

数式処理の実射影平面上 N 本直線配置問題への 応用事例

武庫川女子大学 生活環境学部 福井哲夫 (Tetsuo Fukui)

姫路工業大学 理学部 関口次郎 (Jiro Sekiguchi)

Abstract. 本稿では、実射影平面上の N 本直線配置に関する分類について議論する。著者の一人、関口は 6 本および 7 本の場合の直線配置がそれぞれタイプ E_6 および E_7 のルート系に関係していることを示し、分類の手がかりを与えた。

しかし、それら N 本の代表的な配置を見つけ、図示することは大変手間のかかる作業である。本稿では数式処理システム Mathematica を使い実射影平面上の N 本配置のセル多角形をカウントするアルゴリズムを提案し、特に 7 本配置の場合の任意の配置を 14 タイプへ完全に分類するアルゴリズムを示す。

さらに、 N 本配置から $(N+1)$ 本配置を構成するアルゴリズムを紹介し、数学の問題解析に役立つ事例を報告する。

1. はじめに

平面上に n 本の直線を任意に配置したとき、作られる多角形の種類や個数によってどのように分類されるかを解析する問題を n 本直線配置問題と呼ぶ。ユークリッド平面上の n 本直線配置問題については文献 [1],[2],[3] で議論されている。これらの議論は計算幾何学において n 直線アレンジメントと呼ばれ、アレンジメントの解析は凸包の問題や線形計画問題などに応用される [4]。

2 次元平面上の番号付けられた n 直線の集合を $H = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ とする。以下では、次の条件を満たす単純なアレンジメント $A(H)$ を考える：

条件 1 H の各要素は互いに平行でない、

条件 2 どの 3 直線も 1 点で交わらない。

アレンジメントの複雑さは頂点（交点）の数、辺（線分）の数、セル（面）の数によって知ることができる。容易にわかるように、ユークリッド平面上の n 直線アレンジメントの複雑さは次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{頂点の数} &= \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{辺の数} &= n^2 \\ \text{セルの数} &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 \end{aligned} \tag{1}$$

無限遠の取り扱いを実射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ で考えると単純になることがある。本稿ではその実射影平面上の n 直線アレンジメントについて議論する。 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上では一つの直線は他の $(n-1)$ 本の直線によって $(n-1)$ 個の辺に分割される。したがって、アレンジメントの複雑さは (1) と異なり次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{頂点の数} &= \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{辺の数} &= n(n-1) \\ \text{セルの数} &= \frac{n(n-1)}{2} + 1 \end{aligned} \quad (2)$$

ところが、セルどうしの接続関係まで考慮に入れた詳細構造がどのように分類されるかはそう単純でない。本稿ではアレンジメントが作るセル多角形を定義し、セル多角形の分布を中心にアレンジメントの分類を考察する。

2. 数学的背景

著者の一人、関口は $n=6$ および $n=7$ の場合がそれぞれタイプ E_6 および E_7 のルート系に関係していることを示し、それらの Weyl 群の作用からそれらのアレンジメントを正確に分類した [6][7][8][9][10]。ここではこれらの数学的結果をまとめることから始める。

以下では $n=7$ の場合を中心に議論するが、 $n=6$ の場合も並行的に議論できる。

2.1. タイプ E_7 のルート系

まず、タイプ E_7 のルート系 [5] を導入する。8次元ユークリッド空間 $\tilde{E}$ の基底を $\{e_j; 1 \leq j \leq 8\}$ とする。 $\tilde{E}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$$

このとき $e_7 + e_8$ と直交する線形部分空間を E とする。この基底によって E の 63 ベクトルが次のように定義される：

$$\begin{aligned} r_1 &= e_7 - e_8 \\ r_j &= e_{j-1} - r_0 + r_1 & (1 < j \leq 7) \\ r_{1j} &= -e_{j-1} + r_0 & (1 < j \leq 7) \\ r_{ij} &= e_{i-1} - e_{j-1} & (1 < i < j \leq 7) \\ r_{1jk} &= -e_{j-1} - e_{k-1} & (1 < j < k \leq 7) \\ r_{ijk} &= -e_{i-1} - e_{j-1} - e_{k-1} + r_0 & (1 < i < j < k \leq 7) \end{aligned}$$

ここで、

$$r_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^8 e_j - e_8.$$

このとき、

$\pm r_i, \pm r_{ij}, \pm r_{ijk}$ による全体集合 Δ は E_7 のルート系を成す。明らかなように、ルートの組

$$r_{12}, r_{123}, r_{23}, r_{34}, r_{45}, r_{56}, r_{67}$$

は正のルート系を張り、その拡張 Dynkin 図形は次のようになる：

$$\begin{array}{ccccccccccc} r_1 & - & r_{12} & - & r_{23} & - & r_{34} & - & r_{45} & - & r_{56} & - & r_{67} \\ & & & & & & | & & & & & & \\ & & & & & & r_{123} & & & & & & \end{array}$$

E 上の r_i, r_{ij}, r_{ijk} に関する鏡映を s_i, s_{ij}, s_{ijk} とする。 Δ 上の s_i, s_{ij}, s_{ijk} の作用を定義するに当たって、次の直交関係に注意しよう。

$$r_i \perp r_{jk}, \quad r_i \perp r_{ijk}, \quad r_{ij} \perp r_{kl}, \quad r_{ij} \perp r_{ijk}, \quad r_{ij} \perp r_{klm}, \quad r_{ijk} \perp r_{ilm}$$

