

カオスとトポロジー

本池 巧, 有光 敏彦*

湘北短期大学 電子情報, 筑波大学物理*

1 はじめに

周期的外力の働く散逸のある力学系では, 系の外力の振幅を増やしていくと周期倍分岐カスケードからカオスへと変化する現象が観測される. このような系では, しばしば異なるタイプのカスケードに属するアトラクタが共存する. 共存するアトラクタのために, 外力の周期や振幅などの制御パラメータに対する系の相図の構造は複雑に入り組んだものとなる. このような複雑な構造を整理し, 共存するアトラクタの振る舞いを系統的に調べるには, 観測されたアトラクタがどのカスケードに属するかを識別する何らかの特徴付けが必要となる.

系の典型的なアトラクタとしては, 安定な周期軌道とストレンジアトラクタの二つがある. 周期軌道の構造は, 制御パラメータに関して連続的に変化するが, その結び目としての性質は, 軌道が分岐しない限り不変である. したがって, 軌道の結び目としてのトポロジーを用いれば周期軌道を適切に分類することが可能となる. ストレンジアトラクタに関しては, その近傍に存在する無数の不安定周期軌道をアトラクタの骨格とみなし, 不安定周期軌道のトポロジカルな性質を使って間接的にストレンジアトラクタを特徴づけることが可能である [1, 2, 3]. つまり, 系の全てのアトラクタは周期軌道 (安定および不安定) によって特徴付けが可能といえ, この解析方法は周期軌道を基底とした系のある種の展開とみなすことができる. したがって, 系の基底をなす周期軌道を系統立てて分類することが我々の解析の重要なポイントとなる. Holmes, Williams は馬蹄形テンプレート上の周期軌道を x と y の記号列によって記述し, 記号力学を使ってそれらの性質を調べた [7, 8]. この論文では, Holmes, Williams のテンプレートモデルを発展させ, どのように周期軌道およびストレンジアトラクタのトポロジカルな性質を解析するかについて述べることにする.

以降では, 周期的外力の働く二次元空間上の非自励系を考えることにする. この系は次のような自励系:

$$\dot{u} = f_1(u, v, \theta, \delta), \quad (1)$$

$$\dot{v} = f_2(u, v, \theta, \delta), \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = 1, \quad (3)$$

に書き換えることが可能である. ただし, $(u, v) \in R^2, \theta \in S^1$, そして δ は外力の振幅である. なお, 外力の周期 T は時間を適当にスケールすることで常に 1 とし, 関数 f_1 と f_2 は次の条件,

1. f_1 と f_2 は θ に関する周期関数,

2. f_1 は v に関して単調関数,

を満たすと仮定する.

正射影 $P : (u, v, \theta) \mapsto (u, \theta)$ によって軌道を $R \times S^1$ に表示し、射影図形の向きを時間 t の方向に定める。一般の力学系では、射影図形には二種類の交差点が存在するが、今は系が条件 2 を満たすため 1 種類の交差しか現れない。このことより、元の軌道と射影図形の間には 1 対 1 の対応があることがわかる。

2 2^n 周期軌道の特徴づけ

周期倍分岐によって発生した周期軌道のトポロジカルな性質が、テンプレートによってどのように特徴づけられるかについて説明する。今は、1 周期軌道から周期倍分岐によって 2^k 周期軌道が現れる場合を取り扱う。一般の n 周期サドル・ノード分岐で発生した軌道から、周期倍分岐によって $n \times 2^k$ 周期軌道が現れる場合は後ほど改めて議論する。

様々な系で観測される 1 周期サドル・ノード分岐から発生した周期倍分岐カスケードの解析結果より、馬蹄形テンプレートは周期倍分岐カスケード中の周期軌道をうまく特徴付けられないことがわかった。しかし、我々は馬蹄形テンプレートの拡張である (ξ, p) -テンプレート (図 1) を導入することで、一般の周期倍分岐カスケードを特徴付けることに成功した¹。 (ξ, p) -テンプレートは二つのパラメータ ξ (偶数) と $p (= \pm 1)$ によって特徴づけられる。 ξ は、テンプレートの帯に含まれる半ひねりの数を、 p はテンプレートの枝分かれの種類を示す。

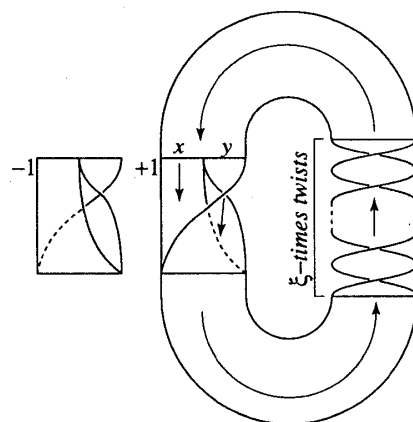


図 1: 拡張された馬蹄形テンプレート

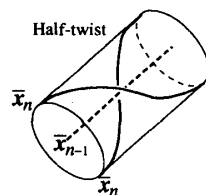
テンプレート上の軌道に対し、左 (右) 側の帯を進む軌道に記号 x (y) を付すことにすると、 n 周期軌道は長さ n の x, y の二文字からなる記号列で特徴づけられる。全ての周期倍分岐カスケード中の周期軌道は系によらず、二文字の記号力学における許容列から得られる普遍的な列:

$$W_1 = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, xy^3(xy)^2(xy^3)^2, \dots\}, \quad (4)$$

