

Explicit formulae of Siegel Eisenstein series

春木 淳 (ATSUSHI HARUKI)

東京工業大学 理工学研究科

1. Introduction

Siegel modular 群に関する Eisenstein 級数については、志村 [Sh] によっていくつかの問題提起がされていた。これに対し、Weissauer は stable modular form の理論を使って、これらの問題に対する解答を与えた。一方、水本 [Mi] によってこの Eisenstein 級数の Fourier 展開の明示公式が与えられた。ここではこれらの問題を、水本による Fourier 展開の表示を使って明示的に証明した。

2. Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開

$m \in \mathbf{Z}_{>0}$ 、 $k \in 2\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$(2.1) \quad E_k^{(m)}(z, s) := \det(y)^s \sum_{\{c, d\}} \det(cz + d)^{-k} |\det(cz + d)|^{-2s}$$

を $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z})$ 上の non-holomorphic Eisenstein 級数という。和は $\begin{pmatrix} * & * \\ c^{(m)} & d^{(m)} \end{pmatrix}$ が $\left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m)} & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z}) \right\} \setminus \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{Z})$ の完全代表系をはしるものとする。

また、 $s \in \mathbf{C}$, z は Siegel 上半空間

$$H_m := \{z = x + yi \in \mathbf{C}^{(m)} \mid {}^t z = z, y > 0\}$$

上の変数とする。よく知られているように、(2.1)の右辺は

$$\{(z, s) \mid z \in H_m; \operatorname{Re}(s) > \frac{m+1-k}{2}\}.$$

において絶対かつ広義一様収束し、Langlands の理論より $E_k^{(m)}(z, s)$ は $s \in \mathbf{C}$ 上の有理型関数として解析接続され、

$$\frac{\Gamma_m(s + \frac{k}{2})}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi(4s - 2j) E_k^{(m)}(z, s - \frac{k}{2})$$

は $s \mapsto \kappa(m) - s$ と置き換えても不変であるという関数等式をみたす。ここで

$$\Gamma_m(s) := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(s - \frac{j}{2}),$$

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$$

とする。 $\zeta(s)$ は Riemann zeta function.

この non-holomorphic Eisenstein 級数の Fourier 級数展開は、水本 [Mi] によって次のように得られている。 Λ_λ を semi-integral な λ 次対称行列の集合とし、 Λ_λ^* をその部分集合で正則な行列の集合とする。 $\mathbf{Z}_{\text{prim}}^{(m, \nu)}$ を $a \in \mathbf{Z}^{(m, \nu)}$ で primitive な行列の集合とする。 ν を c の rank とするとき

$$\begin{aligned} E_k^{(m)}(z, s) &:= \sum_{\nu=0}^m b_{k, \nu, 0}^{(m)}(*, y, s) \\ &+ \sum_{\nu=1}^m \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{h \in \Lambda_\lambda^*} \sum_r b_{k, \nu, \lambda}^{(m)}(h[{}^t r], y, s) e(\sigma(h[{}^t r]x)). \end{aligned}$$

ここで r は、 $\mathbf{Z}_{\text{prim}}^{(m,\lambda)}/\text{GL}_\lambda(\mathbf{Z})$ の完全代表系の上をはしり、 $\sigma(z)$ は正方行列 z の trace とする。この Fourier 係数 $b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s)$ は、 $\lambda = 0$ のとき

$$b_{k,\nu,0}^{(m)}(*, y, s) := (-1)^{\frac{k\nu}{2}} 2^\nu \pi^{\nu\kappa(\nu)} \frac{\Gamma_\nu(2s + k - \kappa(\nu))}{\Gamma_\nu(s)\Gamma_\nu(s + k)} \\ \cdot S_\nu(0_\nu, 2s + k) \det y^s \zeta_\nu^{(m)}(2y, 2s + k - \kappa(\nu)),$$

また $1 \leq \lambda \leq m$ のとき

$$b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s) := (-1)^{\frac{k\nu}{2}} 2^\nu \pi^{\nu\kappa(\nu) + \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{2}} \frac{\Gamma_{\nu-\lambda}(2s + k - \kappa(\nu))}{\Gamma_\nu(s)\Gamma_\nu(s + k)} \\ \cdot S_\nu(\text{diag}(h, 0_{\nu-\lambda}), 2s + k) \det y^s \det(2y[r])^{\kappa(\nu)-k-2s} \\ \cdot \eta_\lambda^*(2y[r], \pi h; s + k + \frac{\lambda-\nu}{2}, s + \frac{\lambda-\nu}{2}) \\ \cdot \zeta_{\nu-\lambda}^{(m-\lambda)}(2g(y, u_r), 2s + k - \kappa(\nu))$$

