

Keller-Segel 方程式系に対する自己相似解

広島大学大学院理学研究科 村本 直己 (Naomi Muramoto)
神戸大学工学部 内藤 雄基 (Yūki Naito)
広島大学総合科学部 吉田 清 (Kiyoshi Yoshida)

1 Introduction

ここでは $\mathbf{R}^2$ において, 正のパラメータ λ をもつ半線形楕円型方程式

$$(1.1) \quad \Delta\psi + \frac{\varepsilon}{2}x \cdot \nabla\psi + \lambda e^{-\frac{1}{4}|x|^2} e^\psi = 0$$

の遠方で減衰する条件, すなわち

$$(1.2) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$$

を満たす解 $\psi \in C^2$ と λ の関係について考える. ただし ε は正の定数である.

この方程式 (1.1) は走化性による細胞性粘菌の集合体形成の数学モデルである Keller-Segel 方程式系 [9]

$$(KS) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla u - u \nabla v) & \text{in } \mathbf{R}^2, t > 0 \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \alpha u & \text{in } \mathbf{R}^2, t > 0 \end{cases}$$

の自己相似解を考察することによって得られる. ここで (KS) の解 (u, v) が

$$u(x, t) = k^2 u(kx, k^2 t), \quad v(x, t) = v(kx, k^2 t), \quad \forall k > 0$$

をみたすとき, この (u, v) を (KS) の自己相似解であるという. 上の式において $k = 1/\sqrt{t}$ と置くと

$$u(x, t) = \frac{1}{t} u(x/\sqrt{t}, 1), \quad v(x, t) = v(x/\sqrt{t}, 1)$$

となる. 更に $\varphi(\cdot) = u(\cdot, 1)$, $\psi(\cdot) = v(\cdot, 1)$ と置き, $u = \varphi/t$ および $v = \psi$ を (KS) に代入すると (φ, ψ) は

$$(1.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) + \frac{1}{2}x \cdot \nabla \varphi + \varphi = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ \Delta \psi + \frac{\varepsilon}{2}x \cdot \nabla \psi + \alpha \varphi = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

をみたすことが分かる. ただし $x/\sqrt{t}$ を再び x とする. この (1.3) の球対称な解の存在と非存在については永井-水谷 [10] や水谷-村本-吉田 [11] などで述べられている.

ここでは c を正定数とし

$$(1.4) \quad \varphi(x) = ce^{-\frac{1}{4}|x|^2} e^{\psi(x)}$$

とおく. このとき φ は (1.3) の第 1 式をみたし, 第 2 式から $\lambda = \alpha c$ として (1.1) を得る. この (1.4) 式は φ, ψ に対して例えば

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{\frac{|x|^2}{4}} \varphi(x) = c, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$$

というような減衰性を与えたときに得られる恒等式である.

(1.1)-(1.2) の解の存在性について次のような定理を得た.

定理 1.1 $0 < \varepsilon < 2$ とする. このとき, 次の (i),(ii) をみたす $\lambda_* > 0$ が存在する.

- (i) $\lambda > \lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) の解は存在しない
- (ii) $0 < \lambda < \lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) の解は少なくとも 2 つ存在する

特に $0 < \varepsilon < 1$ のとき, (i),(ii) に加えて次も成り立つ.

- (iii) $\lambda = \lambda_*$ ならば (1.1)-(1.2) は唯 1 つ解をもつ.

また次の定理はパラメータ λ とそのときの (1.1)-(1.2) の解 ψ との対 (λ, ψ) の構造に関する結果である.

定理 1.2 定理 1.1 における λ_* に対し, (1.1)-(1.2) の解 ψ_* が存在すると仮定する (定理 1.1 から $0 < \varepsilon < 1$ のとき, この仮定は常に成り立つ). このとき, パラメータと (1.1)-(1.2) の解の組 (λ, ψ) は $(-\delta, \delta)$ ($\delta > 0$ は十分小さい) を定義域とする 2 回連続的微分可能な写像 $s \mapsto (\lambda(s), \psi(s))$ で表され次を満たす.

- (i) $(\lambda(0), \psi(0)) = (\lambda_*, \psi_*)$.
- (ii) $\dot{\lambda}(0) = 0, \ddot{\lambda}(0) < 0$, すなわち, $\lambda(s) < \lambda(0) = \lambda_*$ ($0 < |s| < \delta$).
- (iii) $s < 0$ ならば $\psi(s) = \underline{\psi}_{\lambda(s)}, \psi(s) \neq \psi_*$ を満たす.
- (iv) (λ_*, ψ_*) の近傍で, (1.1)-(1.2) の解の組 (λ, ψ) は分枝 $\{(\lambda(s), \psi(s)) \mid |s| < \delta\}$ のみである.

定理 1.2 の証明は鈴木 [15] (または [5]) で同様な証明が述べられている.

