

偶数次元空間における散乱理論

茨城大学 教育 曾我日出夫

序

Ω を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 内の有界な物体とし、 $\Omega = \mathbb{R}^n - \Omega$ は連結な領域になっているとする。さらに境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。次の波動方程式で表される Ω による散乱を考える。

$$(0.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} = f_1(x) & \text{on } \Omega, \\ \partial_t u|_{t=0} = f_2(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

この散乱問題について Lax-Phillips は、空間次元 n が奇数のときは [1] において、偶数のときは [2] において考察している。かれらの定義に従うと scattering operator S は、

$$S = T_0^+ (W_+)^{-1} W_- (T_0^-)^{-1}$$

と表すことができる。ここで、 $T_0^\pm$ は free space $\mathbb{R}^n$ の初期値に関する translation representation であり、 $W^\pm$ は wave operator である。 $T_0^\pm, W^\pm$ については後に詳しく述べる。 S は $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ (S^{n-1} は $(n-1)$ 次元球面) 上の unitary operator となり、次のように kernel 表示できる(詳しくは [3] または [6] を見よ)。

$$(Sk)(s, \theta) = \iint_{\mathbb{R}^1 \times S^{n-1}} S(s-\tilde{s}, \theta, \omega) k(\tilde{s}, \omega) d\tilde{s} d\omega.$$

本稿では、 $n=3$ のとき majda [3] によって得られた $S(s, \theta, \omega)$ (scattering kernel) の表現式が、一般に $n \geq 2$ のときにも拡張できることを、特に n が偶数のときその証明には majda [3] の方法をかなり改良しなくてはならないことを説明したい。次に、Lax-Phillips [1, 2] にある wave operator $W_\pm$ を定義しようとする。 $n=2$ のときには $n \geq 3$ のときに無い困難があることについて述べたい。

§1. Scattering kernel $S(s, \theta, \omega)$ の表現式

Majda [3] は $n=3$ として次のことを示した。 $r(\omega) = \min_{x \in \Omega} x \cdot \omega$ とすると、任意の $\omega \in S^2$ に対して、

$$\text{supp } S(s, -\omega, \omega) \subset (-\infty, -2r(\omega)]$$

が成立し、 $s = -2r(\omega)$ で $S(s, -\omega, \omega)$ は singular (C^∞ でない) になっている。また著者 [5, 6] は、 Ω が convex でなければ $\omega \in$

S^{n-1} を適当にとると $S(\cdot, -\omega, \omega)$ は少なくとも 2 点で singular になり、 Ω が strictly convex ならば任意の $\omega \in S^{n-1}$ に対して $S(\cdot, -\omega, \omega)$ は唯一点で singular であることを示した。これらの証明の出発点になったのは次の $S(s, \theta, \omega)$ の表現式 (1.1) である。

定理 1.1. $V(x, t; \omega)$ を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) V = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ V = -2^{-1}(-2\pi i)^{-n+1} \delta(x \cdot \omega - t) & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^1, \\ V = 0 & \text{for } t < r(\omega). \end{cases}$$

この $V(x, t; \omega) (\in C_{x, \omega}^\infty(\mathcal{S}_t^*))$ を使って $S(s, \theta, \omega)$ は次のように表せる。

$$(1.1) \quad S(s, \theta, \omega) = \int_{\partial\Omega} \{ \partial_t^{n-2} \partial_\nu V(x, x \cdot \theta - s; \omega) - \nu \cdot \theta \partial_t^{n-1} V(x, x \cdot \theta - s; \omega) \} dS_x \quad (\theta \neq \omega).$$

ここで ν は $\partial\Omega$ の単位外法ベクトルである。

$n=3$ のとき、Majda [3] によって上の表現式 (1.1) が証明された。その証明の手順を粗く言うと次の通りである。 $\tilde{t}$ を十分大きいパラメーターとし、 $R_{\tilde{t}}(x, t)$ を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) R_{\tilde{t}} = \delta(x - (\tilde{t} + s)\theta) \delta(t - \tilde{t}) & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1, \\ R_{\tilde{t}} = 0 & \text{for } t > \tilde{t}. \end{cases}$$

$\partial_t u((\tilde{t} + s)\theta, t) = \iint_{\Omega \times [\tilde{t}, +\infty)} (\partial_t^2 - \Delta) R_{\tilde{t}} \partial_t u \, dx \, dt$ となることに注意して Green の公式を使うと混合問題 (0.1) の解 $u(x, t)$ に対して

$$4\pi\tilde{t}\partial_t u((\tilde{t}+s)\theta, t) = 4\pi\tilde{t} \iint_{\partial\Omega \times [T, +\infty)} \{R_{\tilde{t}}\partial_\nu\partial_t u - \partial_\nu R_{\tilde{t}}\partial_t u\} dS_x \\ + 4\pi\tilde{t} \int_{\Omega} \left\{ \partial_t R_{\tilde{t}}\partial_t u - R_{\tilde{t}}\partial_t^2 u \right\} \Big|_{t=T} dx$$