と表される。さらにこの Fourier 係数は

$$(2.1) \quad \frac{\Gamma_m(s + \frac{k}{2})}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \xi(4s - 2j) b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s - \frac{k}{2})$$

において $(s, \nu) \mapsto (\kappa(m) - s, m + \lambda - \nu)$ と置き換えても 不変という関数等式をみたす。

ここで記号の説明を行う。 $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\kappa(\nu) := \frac{\nu+1}{2}$ とおく。 $h \in \Lambda_\lambda$, $s \in \mathbf{C}$ に対し、

$$S_\nu(h, s) := \sum_{\substack{r \\ \text{mod } 1}} n(r)^{-s} \mathbf{e}(\sigma(hr))$$

を singular series という。ここで $n(r)$ は $r \in \mathbf{Q}^{(\nu)} \cap V_\nu$ の既約な単因子の分母をかけ合わせたもの、 $V_m := \{x \in \mathbf{R}^{(m)} \mid {}^t x = x\}$ とする。

$P_m := \{x \in V_m | x > 0\}$ としたとき、 $g \in P_m, h \in V_m, (\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ に対し

$$\eta_m(g, h; \alpha, \beta) := \int_{\substack{V_m \\ x \pm h > 0}} e^{-\sigma(gx)} \det(x+h)^{\alpha-\kappa(m)} \det(x-h)^{\beta-\kappa(m)} dx$$

は confluent hypergeometric functions と呼ばれ、 $\operatorname{Re}(\alpha) > \kappa(m)-1, \operatorname{Re}(\beta) > m$ において収束する。

$$\eta_\lambda^*(g, h; \alpha, \beta) := \det(g)^{\alpha+\beta-\kappa(\lambda)} \eta_\lambda(g, h; \alpha, \beta)$$

とおくと、Shimura による結果から

$$\begin{aligned} \omega(g, h; \alpha, \beta) &:= 2^{-p\alpha-q\beta} \Gamma_p \left(\beta - \frac{q}{2} \right)^{-1} \Gamma_q \left(\alpha - \frac{p}{2} \right)^{-1} \delta_+(hg)^{\kappa(\lambda)-\alpha-\frac{q}{4}} \\ &\quad \cdot \delta_-(hg)^{\kappa(\lambda)-\beta-\frac{p}{4}} \eta_\lambda^*(g, h; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

は $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ 上の正則関数となる。よって $\eta_\lambda(g, h; \alpha, \beta)$ は $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ 上の有理型関数に解析接続される。

$1 \leq \nu \leq m$ と $g \in P_m$ に対し、

$$\zeta_\nu^{(m)}(g, s) := \sum_{a \in \mathbf{Z}_{\text{prim}}^{(m, \nu)} / \operatorname{GL}_\nu(\mathbf{Z})} \det(g[a])^{-s}$$

は Epstein zeta functions と呼ばれ、 $\operatorname{Re}(s) > m/2$ において収束する。また

$$\varepsilon_\nu(s) := \prod_{j=0}^{\nu-1} \left(s - \frac{j}{2} \right)$$

とおいたときに Maass による結果より

$$\Xi_\nu^{(m)}(g, s) := 2\varepsilon_\nu(s)\varepsilon_\nu\left(\frac{m}{2}-s\right) \prod_{i=0}^{\nu-1} \xi(2s-i)\zeta_\nu^{(m)}(g, s)$$

は $s \in \mathbf{C}$ 上の正則関数となる。よって $\zeta_\nu^{(m)}(g, s)$ は $s \in \mathbf{C}$ 上の有理型関数に解析接続される。

また、 $r \in \mathbf{Z}_{\text{prim}}^{(m, \lambda)}$ に対し、bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{\text{prim}}^{(m, \lambda)} / \text{GL}_\lambda(\mathbf{Z}) & \leftrightarrow & \text{GL}_m(\mathbf{Z}) / \Delta_\lambda^{(m)} \\ r & \longmapsto & u_r \end{array}$$

