)$ に対し $t f(B) \subset f(B)$ (tf は f に subordinate であり, これを $tf \prec f$ と表す) となるとき.

$S^*(B)$: $\mathcal{S}(B)$ の starlike mappings の全体.

このとき, 次の定理が成り立つ:

1.2. 定理 ([7], [11], [12]) $f(z) \in \mathcal{H}(B)$ を正規化された写像で, $J_f(z) \neq 0$ in B とする。このとき,
 $f(z) \in S^*(B) \iff \operatorname{Re} z^* (Df(z))^{-1} f(z) > 0 \quad (\forall z \in B, \neq 0)$ □

この定理は最初, 松野 [7] によって与えられ, 後に, 菊地 [6], Suffridge [11], [12] によって再考察され, Hilbert 空間に拡張された ([12])。 (また, polydisk に対しても同様の定理が成り立つ [11].) この定理は1変数の場合の直接の拡張である, 表現法も簡単に starlike の判定法としては使いやすいものである。

この定理により, starlike な写像に対する次の増大定理が成り立つ:

1.3. 定理 ([1], p. 16). $f(z) \in S^*(B)$ とする。
 このとき, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}$$

□

1.4. 系. $S^*(B)$ は $(\mathcal{H}(B))$ 内の部分集合として compact uniform topology で compact である。 □

また, 次の radial growth に関する定理が成り立つ:

1.5.系 ([13]) $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ は Hayman index $\alpha > 0$ を持つとする。この時次の様な方向 $a \in \mathbb{C}^m$ ($\|a\|=1$) が存在する:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 \|f(xa)\| = \alpha$$

(この方向 a はただ一つとはかぎらない)。

□

1.6.例.

(1) $\mathbb{C}^2$ において

$$f(z) = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{(1-z_1)} \\ \frac{z_2}{(1-z_1)} \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{(1-z_1)^2} \\ \frac{z_2}{(1-z_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)} z$$

($\zeta \in \mathbb{C}^m, \|\zeta\|=1$)

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^2} z$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{1-z'/z} z$$

$$(6) \quad f(z) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z'/z)^n}{2n+1} \right\} z$$

□

本節の諸定理は一般の Hilbert 空間, Banach 空間に拡張できる。

§2. Convex mappings

写像 $f(z) \in \mathcal{S}(B)$ に対して, $f(B)$ が $\mathbb{C}^n$ の凸領域となるとき, $f(z)$ は convex in B であるという。1変数の場合には, 単位円上の正規化された正則函数 $f(z)$ が convex であるための必要十分条件は, $\operatorname{Re}(1 + z f''/f') > 0$ となることである。この定理の $\mathbb{C}^n$ への拡張は最初, 松野 [7] によって与えられ, 後, 菊地 [6], Suffridge [11], [12] によって再構成された。これは次の様に与えられる:

2.1. 定理 ([7], [6]). $f(z) \in \mathcal{S}(B)$ が convex である
 $\iff \operatorname{Re} \{ 1 - z^* (Df(z))^{-1} D^2 f(z) \alpha^2 \} > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n, \|\alpha\| = 1, z \in B, \operatorname{Re} z^* \alpha = 0).$

ここで, $\alpha^2 := (\alpha_1^2, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_1 \alpha_n, \alpha_2 \alpha_1, \dots, \alpha_n^2)'$

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} \right)$$

□

この定理を用いて, R.W. Barnard, C.H. Fitzgerald and S. Gong [2] は $\mathbb{C}^2$ における歪曲定理を与えている。

2.2. 定理 ([2], p. 921) $f(z) \in \mathcal{S}(B)$ が convex in B ならば, 次の式が成り立つ:

$$\frac{(1 - \|z\|)^{0.261}}{(1 + \|z\|)^{3.261}} < |J_f(z)| < \frac{(1 + \|z\|)^{0.261}}{(1 - \|z\|)^{3.261}},$$

$$|\arg J_f(z)| < 1.761 \log \left(\frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|} \right)$$

□

また、或る種の Banach 空間においては、convex mapping は線型写像となる、様な例もあり、convex mapping に関する諸定理を一般の Hilbert 空間、Banach 空間に拡張した場合に意味があるか、ないかを調べておくことが必要である。