によって特徴付けられことがわかっている [9, 10, 11]。

今考えている力学系では、周期軌道の (u, θ) 平面への射影には一種類の交差しか含まれない。そこで、我々は周期倍分岐軌道のトポロジカルな構造を測る量として局所交差数という新しい量を導入した [9]。 2^k 周期軌道 $x_{(k)}$ に対する局所交差数 $C_{(k)}$ とは、 2^{k-1} 周期軌道 $x_{(k-1)}$ のまわりの管状領域に沿った $x_{(k)}$ の半ひねり (図 2) の数である。

¹ 馬蹄形テンプレートは $(0, -1)$ -テンプレートに対応する

図 2: $x_{\langle k-1 \rangle}$ の管状領域での $x_{\langle k \rangle}$ の半ひねり

周期軌道 $x_{\langle k \rangle}$ の $u-\theta$ 平面への射影軌道 $(u_{\langle k \rangle}(t), \theta_{\langle k \rangle}(t))$ とすると, 局所交差数 $C_{\langle k \rangle}$ は,

$$\delta u_{\langle n \rangle}(t) = u_{\langle k \rangle}(t + 2^{k-1}T) - u_{\langle k \rangle}(t), \quad (5)$$

の $0 \leq t < 2^{k-1}T$ における零点の数から求められる. さらに, 軌道 $u_{\langle k \rangle}$ のパワースペクトルの構造を解析することによって取出すこともできる [9].

それでは, テンプレートのパラメータ (ξ, p) を局所交差数を使って求める方法を説明する. (ξ, p) -テンプレート上の 2^k 周期軌道を $\bar{x}_{\langle k \rangle}$ とし, 軌道 $\bar{x}_{\langle k \rangle}$ が x -枝と y -枝を通過する回数をそれぞれ $\chi_{\langle k \rangle}$ および $v_{\langle k \rangle}$ とする. 軌道 $\bar{x}_{\langle k \rangle}$ は分岐すると, ξ 個の半ひねり部および枝分かれ部から, それぞれ $\xi \cdot (\chi_{\langle k \rangle} + v_{\langle k \rangle})$ および $p \cdot v_{\langle k \rangle}$ 個の局所交差を産み出す. よって, 局所交差数は

$$C_{\langle k+1 \rangle} = \xi \chi_{\langle k \rangle} + (\xi + p)v_{\langle k \rangle} \quad (6)$$

で与えられる. 2 周期軌道に対する記号列は xy であることから,

$$\chi_{\langle 1 \rangle} = 1, \quad v_{\langle 1 \rangle} = 1, \quad (7)$$

となり, これを (6) に代入することで

$$C_{\langle 2 \rangle} = 2\xi + p, \quad (8)$$

を得る. ξ は偶数かつ $p = \pm 1$ なので, $C_{\langle 2 \rangle}$ を知れば ξ, p が求まることがわかる. この事実は大変興味深いことで, 実験やシミュレーションで $C_{\langle 2 \rangle}$ を測定すれば (ξ, p) -テンプレートの構造が特定できるのである.

2^k 周期軌道の特徴付ける許容列 $\pi_{\langle k \rangle}$ は漸化式

$$\pi_{\langle k+2 \rangle} = \pi_{\langle k+1 \rangle} \cdot (\pi_{\langle k \rangle})^2, \quad k \geq 0, \quad (9)$$

を満たす [10]. $\chi_{\langle k \rangle}$ および $v_{\langle k \rangle}$ はそれぞれ許容列 $\pi_{\langle k \rangle}$ に含まれる記号 x および y の個数であることから, それぞれ次の漸化式

$$\chi_{\langle k+2 \rangle} = \chi_{\langle k+1 \rangle} + 2\chi_{\langle k \rangle}, \quad (10)$$

$$v_{\langle k+2 \rangle} = v_{\langle k+1 \rangle} + 2v_{\langle k \rangle}, \quad (11)$$

を満たすことがわかる. これより局所交差数が満たすべき漸化式

$$C_{\langle k+2 \rangle} = C_{\langle k+1 \rangle} + 2C_{\langle k \rangle}, \quad k \geq 1 \quad (12)$$

を得る. $c_{\langle k \rangle}$ を 2^k 周期軌道の交差数, $\ell_{\langle k+1, k \rangle}$ を 2^{k+1} 周期軌道と 2^k 周期軌道の絡み数とすると, 次の漸化式

$$c_{\langle k \rangle} = 4c_{\langle k-1 \rangle} + C_{\langle k \rangle}, \quad k \geq 1, \quad (13)$$

$$\ell_{\langle k+1, k \rangle} = 2c_{\langle k \rangle} + C_{\langle k+1 \rangle}, \quad k \geq 0, \quad (14)$$