によって定まる $u_r \in \text{GL}_m(\mathbf{Z})$ が一意的に存在する。このとき、 $y[u_r]$ の Jacobi 分解を

$$(2.2) \quad y[u_r] = \text{diag}(y[r], g(y, u_r)) \begin{bmatrix} 1_\lambda & b \\ 0 & 1_{m-\lambda} \end{bmatrix}$$

として、 $g(y, u_r)$ をこの式により定義する。

3. 結果

Shimura [Sh] による問題提起

(A) $E_k^{(m)}(z, s)$ は $s = 0$ において s に関し holomorphic か？

(A) が成り立つとき $E_k^{(m)}(z) := E_k^{(m)}(z, 0)$ とする。

(B) $E_k^{(m)}(z)$ は holomorphic modular form か？

(C) そのとき $E_k^{(m)}(z)$ の Fourier 係数は有理数か？

に沿って、まず $s = 0$ での $E_k^{(m)}(z, s)$ の正則性を確かめるため、各 Fourier 係数 $b_{k, \nu, \lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s)$ の s の関数としての正則性を調べた。

$h \in \Lambda_\lambda^*$ に対し $d(h)$ を次のように定める。

$$d(h) := (-1)^{[\frac{\lambda}{2}]} 2^{-\delta(\frac{\lambda-1}{2})} \det(2h)$$

ここで、 $[x]$ は x を越えない最大の整数、 $\delta(x)$ は x が整数のとき 1、それ以外るとき 0 とする。

Theorem 1. $b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t^r], y, s)$ は次の場合を除いて $s=0$ で s の関数として正則.

$m \geq 2$ かつ $k = \frac{m+2}{2}$ のとき、

- ・ $(\nu, \lambda) = (m, m-2)$, $k \equiv 2 \pmod{4}$, $h > 0$, $d(h) = \text{integral square}$
- ・ $(\nu, \lambda) = (m-1, m-2)$, $k : \text{even}$, $h > 0$, $d(h) = \text{integral square}$.

この場合、1位のpoleをもつ可能性がある。($m=2$ の場合、 h に関する条件は無視する。)

Proof. Fourier 係数に現れる各関数の $s=0$ での挙動を調べればよい。詳しくは [Ha] Section 2 を参照。($d(h)$ が integral square となっているとき、singular series の中に現れる $\left(\frac{d(h)}{*}\right)$ を指標とする Dirichlet の L -関数が Riemann zeta 関数となるので simple pole が生じ、このような結果となる。)

さらに次の定理が成り立つことが得られた。

Theorem 2. $0 \leq \lambda \leq \nu \leq \mu \leq m$ とする。 $k:\text{even}$ が $2k = \mu + \nu - \lambda + 1$ を満たすとき、

$$(2.3) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_{k,\mu,\lambda}^{(m)}(h[t^r], y, s)}{b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t^r], y, -s)} = (-1)^\alpha \quad \alpha = \begin{cases} \frac{k}{2} & k \leq \frac{m+1}{2} \\ \frac{k}{2} + 1 & k \geq \frac{m+2}{2}. \end{cases}$$

Proof. [Ha] Theorem 3.1 と一部異なる証明を与える。

[Mi] Proposition 6.3 より

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s) \\
 &= (-1)^{\frac{k(\nu-\lambda)}{2}} 2^{(\nu-\lambda)(2s+k-\kappa(\nu-\lambda))} \cdot \frac{\Gamma_{\nu-\lambda}(s + \frac{k}{2})^2}{\Gamma_{\nu-\lambda}(s)\Gamma_{\nu-\lambda}(s+k)} \\
 &\quad \cdot \frac{\xi(2s+k+\lambda-\nu)}{\xi(2s+k)} \prod_{j=1}^{\nu-\lambda} \frac{\xi(4s+2k-\nu-j)}{\xi(4s+2k-2j)} \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\det(y)}{\det(2y[r])} \right)^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \zeta_{\nu-\lambda}^{(m-\lambda)}(2g(y, u_r), 2s+k-\kappa(\nu)) \\
 &\quad \cdot b_{k,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s + \frac{\lambda-\nu}{2})
 \end{aligned}$$

という式が成り立つ。(2.3) の分母を、(2.1) の関数等式で 折り返した後に (2.4) を使うと、

$$b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, -s) = (\text{known part}) \cdot b_{k,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s - k + \frac{\nu+1}{2})$$