ここでおよびこれ以後も、異なる添字をもつルートは異なるものとする。 Δ に関する鏡映の作用は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} s_i &: r_j \leftrightarrow r_{ij}, \quad r_{jk} \leftrightarrow r_{ik}, \quad r_{jkl} \leftrightarrow r_{mnp} \quad (\{i, j, k, l, m, n, p\} = \{1, 2, \dots, 7\}), \\ s_{ij} &: \text{permutation of the indices } i \text{ and } j, \\ s_{123} &: r_1 \leftrightarrow r_1, \quad r_4 \leftrightarrow r_{567}, \quad r_{12} \leftrightarrow r_{12}, \quad r_{14} \leftrightarrow r_{234}, \quad r_{45} \leftrightarrow r_{45}, \quad r_{145} \leftrightarrow r_{145}. \end{aligned}$$

鏡映 s_i, s_{ij}, s_{ijk} によって生成される群はタイプ E_7 の Weyl 群 $W(E_7)$ に他ならない。特に、対称群 S_7 は s_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) によって生成される $W(E_7)$ の部分群と同一視される。

Definition 1 a_i ($i = 1, 2, 3, 4$), b_{ij} ($1 \leq i < j \leq 4$) を Δ のルートとする。(全ての i, j に対して $s_{ij} = s_{ji}$ である。) 集合

$$A = \{a_i; i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{b_{ij}; 1 \leq i < j \leq 4\}$$

が次のような条件を満たすとき *tetrahedral set* と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \langle a_i, a_j \rangle = 0 \quad (i \neq j), \\ \text{(ii)} \quad & \langle b_{ij}, b_{kl} \rangle = 0 \quad (\{ij\} \neq \{kl\}), \\ \text{(iii)} \quad & |\langle a_i, b_{jk} \rangle| = 0 \quad \text{if and only if } i \notin \{j, k\}. \end{aligned}$$

この *tetrahedral set* には次のような命題が成り立つ。

Proposition 1 A および A' を *tetrahedral set* とする。このとき、 $\omega \cdot \tilde{A} = \tilde{A}'$ を満たすような $\omega \in W(E_7)$ が存在する。ここで、 $A = \{a_i\} \cup \{b_{ij}\}$ に対して、 $\tilde{A} = \{\pm a_i\} \cup \{\pm b_{ij}\}$ と表し、拡張 *tetrahedral set* と呼ぶ。

S_7 -orbit 構造を述べるために Tabel 1 のような 14 の拡張 *tetrahedral set* を導入しよう。さて、Tabel 1 の Type A の *tetrahedral set*

$$\tilde{A} = \pm\{r_{345}, r_{123}, r_{146}, r_{256}, r_{135}, r_{167}, r_{347}, r_{124}, r_{236}, r_{257}\} \quad (3)$$

に対して次の命題が成り立つ。(ここで、 $\pm\{r_{345}, r_{123}, \dots\}$ は $\{\pm r_{345}, \pm r_{123}, \dots\}$ の省略記号である。)

Type	拡張 <i>tetrahedral set</i>	Isotropy
A	$\pm\{r_{345}, r_{123}, r_{146}, r_{256}, r_{135}, r_{167}, r_{347}, r_{124}, r_{236}, r_{257}\}$	Z_3
B1	$\pm\{r_{345}, r_{123}, r_{146}, r_{256}, r_{25}, r_{167}, r_{347}, r_{34}, r_{16}, r_{257}\}$	Z_3
B2	$\pm\{r_{345}, r_{123}, r_{146}, r_{256}, r_{14}, r_{2}, r_{57}, r_{124}, r_{236}, r_{257}\}$	1
B3	$\pm\{r_{14}, r_{25}, r_{146}, r_{256}, r_{135}, r_{167}, r_{347}, r_{124}, r_{236}, r_{257}\}$	1
B4	$\pm\{r_{345}, r_{123}, r_{146}, r_{256}, r_6, r_{167}, r_{23}, r_{17}, r_{236}, r_{45}\}$	1
B5	$\pm\{r_2, r_{123}, r_{47}, r_{256}, r_{135}, r_{167}, r_{347}, r_{124}, r_{236}, r_{257}\}$	1
C1	$\pm\{r_{15}, r_{24}, r_{36}, r_7, r_{25}, r_{167}, r_{17}, r_{34}, r_{346}, r_6\}$	1
C2	$\pm\{r_{25}, r_{14}, r_{146}, r_{256}, r_{345}, r_5, r_{27}, r_{34}, r_{16}, r_{257}\}$	1
C3	$\pm\{r_{36}, r_7, r_{15}, r_{24}, r_{246}, r_{167}, r_{347}, r_{356}, r_{145}, r_{257}\}$	Z_3
C4	$\pm\{r_6, r_{37}, r_{146}, r_{256}, r_{157}, r_{26}, r_{347}, r_{34}, r_{267}, r_{15}\}$	1
D1	$\pm\{r_{56}, r_{123}, r_{13}, r_{256}, r_{136}, r_{157}, r_{57}, r_{124}, r_{24}, r_1\}$	1
D2	$\pm\{r_{47}, r_{123}, r_2, r_{256}, r_{14}, r_{146}, r_{57}, r_6, r_{236}, r_{23}\}$	1
D3	$\pm\{r_{46}, r_{123}, r_{146}, r_{23}, r_{14}, r_{147}, r_{367}, r_7, r_{25}, r_{257}\}$	1
D4	$\pm\{r_{37}, r_6, r_{146}, r_{256}, r_{157}, r_{136}, r_{57}, r_{124}, r_1, r_{24}\}$	1