が成り立つ。これらの漸化式を $C_{\langle k \rangle}$ の漸化式 (12) と合わせて解くと、

$$C_{\langle k \rangle} = \lambda_{k-1} (C_{\langle 2 \rangle} - C_{\langle 1 \rangle}) + \lambda_k C_{\langle 1 \rangle}, \quad k \geq 1, \quad (15)$$

$$\ell_{\langle k+1, k \rangle} = 2 \cdot 4^k c_0 + \eta_k (C_{\langle 2 \rangle} - C_{\langle 1 \rangle}) + \eta_{k+1} C_{\langle 1 \rangle}, \quad (16)$$

$$c_{\langle k \rangle} = 4^k c_0 + \frac{1}{8} (\eta_{k+1} - \lambda_{k+2}) (C_{\langle 2 \rangle} - C_{\langle 1 \rangle}) + \frac{1}{2} (\eta_{k+1} - \lambda_{k+1}) C_{\langle 1 \rangle}, \quad (17)$$

が得られる。ただし、 c_0 はサドルノード軌道の交差数²、

$$\lambda_k = \frac{1}{3} (2^k - (-1)^k), \quad \eta_k = \frac{1}{5} (4^k - (-1)^k) \quad (18)$$

である [9, 10].

3 Characterization of Chaotic orbits

ストレンジアトラクタ近傍には無数の不安定周期軌道が存在する。Mindlin らはこれらの不安定軌道をアトラクタの骨格とみなし、これら全体のトポロジカルな性質を特徴づけるテンプレート構成し、このテンプレートによって間接的にアトラクタを特徴付けることを考え出した [1, 2, 3].

ところで、前節の議論より周期倍分岐カスケード中の全ての周期軌道は (ξ, p) -テンプレートによって特徴づけられることがわかった。一般には、周期倍分岐カスケードによって発生した周期軌道は、カオス領域においても存在し続けると考えられる。周期軌道は分岐点以外ではそのトポロジカルな構造は変化しないため、カオス領域においても、 2^k 周期軌道はそのトポロジカルな構造を保ったまま存在し続けることが予想される。そこで我々は次の仮説をおく：

仮説 ストレンジアトラクタの近傍に存在する全ての不安定周期軌道のトポロジカルな構造は周期倍分岐カスケードによって特定されたテンプレートによって特徴付けられる。

この仮説を確かめるため、損失変調レーザモデルのカオス領域中の各周期軌道間のからみ数 $\ell_{m,n}$ を求めた結果を表 1 に示す。このカオスの前段階の周期倍分岐カスケードについては、すでに $(2, -1)$ -テンプレートによって特徴づけられることがわかっている。そこで、 $(2, -1)$ -テンプレートと記号力学の許容列を使って表 1 の各軌道間のからみ数の値を解析した。その結果、表 1 のからみ数は、表 2 の記号列に対応する $(2, -1)$ -テンプレート上の周期軌道間のそれとまったく一致することがわかった。すなわち、ストレンジアトラクタ中の不安定軌道のトポロジカルな構造は $(2, -1)$ -テンプレートによって特徴付けられたわけである。

さらに我々は、周期軌道を厳密計算可能な区分線形力学系を使って、テンプレートモデルとストレンジアトラクタとの関係を詳しく解析した結果、ストレンジアトラクタのトポロジカルな構造はその前段階の周期倍分岐領域の周期軌道から求まるという仮説は正しいと予想する。

4 可約テンプレートと既約テンプレート

今までは、1 周期サドル・ノード分岐に限定して話を進めてきた。以降では、1 周期サドル・ノードで得られた結果を一般の n 周期にいかにか拡張していくかに付いて議論していく。

$n(> 1)$ 周期サドルノード分岐から始まる周期倍分岐カスケードを特徴づけるテンプレートには、標準テンプレートと原始テンプレートの二つが存在する。標準テンプレートとは、サドル・ノード

² この節では、1 周期サドルノード分岐を考えているので $c_0 = 0$ であるが、 $c_0 \neq 0$ すなわち $n(> 1)$ 周期サドルノード分岐の場合にも (15), (16), (17) は成立する。

表 1: 損失変調レーザモデルでの不安定周期軌道のからみ数 $\ell_{m,n}$

	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	1	1				
3	2	4	3			
4	2	5	8	7		
5	3	6	10	12	12	
6	3	7	13	14	18	17

表 2: 各不安定周期軌道に対する記号列

周期	1	2	3	4	5	6
記号列	y	xy	xyx または xyy	$xyyy$	$xyyyy$ または $xyyxy$	$xyyyyy$ または $xyyyxy$