となる。また分子は (2.4) のみを使って書き直すと

$$b_{k,\mu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s) = (\text{known part}) \cdot b_{k,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s + \frac{\lambda-\mu}{2})$$

となる。仮定より $2k = \mu + \nu - \lambda + 1$ なので、(2.3) 式の Fourier 係数の比は次のようによく知られた関数の比として表される。

$$\frac{b_{k,\mu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, s)}{b_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, -s)} = D(k, s) \cdot G(k, s) \cdot K(m, k, s),$$

ここで

$$D(k, s) = 2^{(4s+m)(k-\frac{m+1}{2})} \left(\frac{\det y}{\det(2y[r])} \right)^{k-\frac{m+1}{2}},$$

$$G(k, s) = (-1)^{k(k-\frac{m+1}{2})} \frac{\Gamma_{\mu-\lambda}(s+\frac{k}{2})^2}{\Gamma_{\mu-\lambda}(s)\Gamma_{\mu-\lambda}(s+k)} \frac{\Gamma_m(\frac{m+1-k}{2}+s)}{\Gamma_m(\frac{m+1}{2}+s)} \\ \frac{\Gamma_m(k-s)}{\Gamma_m(\frac{k}{2}-s)} \frac{\Gamma_{m-\nu}(\frac{m+1}{2}-k+s)\Gamma_{m-\nu}(\frac{m+1}{2}+s)}{\Gamma_{m-\nu}(\frac{m+1-k}{2}+s)^2},$$

$$K(m, k, s)$$

$$= \frac{\xi(-2s+k)}{\xi(2s+k)} \prod_{i=1}^{\mu-\lambda} \frac{\xi(4s-2k-\mu-i)}{\xi(4s+2k-2i)} \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{\xi(-4s+2k-2j)}{\xi(4s-2k+2m+2-2j)} \\ \prod_{l=1}^{m-\nu} \frac{\xi(4s-2k+2m+2-2l)}{\xi(4s-2k+m+\nu-\lambda+2-l)} \frac{\zeta_{\mu-\lambda}^{(m-\lambda)}(2g(y, u_r), 2s+\frac{\nu-\lambda}{2})}{\zeta_{m-\nu}^{(m-\lambda)}(2g(y, u_r), 2s+\frac{m-\mu}{2})}.$$

Γ -関数の関係式

$$\frac{\Gamma_m(s)}{\Gamma_m(s+t)} = (-1)^{mt} \frac{\Gamma_m(\kappa(m)-t-s)}{\Gamma_m(\kappa(m)-s)}$$

を使って計算すると

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(k, s) = (-1)^{\frac{k}{2}}.$$

また、[Mi] Lemma 6.2 の Epstein zeta 関数の関係式

$$\zeta_{m-\nu}^m(g, s) = (\det g)^{\frac{\nu}{2}-s} \frac{\prod_{j=m-\nu}^{m-1} \xi(2s-j)}{\prod_{j=0}^{\nu-1} \xi(2s-j)} \zeta_{\nu}^m(g, \frac{m}{2}-s)$$

によって $\zeta_{m-\nu}^{(m-\lambda)}(2g(y, u_r), 2s+\frac{m-\mu}{2})$ を書き直すと、[Ha] Proposition 3.4 を使うことができ、

$$\lim_{s \rightarrow 0} K(m, k, s) = \varepsilon_m \det(2g(y, u_r))^{-k+\frac{m+1}{2}}.$$

ここで ε_m は $k \leq \frac{m+1}{2}$ のときは 1、 $k \geq \frac{m+2}{2}$ のときは -1 とする。さらに (4) より

$$\det y = \det(y[r]) \det(g(y, u_r))$$

となることから与式が得られる。 $\square$

Theorem 2 によって Theorem 1 の simple pole が互いに打ち消し合っていることがわかる。さらに $k = \frac{m+2}{2} \equiv 2 \pmod{4}$ の場合を除いて、 h が positive definite になるときのみが 0 にならずに残ってくる。

Theorem 3. $E_k^{(m)}(z, s)$ は $s = 0$ で s の関数として正則。 $E_k^{(m)}(z) := E_k^{(m)}(z, 0)$ とおく。