Table 1. *tetrahedral set* の S_7 -orbit 構造を決める 14 タイプ

Proposition 2 $W(E_7)$ の中の $\tilde{A}$ による等方部分群は群 $S_4 \times Z_2$ と同型である。

今、Table 1 の Type が X の *tetrahedral set* を A とするとき、 $\tilde{A}$ の S_7 -orbit を O_X で表そう。上記の **Proposition 1, 2** より、拡張 *tetrahedral set* の S_7 -orbit 構造に対して次のような分類を得る。

Theorem 1 拡張 *tetrahedral set* の集合 T は 14 個の S_7 -orbit

$$O_X \quad (X \in L = \{A, B1, \dots, B5, C1, \dots, C4, D1, \dots, D4\}) \quad (4)$$

に分解される。

2.2. 実射影平面上の 7 本直線配置

まず、 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上のラベル付けされた n 本直線 $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ を考える。射影平面では単純なアレンジメントの条件は：

条件 1 n 直線 $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ は互いに異なる、

条件 2 どの 3 直線も 1 点で交わらない、

だけでなく、円錐曲線との交叉が問題となる。

このため、ラベル付けされた n 本直線によって作られる p 多角形を定義しよう。 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) - \bigcup_{j=1}^n l_j$ の各連結成分を多角形と呼ぶ。多角形が p 個の直線で囲まれているとき、その多角形を p 多角形と呼ぶ。

容易にわかるように、どの 3 つも 1 点で交わらない任意の 5 直線に対して、その全ての 5 直線に接する円錐曲線が一意的に存在する。例えば、 $n = 6$ の場合を考えよう。ある 6 直線 $(l_j)_{1 \leq j \leq 6}$ 配置に対して 6 角形が存在すると仮定しよう。その中の 5 つ、すなわち $l_1, \dots, l_5$

を取り、 $l_1, \dots, l_5$ に接する円錐曲線を C とする。このとき、次の3つの場合が存在する：(1) l_6 が C と交わる、(2) l_6 が C と接する、(3) l_6 が C と交わらない。本稿では (2) の場合を除く。すなわち六角形をもつラベル付けされた6直線の組は次の条件によって2つの部分に分解される：

条件3 どの6直線 $l_1, l_2, \dots, l_6$ も一つの円錐曲線に接しない。

条件1,2 に従う $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上のラベル付けされた7直線の全体は配位空間 $P(3, 7)$ を張る。ただし、空間 $P(3, 7)$ は次で定義される。

$$P(3, 7) = GL(3, \mathbf{R}) \backslash M'(3, 7) / (\mathbf{R}^\times)^7$$

ここで、 $M'(3, 7)$ は3次小行列式がゼロでない実 3×7 行列の集合である。一方、**条件1,2** および3に従う $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上のラベル付けされた7直線の全体は $P(3, 7)$ の部分集合を張る。これを $P_0(3, 7)$ と表す。 $P(3, 7)$ および $P_0(3, 7)$ はどちらも $\mathbf{R}^6$ のアフィン開部分集合である。

具体的には、7直線を $(l_j)_{1 \leq j \leq 7}$ とし、 l_j は次で定義されていると仮定する：

$$l_j : a_{1j}\xi + a_{2j}\eta + a_{3j}\zeta = 0.$$

ここで $(\xi : \eta : \zeta)$ は $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上の斉次座標である。この (l_j) に対し 3×7 行列を定義する：

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \end{pmatrix}.$$

適当な射影線形変換によって、 l_1, l_2, l_3, l_4 を $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0, \xi + \eta + \zeta = 0$ のように選んでもよい。また、直線 l_j の方程式は a_{1j} ($5 \leq j \leq 7$) で割ってもよい。このことから、 $P(3, 7)$ の任意の要素の表現として、次のような行列の形式を選ぶことができる：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

7直線 $l_1, l_2, \dots, l_7$ 上の置換は $P(3, 7)$ (又は $P_0(3, 7)$) 上の双正則 S_7 -作用を引き起こす。今、 $\mathcal{P}_7$ を $P_0(3, 7)$ の連結成分が作る集合としよう。 $P(3, 7)$ 上の S_7 -作用は自然に双有理 $W(E_7)$ -作用へ拡張されることを強調しておく (cf. [8], [9])。 $P_0(3, 7)$ 上の $W(E_7)$ -作用は自然に $\mathcal{P}_7$ 上の作用を引き起こす。それゆえ、 $\mathcal{P}_7$ 上の $W(E_7)$ -orbital 構造が決まり、**Theorem1** より、同様の14分解が存在する。この14個の分解が7直線アレンジメントの分類パターンに他ならない。