ド分岐軌道の周期 nT 毎に軌道の特徴づけるテンプレートであり、テンプレートを1周するのに要する時間は、外力の周期 T の n 倍の時間に対応する。原始テンプレートとは、外力の周期で軌道の特徴づけるテンプレートであり、テンプレートの1周は、元の力学系の周期 T に一致する。

まずは標準テンプレートによる特徴づけについて考えてみる。我々は様々な系について調べた結果、1周期サドル・ノードの場合と同様に、 $n \times 2^k$ 周期軌道は (ξ, p) -標準テンプレートと普遍的な記号列 $W_1 = \{y, xy, xyxy, xyxyxyxy, \dots\}$ で特徴づけられることが判明した [9, 10]。以前の 2^k 周期軌道に対する議論はそのまま $n \times 2^k$ 周期軌道に対しても成り立ち、 $n \times 2^k$ 周期軌道に対する局所交差数 $C_{(k)}$ 、交差数 $c_{(k)}$ および $n \times 2^k$ 周期軌道と $n \times 2^{k+1}$ 周期軌道のからみ数 $\ell_{(k+1,k)}$ に対して、同じ結果 (15), (16), (17) 式が得られる。次に、原始テンプレートの場合、 $n \times 2^k$ 周期軌道は、二文字の記号力学における $n \times 2^k$ 周期倍分岐に対する許容列で特徴づけられる。ただし、全ての周期倍分岐カスケードが (ξ, p) -原始テンプレートによって特徴づけられるわけではない。なお、局所交差数、交差数、からみ数に対する結果は、テンプレートの構成方法には依存しないため、標準および原始テンプレートいずれを用いても周期軌道のトポロジカルな構造は同じである。よって、我々は普遍的な記号列によって一貫した取り扱いが可能であることから、特に断らない限り周期倍分岐は標準テンプレートによる特徴づけを採用している。

周期倍分岐カスケードには、標準テンプレートと原始テンプレートの両方で特徴づけられるものとそうでないものがある。まずは、標準テンプレート以外に原始テンプレートでも特徴づけが可能な場合を詳しくみよう。例として、損失変調レーザモデルでの3周期サドル・ノード分岐から始まる周期倍分岐カスケードを取り上げる。この場合、周期倍分岐カスケード中の周期軌道は図3(a)の $(2, -1)$ -標準テンプレートと記号列 $W'_1 = \{X, XY, XYXY, XYXY(XY)^2, \dots\}$ によって特徴づけられるばかりでなく、図3(b)の $(0, 1)$ -原始テンプレートと記号列

$$W_3 = \{xyx, yxyxyx, yxy(xy)^3, yxy(xy)^3(yxyxy)^2, \dots\} \quad (19)$$

によっても特徴づけられる。ただし、外力の周期 T に基づく記号列と nT に基づく記号列を区別

するため、前者は小文字の x, y で後者は大文字の X, Y によって表記することにした。

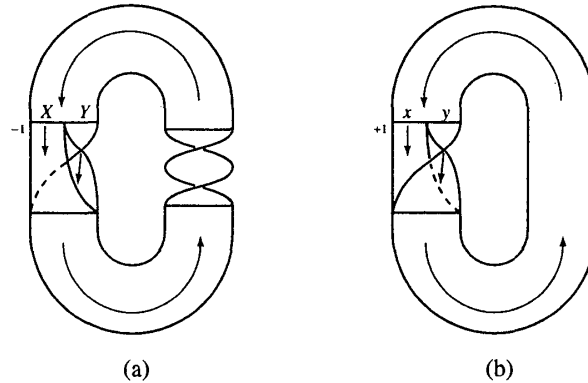


図 3: 標準テンプレートと原始テンプレート

ところで、 W_3 中に現れる記号列を詳しく観察すると、すべてが記号列 yyx または xyx の組合わせとなっていることがわかる。このことは、周期倍分岐カスケード中の周期軌道は3周期軌道 yyx または xyx の近傍に局在していることを意味する。この局在性より周期軌道の構造は、 yyx または xyx のどちらの近傍を通過するかという情報によって決定される。そこで W_3 において yyx , xyx を X, Y に置き換えてみると、 W_3 は W'_1 と同一となる。これより、周期軌道の yyx と xyx の二つの近傍が、 $(2, -1)$ -標準テンプレートと同等な構造によってつながっていることがわかる。実際に、 $(0, 1)$ -原始テンプレートから周期倍分岐軌道が存在する領域（図 4(a) の灰色塗り潰し）のみ切り出したものが図 4(b) である。帯のひねりと分岐を一カ所にまとめたものが、図 4(c) である。図から分かるように、原始テンプレートの中に、 $(2, -1)$ -標準テンプレートが埋め込まれており、埋め込まれた $(2, -1)$ -標準テンプレート部分が yyx と xyx の二つの近傍を結びつけていることがわかる。このように、標準および原始テンプレートの両方で特徴づけが可能な場合、標準テンプレートは原始テンプレートの一部に埋め込みが可能となる。原始テンプレートに埋め込み可能な標準テンプレートを可約テンプレートと呼ぶ [11, 12]。