(1) $2 \leq k \leq \frac{m+1}{2}$ のとき

$k \equiv 2 \pmod{4}$ の場合、 $E_k^{(m)}(z) \equiv 0$ 。

$k \equiv 0 \pmod{4}$ の場合、 $E_k^{(m)}(z)$ は holomorphic modular form で、次のように表される。

$$E_k^{(m)}(z) = 2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{\rho} \sum_{\substack{h \in \Lambda_{\lambda}^* \\ h > 0}} \sum_r a_k(h) e(\sigma(h[t^r]z)).$$

ここで ρ は $k \leq \frac{m-1}{2}$ のとき $2k$, $k \geq \frac{m}{2}$ のとき m で Fourier 係数 $a_k(h)$ は

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{(\lambda+1)(\lambda+3)}{8}} 2^{\frac{(3\lambda+1)}{2}-k} \frac{k! (\det(2h))^{k-\kappa(\lambda)}}{(k - \frac{\lambda+1}{2})! B_k} \prod_{j=1}^{\frac{\lambda-1}{2}} B_{2k-2j}^{-1} P(k, h) \quad (\lambda: \text{odd}) \\ & (-1)^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\lambda} \frac{k!}{(k - \frac{\lambda}{2})!} \left(\frac{\det(2h)}{f} \right)^{k-\kappa(\lambda)} \frac{B_{k-\frac{\lambda}{2}, \chi}}{B_k} \prod_{j=1}^{\frac{\lambda}{2}} B_{2k-2j}^{-1} P(k, h) \quad (\lambda: \text{even}) \end{aligned}$$

と表される。ここで f は二次指標 $\left(\frac{d(h)}{*} \right)$ の導手、 χ は $\text{mod } f$ の原始的指標、 $P(k, h)$ は $d(h)$ の約数のある有理式、 $B_{k, \chi}$ は一般 Bernoulli 数とし、 $\chi = \text{id.}$ のとき B_k とする。

(2) $k = \frac{m+2}{2}, \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \pmod{4}$ の場合、

$$E_k^{(m)}(z) = 1 + \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda^* \\ h > 0}} \sum_r a_k(h) e(\sigma(h[t]r)z)) + (\text{non-hol. part})$$

と表すことができる。 $a_k(h)$ は上と同じもの。

(3) $k = \frac{m+2}{2}, \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 0 \pmod{4}$, または $k \geq \frac{m+4}{2}$ のとき、 $E_k^{(m)}(z)$ は holomorphic modular form で、次のように表される。

$$E_k^{(m)}(z) = 1 + \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\substack{h \in \Lambda_\lambda^* \\ h > 0}} \sum_r a_k(h) e(\sigma(h[t]r)z))$$

と表すことができる。 $a_k(h)$ は上と同じもの。

よって

Corollary. Fourier 係数 $a(h)$ は有理数。

さらに、 $z \in H_m$ に対し $\Delta = \det \left(\frac{1}{2}(1 + \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)$ とおく。 [Sh] における Δ の confluent hypergeometric functions への作用の結果から $k = \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \pmod{4}$ のとき

$$\begin{aligned} & b_{k,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, -1) e(\sigma(h[t]r)x) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(m)} \cdot (4i)^m \Delta \left\{ \log(\det y) b_{k-2,\lambda,\lambda}^{(m)}(h[t]r, y, 0) e(\sigma(h[t]r)x) \right\}. \end{aligned}$$

となることがわかる。これより

Theorem 4. $k = \frac{m+3}{2}$ かつ $k \equiv 2 \pmod{4}$ とする。 Theorem 3 (2) の non-hol. part は

$$\Delta \{ \log(\det y) E_{k-2}^{(m)}(z) \}$$

と表される。

References.

- [Ar] Arakawa T., Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms of degree n with level n . *Tohoku Math.J.*, **42** (1990), 261–286.
- [Bö] Böcherer S., Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen. *Manuscr. Math.*, **45** (1984), 273–288.
- [Ha] Haruki A., Explicit fomulae of Siegel Eisenstein series. *Manuscr. Math.*, **92** (1997), 107–134
- [Mi] Mizumoto S., Eisenstein series for Siegel modular groups. *Math. Ann.* **297** (1993), 581–625.
- [Na] Nagaoka S., A note on the Siegel-Eisenstein series. *Proc. Japan Acad.* **71**, Ser. A (1995), 233–234.
- [Sh] Shimura S., On Eisenstein series. *Duke Math.J.* **50** (1983), 417–476.
- [We] Weissauer R., Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. (*Lect. Notes Math* vol. **1219**). Berlin Heidelberg New York, Springer 1986.