次に具体的なサンプルを示そう。 3×7 行列 $X_A (\in P(3, 7))$ を

$$X_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 7/5 \\ 0 & -2 & 21/10 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 9/10 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

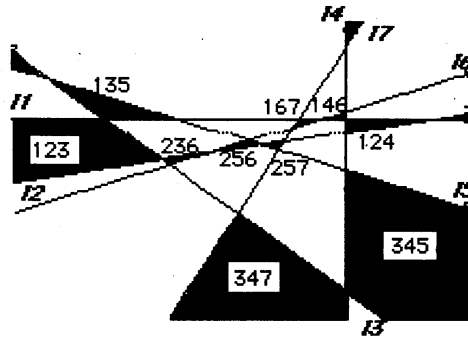


Fig. 1. Type A のアレンジメントとルート系との対応

とおくと、アレンジメントは Fig.1 のようになる。

このアレンジメントのセル多角形分布は 3 角形が 10 個、4 角形が 6 個、5 角形が 6 個で 6 角形以上を作らないパターンである。さらに、7 本の内どの 6 直線を選んでも 6 角形を作らない。Fig.1 (黒塗り部分) のように 10 個の 3 角形を囲む直線番号をルートの添字番号に対応させると式 (3) の Type A の *tetrahedral set* に一致する。そこで Fig.1 を Type A のアレンジメントと呼ぶことにする。残りの 13 Type のアレンジメントは式 (5) を元に、 $W(E_7)$ の作用によって次のように作ることができる。