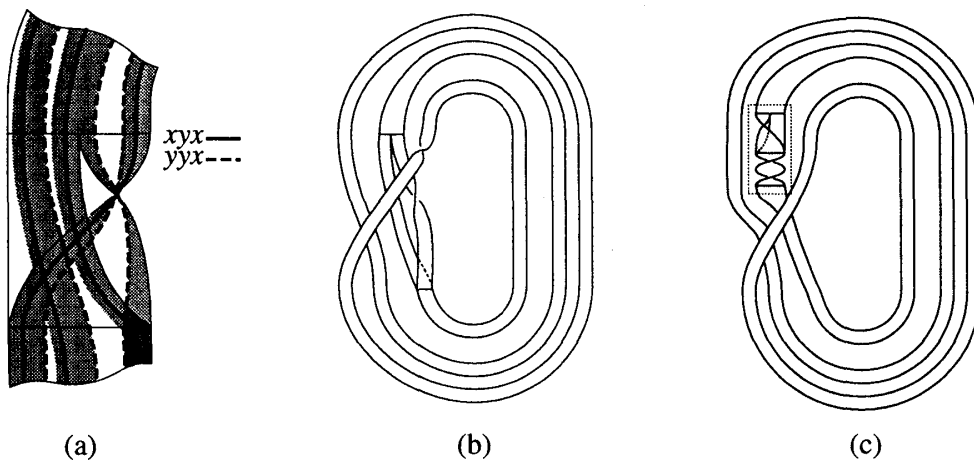


図 4: $(2, -1)$ -標準テンプレートの埋め込み

次に、原始テンプレートで特徴づけられない場合を考えてみる。原始テンプレートが存在しないため、標準テンプレートを他の原始テンプレートの一部に埋め込むことができない。このような標準テンプレートは既約テンプレートと呼ばれる。この理由としては、周期倍分岐を特徴付け

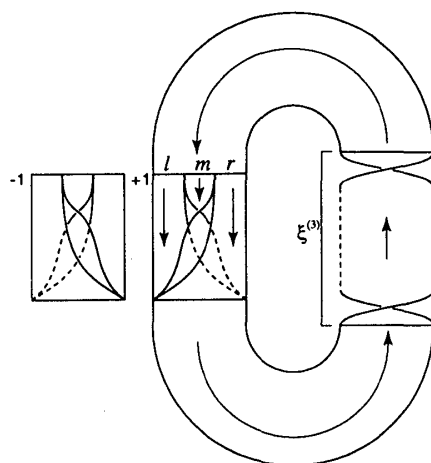


図 5: 3 本枝テンプレート

る記号列が存在しない，サドル・ノード分岐によって発生する周期軌道と同値な軌道を配置可能な (ξ, p) -テンプレートが存在しないなどがある．そのような場合でも，標準テンプレートによる特徴付けは可能である．

5 拡張されたテンプレートによるストレンジアトラクタの特徴付け

標準テンプレートではサドル・ノード分岐で発生した n 周期軌道の周期 nT を 1 周期とみなした．このような周期の短縮が可能なのは，周期倍分岐カスケード中の周期軌道が n 周期軌道近傍に局在しているためである．しかし，ストレンジアトラクタを特徴付ける場合，周期倍分岐軌道以外の様々な周期軌道も対象となるため，このような局在性は成り立たない．したがって，ストレンジアトラクタは本来の外力の周期に基づいた原始テンプレートによって特徴づけられなければならない．

可約標準テンプレートの場合は，それと同等な原始テンプレートを使ってカオス領域を解析すればよい．一方，既約標準テンプレートの場合，原始テンプレートが存在しないため，今までの (ξ, p) -テンプレートによる特徴づけが行えない．ただし，可約な場合と既約な場合の両者のストレンジアトラクタの構造に際立った違いはなく，その構造はテンプレートのような 2 次元多様体に単純化可能と思われる．そこで，原始テンプレートとして， (ξ, p) -テンプレートでなくさらに拡張したものを考えて，既約標準テンプレートを可約化する方法が考えられる．

テンプレートの拡張の一つとして，その枝の数を増やすことを考えてみる．最も簡単な例として，図 5 の 3 本枝テンプレートを取り上げる．一般的な 3 本枝テンプレートは，2 本と同様に，帯の半ひねり数を示す $\xi^{(3)}$ と，二種類の枝部のいずれかを指定するパリティ $p^{(3)} = \pm 1$ によって特徴付けられる³．

三つの枝をそれぞれ l, m, r とラベルすると，このテンプレート上の周期軌道は l, m, r の 3 文字からなる記号列によって特徴づけられる．そこで，写像関数の微係数の正負に応じて定義域が三つに分けられる 3 次写像を考え，その写像が作り出す記号列によって周期軌道の特徴づけることにする．

³ 2 本枝，3 本枝テンプレートともに二つのパラメータで特徴づけられるため， n 本枝テンプレートに関連する量は上付き (n) によって枝の数を明示する．なお，我々の取り扱いでは 2 本枝を標準とするため，今後も 2 本枝の場合は特に必要がない限り省略することとする．