が成立する。下の補題 1.2 を使うと、 $\tilde{t} \rightarrow +\infty$ のとき上の左辺は $(S_k)(s, \theta)$ に収束することが分かる。さらに右辺の第 2 項 $4\pi\tilde{t} \int_{\Omega} \left\{ \partial_t R_{\tilde{t}}\partial_t u - R_{\tilde{t}}\partial_t^2 u \right\} \Big|_{t=T} dx$ は (粗く言えば) $k(s, \theta)$ に収束する。したがって、 $\tilde{t} \rightarrow +\infty$ としたときの右辺の第 1 項の極限を求め、その中にある $\partial_t u(x, t)$ を $k(s, \omega)$ で表せば表現式 (1.1) が得られることになる。

補題 1.2. 初期値が f である free space $\mathbb{R}^n$ の Cauchy 問題の解を $u_0(x, t)$ とする。このとき、 $T_0^+ f$ の $T_0^- f \in \mathcal{S}$ 又は $f(x) \in \mathcal{S}$ ならば

$$T_0^+ f(s, \theta) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{t}^{\frac{n-1}{2}} \partial_t u_0((\tilde{t}+s)\theta, \tilde{t})$$

が成立する。

n が奇数のときは大きな困難なしに上の Majda の手順を踏襲すれば定理 1.1 ^(が証明) ができる。しかし、 n が偶数のときも含めてやろうとすると、彼の方法をかなり改良しなくてはならない。それはまず、補題 1.2 が n が奇数のときは Lax-Phillips によって確かめられているが、 n が偶数のときは証明されていないこと、次に Majda [3] は Huygens の原理 ($\text{supp}[R_{\tilde{t}}] \subset \{(x, t) : |x - (\tilde{t}+s)\theta| = \tilde{t} - t\}$ となること) を証明に使っているが、 n が偶数のときはこのようなことは期待できないことにある。詳しい証明については著者の論文 [6] を見られたい。

Melrose [4] も (1.1) と同等の表現式を得ていることを注意しておきたい。

§2. Wave operator $W_{\pm}$ の定義

この節では、まず Lax-Phillips [1, 2] の translation representation $T_0^{\pm}$ を簡単に紹介し、次に wave operator $W_{\pm}$ の定義とそのとき生じる問題点について述べたい。

free space R^n の初期値 $f = (f_1, f_2)$ の空間として $C_0^{\infty}(R^n)$ を次の energy norm で完備化したもの H_0 を導入する。

$$\|f\|_E^2 = \frac{1}{2} \int (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx.$$

$U_0(x, t)$ を初期値 $f \in H_0$ の解とし、

$$U_0(t)f = (u_0(\cdot, t), \partial_t u_0(\cdot, t))$$

とおくと、 $\{U_0(t)\}_{t \in R}$ は H_0 上の unitary operator の group をなす。

$f \in C_0^{\infty}(R^n)$ の Radon 変換 Rf は次のように定義される。

$$Rf(s, \omega) = -\partial_s \left(\int_{x \cdot \omega = s} f_1(x) dS_x \right) + \int_{x \cdot \omega = s} f_2(x) dS_x \quad ((s, \omega) \in R^1 \times S^{n-1}).$$

変数 s に関する Fourier 変換を F で表す。norm $\|k(s, \omega)\|_s^2 = \iint |\sigma|^{2s} \times |(Fk)(\sigma, \omega)|^2 d\sigma d\omega$ で定義される空間を W_s とすると、 R は H_0 から $W_{\frac{n-1}{2}}$ への unitary operator になる。 n が奇数のとき translation representation

$T_0^+ = T_0^-$ は次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n-1}{2}} R.$$

n が偶数のときは、

$$\lambda_\pm(\sigma) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} (1-i) \sigma^{\frac{1}{2}}, & \sigma \geq 0, \\ \pm 2^{-\frac{1}{2}} (1+i) |\sigma|^{\frac{1}{2}}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

とし次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n}{2}-1} \lambda_\pm(D_s) R$$

ここで、 $\lambda_\pm(D_s) (= F^{-1} [\lambda_\pm(\sigma) F \cdot])$ は $(-\partial_s)^{\frac{1}{2}}$ になっていることに注意しよう。 $T_0^\pm$ は H_0 から $L^2(R^1 \times S^{n-1})$ への unitary operator になり、さらに次の (i), (ii) が成立する。

(i) S に関する translation: $k(s) \rightarrow k(s-t)$ を T_t で表すと、

$$T_0^\pm U_0(t) = T_t T_0^\pm.$$

(ii) $\text{supp} [T_0^\pm f] \subset [\frac{p}{\rho}, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{p}{\rho}]$ ($\rho \geq 0$) である必要十分条件は、任意の $t \geq 0$ に対して $\text{supp} [U_0(t)f(x)] \subset \{(x, t): |x| \geq \rho t + \frac{p}{\rho}\}$ となることである。