$$\begin{aligned}
 X_{B1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{37} & \frac{9}{10} & \frac{27}{26} & \frac{45}{184} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{729}{370} & -\frac{81}{10} & \frac{729}{1378} & -\frac{5265}{12328} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{3267}{370} & \frac{18}{5} & \frac{2133}{1040} & \frac{3069}{2392} \end{pmatrix} \\
 X_{B2} &= \begin{pmatrix} -\frac{21}{10} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{8} \\ -\frac{133}{30} & -\frac{14}{15} & 1 & 1 & 0 & \frac{17}{40} & \frac{707}{648} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{189}{370} & 1 & 0 & 1 & \frac{17}{90} & \frac{217}{568} \end{pmatrix} \\
 X_{B3} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{7} & 0 & -\frac{3}{56} & -\frac{5}{54} \\ 1 & \frac{2}{5} & 1 & -\frac{93}{70} & 0 & -\frac{327}{1400} & -\frac{37}{108} \\ 1 & -\frac{1}{90} & 0 & -\frac{9}{70} & 1 & \frac{9}{2968} & -\frac{65}{3618} \end{pmatrix} \\
 X_{B4} &= \begin{pmatrix} \frac{33}{7} & 1 & \frac{110}{71} & 0 & \frac{11}{4} & -\frac{33}{37} & 0 \\ \frac{506}{91} & 1 & \frac{26455}{19596} & 1 & \frac{11}{12} & -\frac{1793}{1554} & 0 \\ -\frac{66}{35} & 1 & \frac{5632}{2627} & 0 & \frac{99}{20} & -\frac{429}{1850} & 1 \end{pmatrix} \\
 X_{B5} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{17}{126} & -\frac{17}{267} & \frac{17}{37} & -\frac{17}{66} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{935}{1638} & -\frac{18547}{53667} & \frac{748}{259} & -\frac{119}{99} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{731}{2520} & \frac{2125}{14151} & -\frac{544}{185} & \frac{697}{1650} & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
X_{C1} &= \begin{pmatrix} -\frac{18277}{9990} & \frac{18277}{1300} & -\frac{18277}{12000} & 0 & 1 & 0 & \frac{1430082}{271475} \\ -\frac{237601}{124875} & \frac{7073199}{509860} & -\frac{201047}{1332000} & 0 & 1 & 1 & \frac{26061337674}{4554210305} \\ -\frac{74227}{39960} & \frac{2936629}{210600} & -\frac{201793}{108000} & 1 & 1 & 0 & \frac{217408772193}{40452218275} \end{pmatrix} \\
X_{C2} &= \begin{pmatrix} -\frac{37821817}{22152312} & \frac{340396353}{3107741} & -\frac{340396353}{74915750} & 0 & 0 & \frac{11252772}{6917183} & 1 \\ -\frac{154955984249}{58194123624} & \frac{4730715048543}{42315001456} & \frac{4074430879959}{4159472271500} & 1 & 0 & \frac{218725908600153}{114516413247782} & 1 \\ -\frac{156620144197}{81963554400} & \frac{208057815317}{1957876830} & -\frac{531320885216}{92858072125} & 0 & 1 & \frac{6948398538646}{3891503398055} & 1 \end{pmatrix} \\
X_{C3} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{481}{31752} & \frac{715}{4704} & -\frac{3757}{133560} & -\frac{3757}{448560} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6253481}{748870920} & \frac{376805}{7396256} & -\frac{176579}{11886840} & -\frac{296803}{71321040} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{235902158999}{2868309077256} & -\frac{45785549095}{45692675616} & \frac{1794403}{12287520} & \frac{79313}{1345680} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{C4} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{203320}{8167473} & -\frac{15045680}{227868633} & -\frac{1173}{4450} & 0 & -\frac{40664}{223713} & 0 \\ 1 & \frac{33568319}{6926017104} & -\frac{2958955315}{338157051372} & -\frac{950691}{24528400} & 1 & -\frac{65059}{1789704} & 0 \\ 1 & \frac{315938761}{7113868983} & -\frac{34625713730}{198473579343} & -\frac{17364939}{31007600} & 0 & -\frac{962387}{2908269} & 1 \end{pmatrix} \\
X_{D1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{59111150462045}{64246312480896} & 0 & -\frac{6997625}{42722316} & 1 & -\frac{180009643}{48825504} \\ 0 & -\frac{131524615112918144755}{2194075817535079296} & 1 & -\frac{5673560875}{758321109} & 1 & \frac{892307800351}{9866507616} \\ 1 & -\frac{291477827186045}{64246312480896} & 0 & -\frac{13722530329881339317125}{26768871641128144459932} & 1 & \frac{6312067094604268853369}{1779383684416172129568} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \frac{11822230092409}{265805591688} \\ \frac{5899292816112091}{39339227569824} \\ \frac{19304331701209}{265805591688} \end{pmatrix} \\
X_{D2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4865600}{1530419} & \frac{1093665240}{9878159} & -\frac{16010865}{6399934} & 0 & -\frac{2682162}{54295} \\ 1 & 0 & -\frac{188540400}{74990531} & \frac{652331905110}{5324327701} & -\frac{44880919980}{13955056087} & 1 & -\frac{6622509}{108590} \\ 1 & 1 & -\frac{5405402663680}{814322176129} & \frac{2833977178595412}{26280397502345} & -\frac{7243295127003}{3405347281994} & 0 & -\frac{11980728}{271475} \end{pmatrix} \\
X_{D3} &= \begin{pmatrix} -\frac{91}{4440} & -\frac{91}{4995} & 0 & \frac{26}{1961} & \frac{24921}{411625} & 0 & 1 \\ -\frac{143}{1110} & -\frac{247}{1665} & 1 & \frac{3024502}{35841197} & \frac{95325092811}{219021957875} & 0 & 1 \\ -\frac{65}{1998} & -\frac{559}{19980} & 0 & \frac{333853}{15566418} & \frac{677333397}{7422422000} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{D4} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{14720}{11583} & \frac{627193532}{31762575} & -\frac{6399934}{16010865} & 1 & 0 & -\frac{40848}{923} \\ 1 & \frac{40842158720978240}{24682651914431511} & -\frac{96013509706}{2128092525} & -\frac{47848569869}{69823382265} & 1 & 0 & -\frac{5376083353538088}{211493428968913} \\ 0 & \frac{15973821146240}{18742321771173} & \frac{3673984511644}{96589990575} & -\frac{2129405240282}{8519237168715} & 1 & 1 & -\frac{71299566500784}{1493495898713} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
X_{D2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4865600}{1530419} & \frac{1093665240}{9878159} & -\frac{16010865}{6399934} & 0 & -\frac{2682162}{54295} \\ 1 & 0 & -\frac{188540400}{74990531} & \frac{652331905110}{5324327701} & -\frac{44880919980}{13955056087} & 1 & -\frac{6622509}{108590} \\ 1 & 1 & -\frac{5405402663680}{814322176129} & \frac{2833977178595412}{26280397502345} & -\frac{7243295127003}{3405347281994} & 0 & -\frac{11980728}{271475} \end{pmatrix} \\
X_{D3} &= \begin{pmatrix} -\frac{91}{4440} & -\frac{91}{4995} & 0 & \frac{26}{1961} & \frac{24921}{411625} & 0 & 1 \\ -\frac{143}{1110} & -\frac{247}{1665} & 1 & \frac{3024502}{35841197} & \frac{95325092811}{219021957875} & 0 & 1 \\ -\frac{65}{1998} & -\frac{559}{19980} & 0 & \frac{333853}{15566418} & \frac{677333397}{7422422000} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
X_{D4} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{14720}{11583} & \frac{627193532}{31762575} & -\frac{6399934}{16010865} & 1 & 0 & -\frac{40848}{923} \\ 1 & \frac{40842158720978240}{24682651914431511} & -\frac{96013509706}{2128092525} & -\frac{47848569869}{69823382265} & 1 & 0 & -\frac{5376083353538088}{211493428968913} \\ 0 & \frac{15973821146240}{18742321771173} & \frac{3673984511644}{96589990575} & -\frac{2129405240282}{8519237168715} & 1 & 1 & -\frac{71299566500784}{1493495898713} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

3. 数式処理によるアレンジメント解析の道具

式(5)~(8)の14Typeのアレンジメントが幾何学的にどのような特徴を持つのか調べることは興味深い。それらの解析によって、任意の7直線アレンジメントがどの分解に属するのかを導くアルゴリズムを得ることができる。

ここでは 14Type の幾何学的特徴を解説しながら任意の 7 直線アレンジメント、すなわち任意の元 $X_0 \in P_0(3, 7)$ に対する分類アルゴリズムを示す。