3本枝テンプレートを考える例として、非線形 Mathieu 方程式

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x(1 + \delta \cos \omega t) - x^3 = 0, \quad (20)$$

を選び、その写像関数として、対称性より

$$g(z) = Az^3 + (1 - A)z, \quad (21)$$

を考えることにする。

方程式 (20) では、パラメータ $k = 0.2$, $\omega = 2.0$ に固定し外力の振幅を $\delta = 3.27 \sim 3.35$ と変化させると、2周期サドル・ノード分岐から始まる周期倍分岐カスケードが観測される。カスケード中の各周期軌道の局所交差数、交差数およびからみ数の結果を表3に示す。このカスケードは既約 $(4, -1)^{(2)}$ -テンプレートによって特徴付けられる。

表 3: 非線形マシュー方程式における周期倍分岐カスケード

k	1	2	3	4	5	ξ	p
局所交差数 $C_{\langle k \rangle}$	3	7	13	27	53	4	-1
交差数 $c_{\langle k \rangle}$	7	35	153	639	2609		
からみ数 $\ell_{\langle k+1, k \rangle}$	5	21	83	333	1331		

原始テンプレートとして図5の3本枝テンプレートを選び、それが表3の周期倍分岐カスケードを特徴付けることができるかどうかみてみる。写像 $g(z)$ における2周期サドル・ノード分岐から始まる周期倍分岐カスケード中の周期軌道の列は、

$$V = \{lm, lmlr, lmlrlmlm, lmlrlmlm(lmlr)^2, \dots\} \quad (22)$$

で与えられる。4, 8周期軌道の記号列 $lmlr$, $lmlrlmlm$ と図5のテンプレートを用いると、局

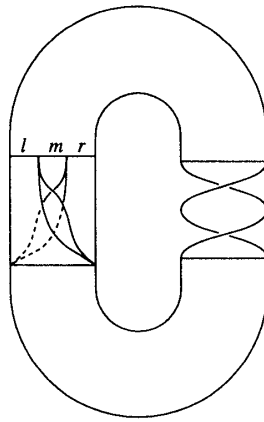


図 6: 非線形 Mathieu 方程式に対するテンプレート

所交差数 $C_{\langle 1 \rangle}$, $C_{\langle 2 \rangle}$ と3本枝テンプレートのパラメータ $(\xi^{(3)}, p^{(3)})$ が満たす関係式

$$\begin{aligned} C_{\langle 1 \rangle} &= 2\xi^{(3)} + p^{(3)}, \\ C_{\langle 2 \rangle} &= 4\xi^{(3)} + p^{(3)}, \end{aligned} \quad (23)$$

を得る. 表3の周期倍分岐カスケードの数値計算結果 $C_{(2)} = 7$ を (23) 式に代入すると, $(\xi^{(3)}, p^{(3)}) = (\xi, \pi)^{(3)} = (2, -1)^{(3)}$ となる. このようにして得られた $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレート (図6) と記号列 V は, 周期軌道は表3の周期倍分岐カスケード全体をうまく特徴付けていることがわかる. 実際に $(4, -1)^{(2)}$ -標準テンプレートが可約化されることをみるには, それが $(2, -1)^{(3)}$ -原始テンプレートに埋め込まれていることを確認しなければならない. 2本枝の場合と同様に考えると, V 中の記号列は lm と lr の組合わせからなっているため, 周期倍分岐軌道は二つの2周期軌道 lm と lr の近傍に局在していることとなる. さらに, $X = lr$, $Y = lm$ とすると, V は $\{Y, YX, YXY, YXY(YX)^2\}$ となるが, 各記号列を1文字右回転させると W'_1 と等しくなる. これは lr と lm の近傍が $(4, -1)$ -テンプレートと同等な構造でつながっていることを意味する. 実際に, $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレートで周期倍分岐軌道が存在する部分のみ切り出したものを図7(a)に示す. 帯のひねりを一カ所にまとめたものが図7(b)である. 図からも $(4, -1)$ -テンプレートが $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレートに埋め込まれていることがわかる. よって, 非線形マシュー方程式の場合, 3本枝テンプレートを考えることで, 既約な2本枝標準テンプレートの可約化に成功したといえる.