2 重み付きの Sobolev 空間

この節では定理を示すために用いた重み付きの Sobolev 空間について少し詳しく述べる.
 $\alpha \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} L_\alpha^2(\mathbf{R}^2) &= \left\{ u \in L^2(\mathbf{R}^2) \mid \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |u|^2 dx < \infty \right\}, \\ H_\alpha^1(\mathbf{R}^2) &= \left\{ u \in H^1(\mathbf{R}^2) \mid \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} (u^2 + |\nabla u|^2) dx < \infty \right\}, \\ H_\alpha^2(\mathbf{R}^2) &= \left\{ u \in H_\alpha^1(\mathbf{R}^2) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_\alpha^1(\mathbf{R}^2), i = 1, \dots, N \right\} \end{aligned}$$

はそれぞれ次を内積にもつ Hilbert 空間である.

$$\begin{aligned} (u, v)_{L_\alpha^2} &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} uv dx, \\ (u, v)_{H_\alpha^1} &= (u, v)_{L_\alpha^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L_\alpha^2}, \\ (u, v)_{H_\alpha^2} &= (u, v)_{L_\alpha^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L_\alpha^2} + \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{L_\alpha^2}. \end{aligned}$$

関連するノルムを次のように表すことにする.

$$\|u\|_{L_\alpha^2} = \sqrt{(u, u)_{L_\alpha^2}}, \quad \|u\|_{H_\alpha^1} = \sqrt{(u, u)_{H_\alpha^1}}, \quad \|u\|_{H_\alpha^2} = \sqrt{(u, u)_{H_\alpha^2}}.$$

これらの関数空間や次に挙げる性質などは M. Escobedo and O. Kabian[6], S. Kawashima[8] によって扱われている.

補題 2.1 ([6, 8]) (i) すべての $u \in H_\alpha^1(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$8\alpha \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} u^2 dx \leq \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |\nabla u|^2 dx. \quad (\text{Poincaré type inequality})$$

(ii) すべての $u \in H_\alpha^1(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$4\alpha^2 \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |x|^2 u^2 dx \leq \int_{\mathbf{R}^2} e^{2\alpha|x|^2} |\nabla u|^2 dx.$$

また, 埋め込みの compact 性については次が成り立つ.

補題 2.2 ([6, 8]) $\alpha > 0$ とする. このとき次の埋め込みは compact である.

$$H_\alpha^1(\mathbf{R}^2) \subset L_\alpha^2(\mathbf{R}^2).$$

3 定理 1.1 の証明の概略

まず (1.1)-(1.2) の解であるということについて次のことを述べておく.

命題 3.1 $0 < \varepsilon < 2$ とする. このとき, (i)-(iii) は互いに同値である.

(i) $\psi \in H_{\varepsilon/8}^1(\mathbf{R}^2)$ は (1.1) の弱解である.

(ii) $\psi \in H_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2)$ (1.1) の弱解である.

(iii) $\psi \in C^2(\mathbf{R}^2)$ は (1.2) をみたす (1.1) の解である.

そこで以下において, 上の (i)-(iii) (のいずれか) をみたすとき単に (1.1) の解であると呼ぶことにする. また ψ が (1.1) の解であるならば指数関数的な減衰をする. すなわち, 次の不等式が成り立つ.

$$(3.1) \quad 0 < \psi(x) < ce^{-\frac{\kappa_\varepsilon}{4}|x|^2} \quad \text{in } \mathbf{R}^2$$

ただし $\kappa_\varepsilon = \min\{1, \varepsilon\}$.

定義 3.2 各 λ に対して, (1.1) の解集合を

$$\mathcal{S}_\lambda = \left\{ \psi \in H_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2) \mid \psi \text{ は (1.1) の解である} \right\}.$$

とする. また, どんな $\psi \in \mathcal{S}_\lambda$ に対しても $\underline{\psi}_\lambda \leq \psi$ をみたす $\underline{\psi}_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ を最小解と呼ぶことにする.

まず (1.1) の解の存在と非存在について, 次の結論を得る.

定理 3.3 $0 < \varepsilon < 2$ とする. このとき, 次をみたす $\lambda_* > 0$ が存在する.

(i) $\lambda > \lambda_*$ ならば $\mathcal{S}_\lambda = \emptyset$.

(ii) $0 < \lambda < \lambda_*$ ならば $\mathcal{S}_\lambda \neq \emptyset$. さらにどの λ ($0 < \lambda < \lambda_*$) に対しても最小解 $\underline{\psi}_\lambda$ が存在する.

この定理の証明 (特に (ii)) は $F: \mathbf{R} \times H_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow L_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2)$ を

$$F(\lambda, \psi) = -\Delta \psi - \frac{\varepsilon}{2} x \cdot \nabla \psi - \lambda e^{-\frac{|x|^2}{4}} e^\psi.$$

とおくときの $(0, 0)$ における陰関数定理と Supersolution と Subsolution の方法などを用いて示すことができる.

次に定理 1.1 の (ii) を示すために次の $\mu_1(\lambda, \psi)$ を定義する.