3.1. セル多角形分布カウントアルゴリズム

まず、幾何学的特徴で重要なのがセル多角形分布である。この分布を数式処理システムによってカウントするアルゴリズムを以下に示す。

アルゴリズム CountPolygon

入力 直線数 n $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$
 n 直線係数行列 $X_0 \in P_0(3, n)$

出力 p -多角形個数リスト $\{N_3, N_4, \dots, N_p, \dots, N_n\}$

Step1 [前処理計算]

頂点 p_i ($i = 1 \dots \frac{n(n-1)}{2}$)
 辺および無限遠情報 (b_j, I_j) ($j = 1 \dots n(n-1)$, $I_j = \begin{cases} 1 & \text{有限} \\ -1 & \text{無限遠通過} \end{cases}$)
 辺に接続した頂点 $BtoP_{jk}$ ($k = 1, 2$)
 頂点に接続した 4 辺 (反時計回り) $PtoB_{id}$ ($d = 1, 2, 3, 4$)

Step2 $N_3 = N_4 = \dots = N_n = 0$,
 辺のトレース回数 $T_j = 0$ ($j = 1 \dots n(n-1)$)

Step3 全頂点 p_i ($i = 1 \dots n(n-1)/2$) について Step4~Step6 を繰り返す

Step4 p_i から伸びる 4 辺 $PtoB_{id}$ ($d = 1, 2, 3, 4$) について Step5, 6 を繰り返す。
 終われば Step3 へ。

Step5 辺 $PtoB_{id}$ から時計回りの辺 b_p によって囲まれるセル多角形をトレースし、もし $T_{b_p} = 2$ ならば Step4 へ、そうでなければ $T_{b_p} = T_{b_p} + 1$ とし、始点 p_i に戻るまでの辺数 p をカウントする。

Step6 $N_p = N_p + 1$ 。Step4 へ。

ここで、前処理計算では頂点座標およびその番号付けや辺の無限遠情報、さらにそれらの接続関係のリストを求めておく。 $BtoP_{jk}$ ($k = 1, 2$) は辺 b_j に接続する 2 端点リスト、 $PtoB_{id}$ は点 p_i に接続する 4 辺を反時計回りに並べたリストである (Fig. 2)。例えば、点 p_2 の場合、 $PtoB_{2d} = \{b_1, b_{18}, b_2, b_{17}\}$ となる。Step5 のセル多角形のトレースでは各頂点に接続する 4 辺の方向にそれぞれトレースを開始し、時計回りに辺をたどっていく。このとき無限遠情報が -1 の辺を通過したときは逆回りにトレースするものとする (Fig. 2 の [2])。

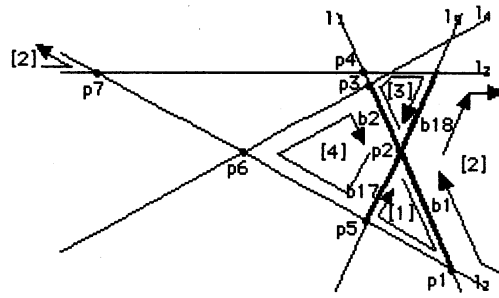


Fig. 2. 前処理計算における番号付けおよび多角形のトレース

3	4	5	6	7	角形	Type
(10 , 6 , 6 , 0 , 0)						A
(7 , 12 , 3 , 0 , 0)						B1,D3
(9 , 8 , 5 , 0 , 0)						B2
(8 , 10 , 4 , 0 , 0)						B3,B4
(11 , 5 , 5 , 1 , 0)						B5
(7 , 14 , 0 , 0 , 1)						C1
(7 , 13 , 1 , 1 , 0)						C2,D2
(9 , 9 , 3 , 1 , 0)						C3
(8 , 11 , 2 , 1 , 0)						C4,D1,D4

Table 2. 9種のセル多角形分布パターン

3.2. 7直線アレンジメントの分類プログラム

3.2.1. セル多角形分布による分類

式(5)~(8)の14Typeに対してアルゴリズム *CountPolygon* を使用してセル多角形分布を調べたところ、Table 2の様に9種のパターンに分かれる。式(2)よりセル多角形の総数は常に22個となっている。しかしTable 2より、9種のうちこの分布だけでは分類できないパターンがまだ4つ残っている。これらの幾何学的違いをさらに調べよう。

3.2.2. セル多角形どうしの接続関係による分類

そのためにセル多角形どうしの接続関係を考える。各辺を挟んで2つのセル多角形（それらを p 多角形および q 多角形とする）が接続している。 p 多角形から q 多角形へ接続している辺の総数を N_{pq} ($p, q = 3, 4, 5, 6, 7$) とする。 5×5 行列 N_{toN} を $N_{toN_{ij}} \equiv N_{i+2, j+2}$ とおくと、Type B1とD3は式(9)の様になり、行列 N_{toN} によって区別できる。

$$N_{toN_{B1}} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 6 & 0 & 0 \\ 15 & 24 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_{toN_{D3}} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 7 & 0 & 0 \\ 14 & 28 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

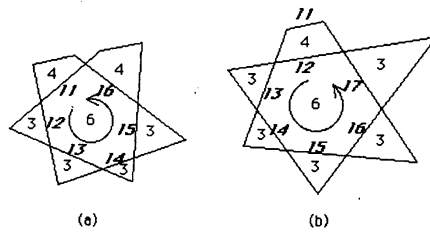


Fig. 3. 6角形を作る直線と接続するセル多角形

同様に Type B3 と B4 も式 (10) より区別できる。

$$NtoN_{B3} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 11 & 0 & 0 \\ 13 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 11 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad NtoN_{B4} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 22 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

