

波の共鳴と流れの不安定

京大総合人間学部 酒井敏 (Satoshi Sakai)

京大理学部 小林澄人 (Sumito Kobayashi)

1 はじめに

流れの安定性の問題は古くから研究されてきた問題であり、数学的には固有値問題に帰着する問題であるが、その物理的な意味を考えようとする、途端に困難に直面することになる。

その困難の原因は、解法のプロセスが物理的な因果関係と対応がつかない上、固有関数の性質もパラメータによって変わってしまったたりして、物理的な現象との対応がつかないところにあると考える。

そこで、弦の共鳴問題を参考にして、物理的なイメージを保ちつつ、流れの安定性の問題を扱う方法を考えてみた。

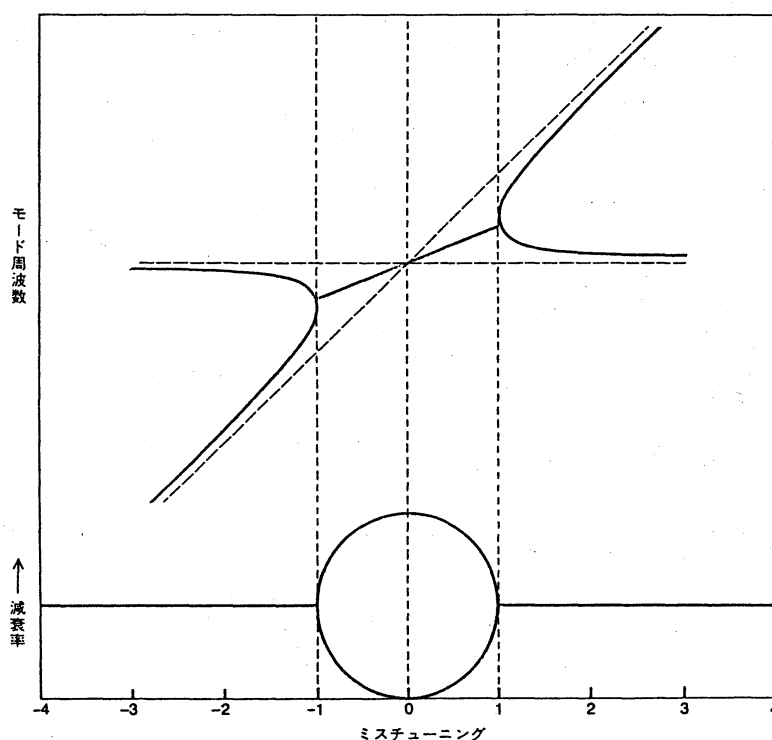


図1: 二本の弦の共鳴関係 (G.Weinreich 日経サイエンス 1979)

2 弦の共鳴

ピアノの弦は1つの音に対して複数の弦が張ってある。それらの弦はお互いに若干異なる張力で張られており、それがピアノ独特の打音と余韻を生み出す仕組みになっている。

異なる張力で張られた複数の弦が振動すれば「うなり」を生じそうな気がするが、これらの弦は同じコマの上に張られており、そのコマの振動を通してお互いに相互作用するために、「うなり」を生じることはない。

今、2本の弦が同じコマの上に張られている状況を考え、

1本の弦の張力を固定して、もう一方の弦の張力を変えることを考える(図2). それぞれの弦が独立に張られていた時の周波数をそれぞれ ω_1, ω_2 とし, 2本が同じコマの上に張られている時の周波数を ω とする. 弦2本の系において ω_1 と ω_2 が十分に離れている時には, それぞれの弦の周波数がほぼそのままその系の固有値 ω となるが, ω_1 と ω_2 が近い時には, 周波数が同じで, 減衰率がことなる二つの固有値が現れる. ピアノの場合には, この早い減衰モードが打音となり, 遅い減衰モードが余韻となる.

これは, X, Y をそれぞれ弦の振幅とした時,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega_1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (1)$$

というように, 右辺の行列の中が対角成分以外のところに相互作用係数 ε が存在するような状態である. この ε を通して X と Y はお互いに外力として他方を励起する関係にあり, ω_1 と ω_2 が近いところでは, お互いに「共鳴」を起こす. この共鳴が減衰率を変化させる要因となっている.

ここで注意すべきことは, 我々は, 弦が1本しかないようなサブシステムの自由振動を良く知っていて, その自由振動を基底として考えると式(1)の様に, 「2本の弦の共鳴」という形で表現できるということである. 最初から, 全体の系の固

有値を求めてしまえば、それぞれの固有関数は直交するから、「共鳴」という概念を持ち込む余地はなくなってしまう。

流れの安定性の問題も、分散関係および発達率のグラフは定性的に図2と同じであることが多いので、この問題と同じような取り扱いが可能であると予想される。その様に扱えば、基本的な波(弦の振動に相当する)の共鳴問題として不安定を考えることができ、物理的な理解がしやすくなる。