§3. Φ -like mappings

Φ -like analytic function の概念は spirallike の概念の拡張として、Brickman [3] によって与えられた。これを Gurganus [4] は $\mathbb{C}^n$ 及び Banach 空間に拡張した。これは、初期値問題として与えられるもので、広々応用面がある様に思われ、單葉函数(写像)族としても最も広いものである。

3.1. 定義, D を原点を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とし、 $\Phi(z) \in \mathcal{H}(D)$ を、 $\Phi(0)=0$, $\operatorname{Re} z^* D\Phi(z)z > 0$ ($z \in D, z \neq 0$) とする。

(a) $f(z) \in \mathcal{H}(B)$, $f(0)=0$, $Df(0)=I$ (identity matrix) $J_f(z) \neq 0$ in B , $f(B)$ は Φ の定義域に含まれるとする。このとき、 $f(z)$ が Φ -like in B であるとは、 $\operatorname{Re} (z^* (Df(z))^T \Phi(f(z))) > 0$ ($z \in B, z \neq 0$) となるものである。

(b) 領域 $\mathcal{D}$ が Φ -like であるとは, $\forall X \in \mathcal{D}$ に対して
初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w(t)), \quad w(0) = X$$

が解 $w(t) \in \mathcal{D}$ ($t \geq 0$), $w(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を持つ
ときである。(ここに解 $w(t)$ が存在すればただ一つ
である.)

3.2. 定理. ([4])

(a). $f(z): \Phi$ -like in $B \Rightarrow f(z):$ 単葉で, $f(B)$ は
 Φ -like domain in $\mathbb{C}^n$ である。

(b). $f(z) \in \mathcal{H}(B)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$, $f(B): \Phi$ -like
domain in $\mathbb{C}^n \Rightarrow f(z): \Phi$ -like mapping
□

3.3. 系 $f(z) \in \mathcal{H}(B)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$.

$f(z): B$ で単葉 $\Leftrightarrow$ 或る Φ に対して, $f(z)$ は Φ -like.

3.4. 系 $f(z) \in S^*(B) \Leftrightarrow f(z): I$ -like
($\Phi(z) = Iz$)

□

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U, \quad (U: \text{unitary 行列, 各固有値の実部 } \operatorname{Re} \lambda_j > 0)$$

とし, $\Phi(x) = Ax$ のとき, この Φ -like mapping を spirallike in B と言う。

本節の諸概念は, 勿論, 一般の Banach 空間に拡張出来るが, 函数論的諸性質がどうなっているかはほとんど知られていない, 例えば, Rudin の本 [10] にあがっている問題の類似はどうか等?

文 献

- [1] R. W. Barnard, C. H. Fitzgerald, and S. Gong : The growth and $\frac{1}{4}$ -theorems for starlike functions in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. M. 150 (1991) 13 - 22.
- [2] R. W. Barnard, C. H. Fitzgerald, and S. Gong : A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. A. M. S. 344 (1994), 907 - 924.
- [3] L. Brickman : Φ -like analytic functions I, Bull. A. M. S. 79 (1973) 555 - 558.
- [4] K. Gurganus; Φ -like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. A. M. S. 205 (1975) 389 - 406.
- [5] L. F. Heath and T. J. Suffridge : Starlike, convex close-to-convex, spirallike, and Φ -like maps in a commutative Banach algebra with identity, Trans. A. M. S. 250 (1979) 195 - 212.
- [6] K. Kikuchi : Starlike and convex mappings in several complex variables, Pacific J. M. 44 (1973) 569 - 580.
- [7] T. Matsumo : On starlike theorems and convex-like theorems in the complex vector space, Sci.

- Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A. 5 (1955) 88-95.
- [8] J. A. Pfaltzgraff : Subordination chains and univalence of holomorphic mappings on $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55-68.
- [9] J. A. Pfaltzgraff and T. J. Suffridge : Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, Pacific J. M. 57 (1975) 271-279.
- [10] W. Rudin : Function Theory in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. 1980.
- [11] T. J. Suffridge : The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. M. 33 (1970) 241-248.
- [12] T. J. Suffridge : Starlike and convex maps in a Banach space, Pacific J. M. 46 (1973) 575-589.
- [13] 熊見和之 : Radial growth of starlike holomorphic mappings in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, 数理解析研究所講究録 946 (1996年4月). 61-69.