この行列 $NtoN$ はセル多角形分布カウントアルゴリズムにおいて、セルにも番号付けを施し、Step5 のトレース時に辺とセルの接続リストを記録しておけば容易に求まる。

3.2.3. 任意5直線に接する円錐曲線との交叉関係

しかし、Type C2 と D2 など残りの2パターンはセルどうしの接続関係も完全に一致し、区別することができない。これらは Wyle 群の考察から任意の5直線に接する円錐曲線との交叉関係によって区別される。

Type C2 および D2 は1つの6角形をもち、円錐曲線との交叉によってのみ区別できる。このため、接続関係から6角形と接続しているセル多角形を反時計回りに角形数4,3,3,3,3,4の順に並べたとき、対応する境界の直線を順に $l_1, l_2, \dots, l_6$ とする (Fig.3-(a))。また、5直線 l_i, l_j, l_k, l_l, l_m に接する円錐曲線を $Q(l_i, l_j, l_k, l_l, l_m)$ で表すとする。これによって Type C2 と D2 は次の交叉条件によって区別できる：

交叉条件	Type C2	Type D2
$Q(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) \cap l_6$	$= \phi$	$\neq \phi$

同様に、Type C4, D1, D4 も1つの6角形をもち、それと接続しているセル多角形を反時計回りに4,3,3,3,3,3の順で並べたとき対応する境界直線を $l_2, l_3, \dots, l_7$ とし、残りを l_1 とする (Fig.3-(b))。これによって Type C4, D1, D4 は次の交叉条件によって区別できる：

交叉条件	Type C4	Type D1	Type D4
$Q(l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) \cap l_7$	$\neq \phi$	$= \phi$	$= \phi$
$Q(l_1, l_3, l_4, l_5, l_6) \cap l_7$	$\neq \phi$	$= \phi$	$\neq \phi$

上記の条件から7直線アレンジメントは完全に Table 1 の14Type に分類できることになる。

4. n 本から $(n+1)$ 本アレンジメントの構成

$(n+1)$ 本アレンジメントを解析するために、様々なサンプルを作って数学的性質を引き出すことはよくある。このサンプル生成に数式処理を応用することを考えよう。

4.1. 貫通直線問題

n 本アレンジメントが得られているものとして、ある直線を一本加えることによって $(n+1)$ 本のアレンジメントを作ることができる。このとき問題となるのが条件 1,2,3 を満たすかどうかである。

今、 n 個の辺の集合を $B_L = \{b_{l_1}, b_{l_2}, \dots, b_{l_n}\}$ とする。全ての辺 b_{l_i} ($i = 1, \dots, n$) の内部と交わる直線を l_L とする。このような l_L を求める問題を貫通直線問題と呼ぶ。条件 1,2 を満たす直線とは、異なる直線に属する n 個の辺を貫通する直線に他ならない。計算幾何学において、この貫通直線を双対変換を使って正確に求める方法が知られている [11]。

しかし、ここでの目的は膨大な B_L の組み合わせに対して貫通直線を調べる必要があるため、正確さより処理速度に重きをおいた次の 2 つの方法を試みた。

4.1.1. 最小 2 乗法による直線

- 1) B_L の代表点として中点 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ (c_i ($i = 1, \dots, n$) は b_{l_i} の中点) を選び、
- 2) C の最小 2 乗法による直線を候補とし、貫通条件を満たすかどうか調べる。

4.1.2. B_S のあらゆる 2 中点を結ぶ直線の探索

あらゆる i, j ($1 \leq i < j \leq n$) に対し、 c_i と c_j を通る直線 $\overline{c_i c_j}$ を候補とし、貫通条件を満たすかどうかを調べる。

4.2. アレンジメント構成アルゴリズムの概要

4.1. の貫通直線を利用して、 n 直線アレンジメントに 1 直線を加えて可能な全ての $(n+1)$ 直線アレンジメントを構成することを考える。そのアルゴリズムの概要を以下に示す。

アルゴリズム LinesGenerator

入力 直線数 n $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$
 n 直線係数行列 $X_0 \in P_o(3, n)$

出力 $(n+1)$ 本アレンジメント $\{l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}\}$

Step1 [前処理計算]

辺および無限遠情報 (b_j, I_j) ($j = 1 \dots n(n-1)$)

Step2 $(n-1)^n$ 通りの n 個の辺の組

$B_L = \{b_{l_1}, b_{l_2}, \dots, b_{l_n}\}$ に対して Step3,4 を繰り返す。

(ここで b_{l_j} ($j = 1, 2, \dots, n$) は直線 l_j に属する辺 $b_{(n-1)(j-1)+1} \dots b_{(n-1)j}$ の一つ)