問題は、その基底をどのようにとるかということである。線形問題であるから、直交性を要求しなければ基底のとり方には当然任意性がある。この方法の目的は、「物理的な解釈を容易にすること」であるから、その基底は物理的に自然なものであることが望ましい。

以下に、このような方法で流れの安定性を共鳴問題に帰着できる例を示す。

3 順圧不安定

図2のような流速プロファイルを持つ基本場の安定性を考える。支配方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi - U_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

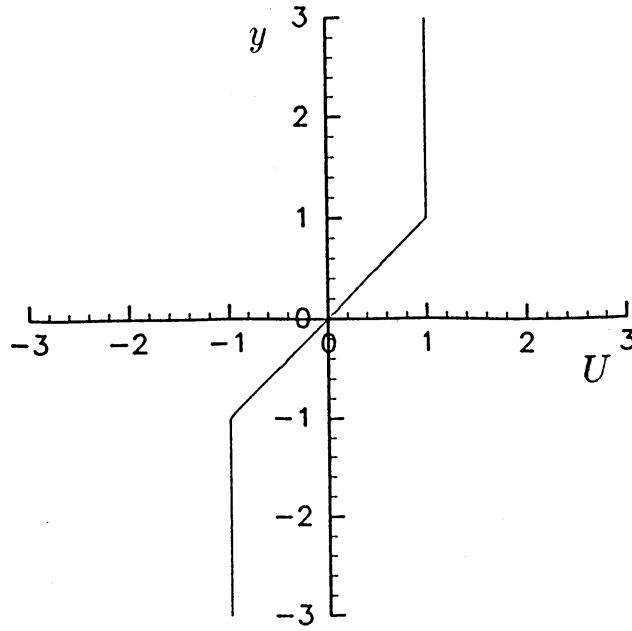


図 2: 順圧不安定の基本場

である．流速プロファイルが2箇所の折れ目を除いて直線的なので流線関数を $\psi \propto \exp(\pm ky)$ とおくと，折れ目以外では式(2)を自動的に満たす．折れ目 ($y = y_c$) においてはマッチング条件

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - U_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{y_c - \epsilon}^{y_c + \epsilon} = 0 \quad (3)$$

を満たさなければならない．

ここで， $y = 1$ の流速分布の折れ目に捕捉された波を

$$\psi^+ = A^+(t) \exp(-k|y - 1|) \exp i(kx) \quad (4)$$

と定義する． $y = 1$ でのマッチング条件を適用すると，この

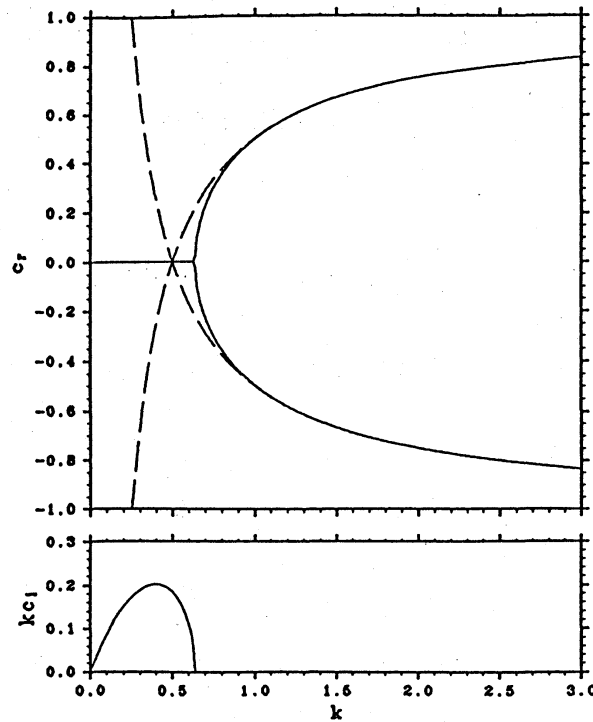


図3: 順圧不安定の分散関係. 破線は折り目に捕捉された波の分散関係
波の振動数は

$$\omega^+ = k - \frac{1}{2} \quad (5)$$

となる.

これは, 流速分布に $y = -1$ での折れ目がなく, 無限遠まで流速にシアがある時の中立波動解で, これだけでは $y = -1$ において式(3)を満たさないことに注意されたい.

同様に, $y = -1$ のところに捕捉された波 ψ^- を定義し, $\psi = \psi^+ + \psi^-$ を式(3)に代入して整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega^+ & 1/2 \\ -1/2 & \omega^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} \quad (6)$$

を得る．これは式(1)と同じ形で，折り目に捕捉された2つの波の共鳴の形になっている．分散関係は図3である．

4 傾圧不安定

図4のような傾圧場における擾乱の支配方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + S^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (7)$$

で与えられる．ここで S は安定度パラメータである．このような場では上下の境界に捕捉された波が存在するが， $\psi \propto \exp(\pm S^{1/2} kz) \exp(ikx)$ とおくと式(7)は境界以外では満たされてしまうので，波の性質を決めるのは，上下の境界条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm 1 \quad (8)$$