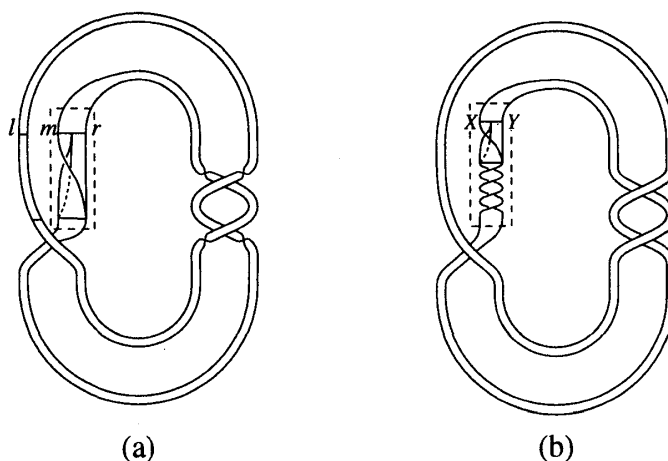


図7: $(4, -1)^{(2)}$ -テンプレートの $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレートへの埋め込み

それでは得られた $(2, -1)^{(3)}$ -原始テンプレートが, カオス領域に現れるあらゆる周期軌道のトポロジカルな構造を説明できるか調べてみる. カオス領域での不安定周期軌道を数値計算によって求めその軌道間のからみ数 $l_{m,n}$ を表4に示す. その結果, 各軌道に対して表5のように写像 $g(z)$ が作り出す記号列を割り当てると, 観測した全ての周期軌道間のからみ数が $(2, -1)^{(3)}$ -原始テンプレートによって説明できることが分かった. したがって, 周期倍分岐カスケードのみならずそれに続くカオス領域も, $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレートによって特徴づけられたことになる.

表4: 非線形 Mathieu 方程式の各不安定周期軌道のからみ数 $l_{m,n}$

	2	4	6	8	10
2	1				
4	5	7			
6	8	16	19		
8	10	21	32	35	
10	13	26	40	52	57

表 5: 非線形マシュー方程式の各不安定周期軌道に対する記号列

周期	2	4	6	8	10
記号列	lm	$lmlr$	$lmlrlr$ または $lmlrlm$	$lmlrlmlm$	$lmlrlmlmlm$ または $lmlrlmlmlr$

6 3本枝テンプレートの検証

最後に、得られた3本枝テンプレートが、実際の流れを正しく特徴づけているかを検証する。ストレンジアトラクタの大域的な構造は、最も短い周期の不安定軌道の不安定多様体によって決定される。1周期軌道 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ の不安定多様体の構造を描くと図8になる。この不安定多様体には $t=0$ から $t=\pi$ 付近での半ひねりと $t=\pi$ 付近から $t=2\pi$ における両端の折り畳みの二つの特徴的な構造がみられる。この構造を模式化したものが図8(a)である。ただし図6との対応を見やすくするために、時間 t の向きを下向きにとった。このテンプレートの両端の折りたたみに沿って切れ目を入れて三つの枝に分割し(図8(b))、3本に分岐する部分を左ネジの向きに半ひねりする(図8(c))。最後に鏡像反転して得られた多様体(図8(d))は、図6のテンプレートと同等なものになる。

このように図6のテンプレートが実際の流れの構造を的確に捉えていることから、非線形 Mathieu 方程式の2周期サドル・ノード分岐からはじまる周期倍分岐およびそれに続くカオス領域は、 $(2, -1)^{(3)}$ -テンプレートによってうまく特徴づけられていることが検証された。