定義 3.4 各 $\lambda \in \mathbf{R}$, $\psi \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して $\mu_1(\lambda, \psi)$ を次のように定義する.

$$(3.2) \quad \mu_1(\lambda, \psi) = \inf_{\substack{v \in H_{\varepsilon/8}^1 \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\mathbf{R}^2} (e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} |\nabla v|^2 - \lambda e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^\psi v^2) dx}{\int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} v^2 dx}.$$

この $\mu_1(\lambda, \psi)$ は各 (λ, ψ) に対する固有値問題

$$(3.3) \quad -\operatorname{div}(e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} \nabla v) - \lambda e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^\psi v = \mu e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} v, \quad v \in H_{\varepsilon/8}^1(\mathbf{R}^2)$$

の第1固有値である. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3.5 $\underline{\psi}_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ を最小解とし $\mu_1(\lambda, \underline{\psi}_\lambda) > 0$ とする. このとき, (1.1) は $\underline{\psi}_\lambda < \bar{\psi}_\lambda$ をみたす解 $\bar{\psi}_\lambda$ をもつ.

この定理は

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon-1}{4}|x|^2} e^{\underline{\psi}_\lambda} (e^v - 1 - v) dx \quad \text{for } v \in H_{\varepsilon/8}^1(\mathbf{R}^2).$$

に対して峠の補題を用いることで示される. J の critical point を $\psi_c(x)$ とすると $\bar{\psi}_\lambda = \underline{\psi}_\lambda + \psi_c$ が求める解である. さらに次の命題により定理 1.1 が示される.

命題 3.6 $0 < \lambda < \lambda_*$ とし $\underline{\psi}_\lambda$ を最小解とする. ただし λ_* は定理 3.3 と同様のものとする. このときすべての λ ($0 < \lambda < \lambda_*$) に対して $\mu_1(\lambda, \underline{\psi}_\lambda) > 0$ が成り立つ.

4 定理 1.2 の証明の概略

次の問題を考える.

$$\Phi(s, \sigma, u) := -\Delta(\psi_* + s\phi_1 + u) - \frac{\varepsilon}{2} x \cdot \nabla(\psi_* + s\phi_1 + u) - (\lambda_* + \sigma) e^{-\frac{1}{4}|x|^2} e^{\psi_* + s\phi_1 + u} = 0$$

ただし ϕ_1 は $\mu_1(\lambda_*, \psi_*) (= 0)$ に対する固有関数で $\phi_1 > 0$ かつ $\phi_1 \in H_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2)$ である. 上記の問題は陰関数定理を用いる.

$$\Phi(0, 0, 0) = 0$$

および (σ, u) に関する $(0, 0, 0)$ での Φ の微分

$$\Phi_{(\sigma, u)}(0, 0, 0) : \mathbf{R} \times Y \rightarrow L_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2)$$

は Riesz-Schauder 理論を適用して可逆である事が分かる. ただし

$$Y = \left\{ u \in H_{\varepsilon/8}^2(\mathbf{R}^2) \mid \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{\varepsilon}{4}|x|^2} u \phi_1 dx = 0 \right\}.$$

従って陰関数定理より, 小さな $\delta > 0$ が存在して

$$(\sigma(\cdot), u(\cdot)) \in C^2((-\delta, \delta), \mathbf{R} \times Y)$$

かつ

$$\Phi(s, \sigma(s), u(s)) = 0, \quad \sigma(0) = 0 \quad \text{and} \quad u(0) = 0$$

である.

$$\psi(s) = \psi_* + s\phi_1 + u(s) \quad \text{かつ} \quad \lambda(s) = \lambda_* + \sigma(s).$$

とおく. このとき $(\lambda(s), \psi(s))$ は (i)-(iv) を満たすことが言える.

参考文献

- [1] P. Biler, Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis, *Adv. Math. Sci. Appl.* **8**(1998), 715–743.
- [2] S. Childress, Chemotactic collapse in two dimensions, *Lecture Notes in Biomath.*, **55**, Springer, 1984, 217–237.
- [3] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, *Math. Biosci.* **56**(1981), 217–237.
- [4] R. Courant and D. Hilbert, *Method of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience, 1953.
- [5] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **58** (1975), 207–218.
- [6] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, *Nonlinear Anal.* **11**(1987), 1103–1133.
- [7] D. Gillbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer, 1983.
- [8] S. Kawashima, Self-similar solutions of a convection-diffusion equation, *Lecture Notes in Num. Appl. Anal.*, **12** (1993), 123–136.
- [9] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.* **26** (1970), 399–415.
- [10] Y. Mizutani and T. Nagai, Self-similar radial solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis, *Bull. Kyushu Inst. Tech. (Math. Natur. Sci)*, **42** (1995), 19–28.
- [11] Y. Mizutani, N. Muramoto and K. Yoshida, Self-similar radial solutions to a parabolic system modelling chemotaxis via variational method, *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), 145–160.
- [12] T. Nagai, T. Senba and K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis, *Funkcialaj Ekvacioj* **40** (1997), 411–433.
- [13] T. Ogawa, A proof of Trudinger’s inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.* **14** (1990), 765–769.
- [14] D. H. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1972), 979–1000.
- [15] T. Suzuki. *Semilinear Elliptic Equations*, Gakkōtoshō, 1994.