である．

上の境界に捕捉された波を

$$\psi^+ = A^+(t) (\exp(\mu(z+1)) + \exp(-\mu(z+1))) \exp(ikx) \quad (9)$$

$$\mu \equiv k\sqrt{S} \quad (10)$$

と定義する．これは，下の境界で密度変化がない $\partial\psi/\partial z = 0$ ような解で，上の境界条件より振動数は

$$\omega_+ = S^{-1/2} \left(\mu - 1 + \frac{2 \exp(-2\mu)}{(\exp(2\mu) - \exp(-2\mu))} \right) \quad (11)$$

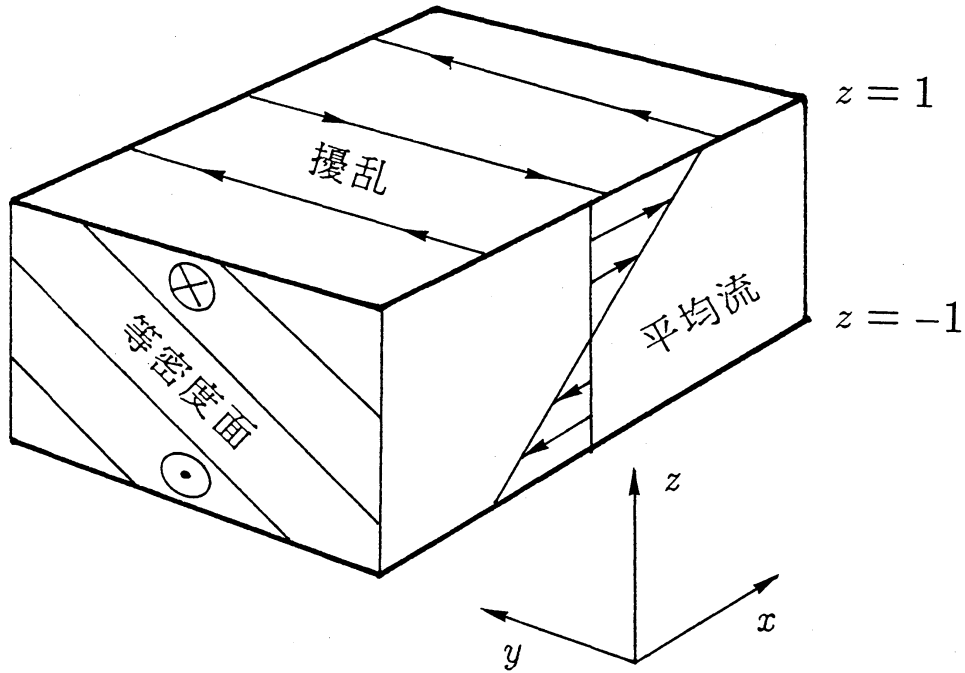


図4: 傾圧不安定の基本場

となる．

下の境界に捕捉された波 ψ^- も同様に定義して， $\psi = \psi^+ + \psi^-$ を式(8)に代入して整理すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega^+ & \varepsilon \\ -\varepsilon & \omega^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\varepsilon \equiv S^{-1/2} \frac{2}{(\exp(2\mu) - \exp(-2\mu))} \quad (13)$$

を得る．この傾圧不安定の分散関係を図5に示す．

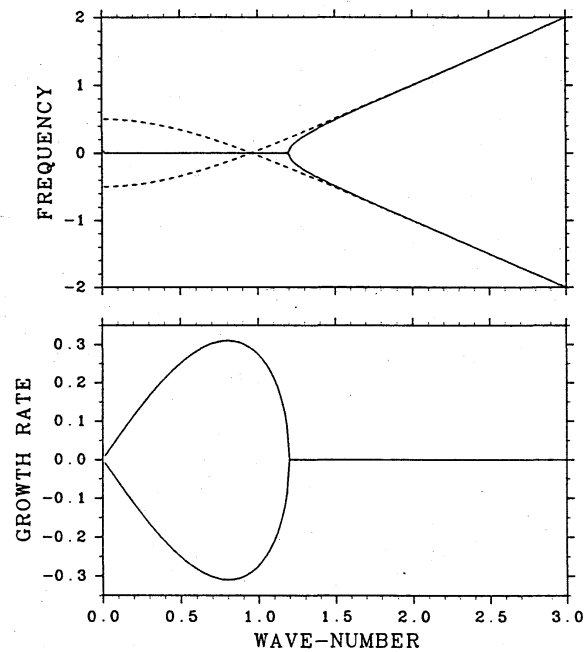


図5: 傾圧不安定の分散関係．破線は境界に捕捉された波の分散関係

5 おわりに

順圧不安定と傾圧不安定の簡単なケースについて，中立な波の共鳴現象としてとらえられることを示した．このような考え方を一般化するためには，連続モードも同様に扱えることを示さなければならないが，それができれば，流れの不安定のメカニズムの物理的解釈が非常に容易になる．