Step3 B_L の貫通直線の候補 l_{n+1} を求める。

Step4 もし、 l_{n+1} が n 辺の組 B_L の内点と全て交わるならば l_{n+1} を出力。

そうでなければ Step2 へ。

	最小2乗法 (conic)	中点探索 (conic+para+online)	生成合計 (reject)
Type O	25 (5)	22 (3+10+0)	47 (18)
Type I	25 (0)	31 (0+4+0)	56 (4)
Type II	21 (5)	28 (0+4+2)	49 (11)
Type III	34 (0)	19 (0+0+0)	53 (0)

Table 3. 6直線4Typeから7直線アレンジメントの生成結果

Step1は、アルゴリズム CountPolygon と同じである。**Step2**以下では可能な全ての n 個の辺の組み合わせ $((n-1)^n$ 通り)に対して調べている。

しかし、**Step3**の貫通直線を求めるアルゴリズムが4.1.1.,4.1.2.のような近似あるいは試行錯誤的方法では、存在するはずのパターンを見逃す可能性があり、不完全である。

4.3. 6直線4Typeから7直線アレンジメント構成実験

さて、任意の6直線アレンジメントは必ず次の 3×6 行列で代表される4つのTypeに分類される[10]:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \begin{pmatrix} 3 & 8/5 & -7/5 & -3/10 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -3/4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & X_I &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4/9 & 1/5 & 2/3 \\ -1 & 15 & 3/2 & -1/3 & 3/4 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 X_{II} &= \begin{pmatrix} 6/5 & 3 & 0 & 0 & 2 & -4/5 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & X_{III} &= \begin{pmatrix} 7/5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 4/5 \\ 1 & 3/4 & 0 & -1/2 & -2 & 1/10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{11}$$

そこで4.2.のアルゴリズム LinesGenerator によって、式(11)の6直線4Typeから7直線アレンジメントの生成実験を行い、3.2.の分類プログラムによってどのTypeに属するかを判定した。

インプリメントはPowerPC 120MHz上のMathematicaによって行った。調べる組み合わせの数は $6^7 = 279936$ 通りで、4Typeともそれぞれ約60分の計算時間を要した。

生成実験では、まず貫通直線の候補として最小2乗法による直線を作り、貫通条件やアレンジメントの条件1,2,3を満たすかどうかを調べる。条件に合わない場合はさらに中点探索によって候補直線を作り同様のチェックを行う。実験結果をTabel 3に示す。

括弧()の数字は条件1,2,3に合わなかった場合で、onlineは候補直線が辺の端点を通り、paraはある直線と平行、conicは6直線に接する円錐曲線が存在することを表す。

結局、4Type合計で205個のアレンジメントが生成され、いずれも14Typeのどれかに分類されることが確かめられた。

5. まとめ

実射影平面上の n 直線アレンジメントにおいて

- セル多角形分布カウントアルゴリズムを提案した。
- 任意7直線アレンジメントの14Typeへの分類アルゴリズムを示した。

- 分類プログラムを使用し、より見やすい 14Type のサンプルを求めた。
- n 本から $(n+1)$ 本アレンジメント生成アルゴリズムを (1) 最小 2 乗法、(2) 中点結線探索によって検討した。
- $(n+1)$ アレンジメント生成プログラムを使用し、6 直線 4Type のアレンジメントから 7 直線アレンジメントの生成実験を行った。その結果、205 個のアレンジメントを生成し、それら全て 14Type の 1 つに分類された。(ただし、(1),(2) は不完全で、全てのパターンを尽くしてはいない。)

今後の課題としては、完全な $(n+1)$ アレンジメント生成アルゴリズムを検討すること、さらに 8 直線のアレンジメントを解析していきたい。

参 考 文 献

- [1] L. D. Cummings, "Hexagonal Systems of Seven Lines in a Plane", Bulletin of the American Math. Soc. **38**, pp. 105-110 (1932).
- [2] L. D. Cummings, "Heptagonal Systems of Eight Lines in a Plane", Bulletin of the American Math. Soc. **38**, pp. 700-702 (1932).
- [3] H. S. White, "The Plane Figure of Seven Real Lines", Bulletin of the American Math. Soc. **38**, pp. 59-65 (1932).
- [4] 佐々木建昭, 今井浩, 浅野孝夫, 杉原厚吉, "計算代数と計算幾何", 岩波講座応用数学 **5** [方法 9], 岩波書店, (1993).
- [5] N. Bourbaki, "Groupes et Algèbre de Lie", Chap. IV-VI. Hermann, Paris, (1968).
- [6] J. Sekiguchi, "Cross ratio varieties for root systems", Kyushu J. Math. **48**, pp. 123-168 (1994).
- [7] J. Sekiguchi, "Cross ratio varieties for root systems II", Preprint.
- [8] J. Sekiguchi, "Geometry of 7 lines on the real projective plane and the root system of type E_7 ", RIMS Kokyuroku **986**, pp. 1-8.
- [9] J. Sekiguchi and T. Tanabata, "Tetradagrams for the root system of type E_7 and its application", Reports of Faculty of Science, Himeji Inst. Tech. **7**, pp. 1-10 (1996).
- [10] J. Sekiguchi and M. Yoshida, "The $W(E_6)$ -action on the configuration space of six points of the real projective plane", Kyushu J. Math. **51**, pp. 297-354 (1997).
- [11] 今井浩, 今井桂子, "計算幾何学", 情報数学講座 **12**, 共立出版, (1994).