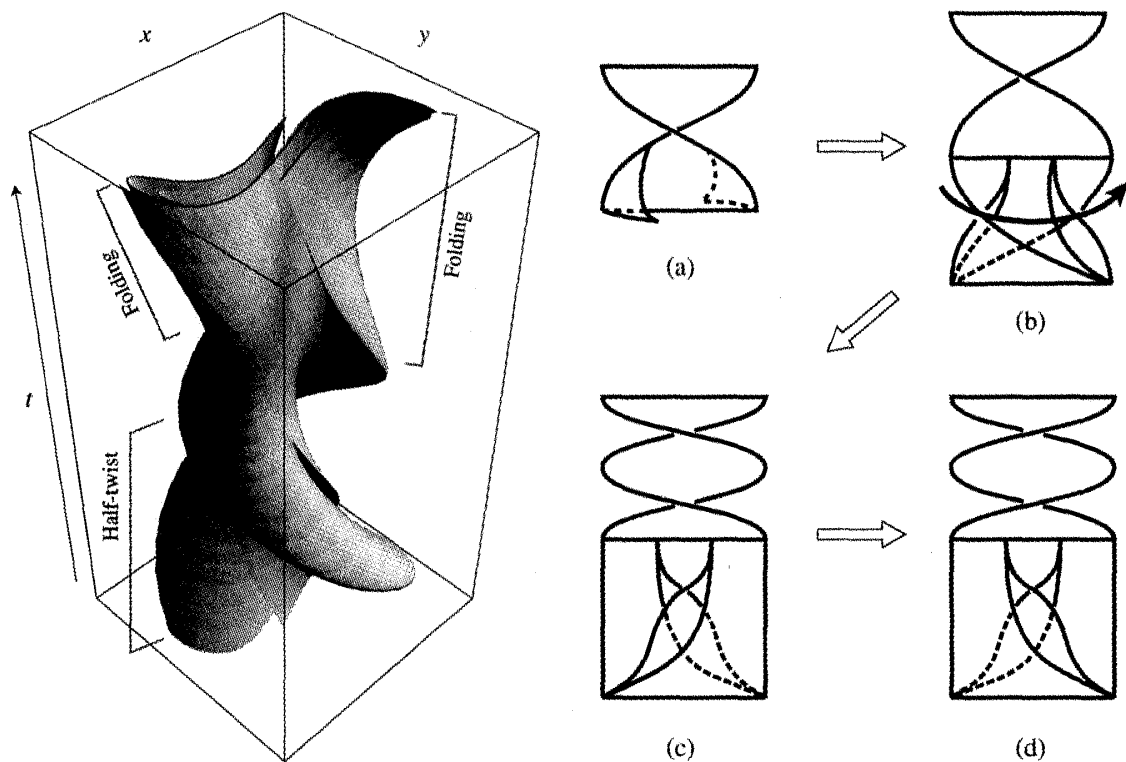


図 8: 1周期軌道の不安定多様体

7 まとめ

周期倍分岐カスケード中の周期軌道は、 $(\xi, p)^{(2)}$ -標準テンプレートと普遍的な記号列 $W = \{y, xy, xy^3, xy^3(xy)^2, xy^3(xy)^2(xy^3), \dots\}$ によって特徴づけられる。したがって、周期倍分岐カスケードはテンプレートの構造パラメータ (ξ, p) によって分類可能となる。ストレンジアトラクタの場合、周期倍分岐とは異なり原始テンプレートによって特徴づけなければならない。一般にストレンジアトラクタ中の周期軌道を求めることは非常に難しい。そこで、カオスの前段階の周期倍分岐領域のテンプレートによってストレンジアトラクタのトポロジカルな構造を同定する方法が考えられる。しかしそのためには、周期倍分岐カスケードが可約テンプレートによって特徴づけられていなければならない。そのため、周期倍分岐が既約テンプレートで特徴づけられる場合、原始テンプレートとして考えていた (ξ, p) -テンプレートの枠組みを拡張し、既約テンプレートを可約にしなければならない。

我々は、枝の数を増やすという拡張によって既約テンプレートの可約化が可能かどうか、非線形マシユー方程式を例に解析を行なった。その結果、原始テンプレートとして3本枝テンプレートを用いることで、既約な2本枝(標準)テンプレートの可約化に成功した。得られた3本枝原始テンプレートは、周期倍分岐カスケードおよびカオス領域ともに、周期軌道のトポロジカルな構造をうまく特徴付けている。しかも、テンプレートのひねり・折り畳みの構造は、系の流れの構造を的確にとらえていることが示された。つまり、非線形マシユー方程式に関しては、アトラクタのトポロジカルな特徴付けは、本来3本枝テンプレートによってなされなければならない。このことから、2本枝テンプレートの枠内で原始テンプレートを作成することが不可能なのは当然といえる。だが、周期倍分岐の場合、周期軌道が局在性のため、本来は3本枝であるが2本枝の標準テンプレートによって特徴付けられるわけである。

以上のことからカオス領域の特徴づけに着手する際には既約テンプレートの可約化が重要な鍵となることが理解できたと思う。可約化に関する研究はまだ端を発したばかりで、今のところその必要性を述べたという段階である。いまだ枝を増やすことで全ての既約テンプレートの可約化が可能かどうかさえ分かっておらず、もしかすると別の拡張が必要な系がある可能性もある。

参考文献

- [1] G.B. Mindlin, X.J. Hou, H.G. Solari, R. Gilmore and N.B. Tufillaro, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2350.
- [2] G.B. Mindlin, H.G. Solari, M.A. Natiello, R. Gilmore and X.J. Hou, J. Nonlinear Sciences **1** (1991) 147.
- [3] G.B. Mindlin and R. Gilmore, Physica D **58** (1992) 229.
- [4] P. Holmes, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A **292** (1979) 419.
- [5] J. Birman and R. Williams, Topology **22** (1983) 47.
- [6] J. Birman and R. Williams, Contemporary Math. **20** (1983) 1.
- [7] P. Holmes and R.F. Williams, Archive Rational Mech. and Analysis **90** (1985) 115.
- [8] P. Holmes, Physica D **21** (1986) 7.

- [9] T. Motoike, T. Arimitsu and H. Konno, Phys. Lett. A **182** (1993) 373.
- [10] T. Arimitsu and T. Motoike, Physica D **84** (1994) 290.
- [11] T. Arimitsu and T. Motoike, Modern Phys. Lett. B **9** (1995) 1123.
- [12] T. Motoike and T. Arimitsu, *Chaos and Topology*(Baifukan 1999), [in Japanese].
- [13] D. P. Lathrop, E. J. Kostelich, Phys. Rev. A **40** (1989) 4028.
- [14] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Phys. Rev. A **37** (1988) 1711.
- [15] K. F. Cao and S. L. Peng, Phys. Rev. E. **60** (1999) 2745.
- [16] J. Milnor and C. Tresser, Commun. Math. Phys. **209** (2000) 123.