混合問題 (0.1) の初期値 f の空間は、 $C_0^\infty(\Omega)$ を energy norm $\|\cdot\|_E$ で完備化したものにとる。それを H で表す。

$$U(t)f = (u(\cdot, t), \partial_t u(\cdot, t))$$

とおくと、 $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ は H 上の unitary operator の group をなす。
 $J: f \rightarrow f|_{\Omega}$ とし、 $\rho(>0)$ を $0 \subset \{x: |x| < \rho\}$ となるようにとっておく。
 このとき、 f がある $\tilde{S}(\in \mathbb{R})$ に対して $\text{supp}[T_0^* U_0(\tilde{S})f] \subset \left[\frac{\rho}{-\infty}, +\infty\right)$
 を充すならば、上の T_0^* の性質 (i), (ii) を考慮すると、

$$(2.1) \quad \pm t \geq \pm \tilde{S} \text{ のとき, } \quad J U_0(t) f \in H$$

が成立する。したがって、

$$W_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} U(-t) J U_0(t) f$$

で定義される wave operator $W_{\pm}$ は、 $E_{\pm} = \bigcup_{\tilde{S} \in \mathbb{R}} \{f: \text{supp}[T_0^* U_0(\tilde{S})f] \subset \left[\frac{\rho}{-\infty}, +\infty\right)\}$ に属する f に対しては well-defined であり、しかも norm を変えない。 $E_{\pm}$ は H_0 内で、 $W_{\pm} E_{\pm}$ は H 内でそれぞれ稠密であることが分かるから (詳しくは Lax-Phillips [1, 2] を見よ)、結局 $W_{\pm}$ は H_0 から H への unitary operator とみなせることになる。

ところがこの議論には一つ問題がある。それは、(2.1) を導く際 T_0^* の性質 (ii) を用いたが、 H_0 の要素の support の意味がはっきりしていないことである。次節ではこのことについて考察したい。

§3. $f \in H_0$ の support

Lax-Phillips [1] にあるように、 $n \geq 3$ のときは評価式

$$(3.1) \quad \|f\|_{L^2(|x| < r)} \leq C_r \|f\|_E, \quad f \in C_0^{\infty}$$

が成立する。ゆえに $n \geq 3$ のときには $H_0 \subset L^2_{loc}$ とみなせる。そこで $f \in H_0$ の support を L^2_{loc} でのものと解釈すれば、(2.1) を厳密に示すことができる。

しかし $n = 2$ のときは (3.1) は成立しない。のみならず、 H_0 は distribution にもならない。そこで $f \in H_0$ の support を次のように定義しよう。 R^n 内の閉集合 K に対して、 $\text{supp } [f^j] \subset K$ かつ $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f^j - f\|_E = 0$ となる $f^j \in C^\infty_0$ が存在するとする。このような K の全体を考え、その共通部分を $\text{supp } [f]$ とする。この定義に従って $T_0^\pm$ の性質 (ii) を証明するには、次の命題が成立することを云えばよい。

命題 3.1. $\text{supp } [T_0^\pm f] \subset \{x: \rho' \leq |x| \leq \rho\}$ ならば、 $0 < \rho' < \rho$ を充す任意の ρ' に対して、 $\text{supp } [f^j(x)] \subset \{x: \rho' \leq |x| \leq \rho\}$ かつ $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f^j - f\|_E = 0$ となるような $f^j(x) \in C^\infty_0(R^n)$ がとれる。

この証明は、 $n = 2$ のときはかなり面倒である。 $n = 2$ のときの証明の概略を述べよう。(詳しくは著者 [6] を見よ。) $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{A}$ ならば

$$(3.2) \quad \begin{cases} f_1(x) = (4\pi)^{-1} \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega, \\ f_2(x) = (4\pi)^{-1} \int \{\lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega \end{cases}$$

が成立する(証明は ^{又は著者 [6]} Lax-Phillips [1] を見よ)。これより直ちに $\text{supp } [T_0^\pm f]$ の情報から $\text{supp } [f]$ の情報が引き出せるように思えるかもしれ

ないが、実際は f の第1成分 f_1 に関してはそれ程簡単ではない。
それは、 $(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}(D_s)^*$ の symbol $(\sigma^{-1} \lambda_{\mp}(\sigma))$ が $-\frac{1}{2}$ 次の有次函数であることに起因している。一般性を失うことなく、命題3.1において $T_0^{\pm} f \in \mathcal{A}$ と仮定してよいことが分かる。さらに、 $T_0^{\pm} f \in \mathcal{A}$ ならば $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{f}^j - f\|_E = 0$ であって次の式を充す $\tilde{f}^j(x) \in C_0^{\infty}$ がとれることが云える。

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}^* T_0^{\pm} f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega - \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}^* T_0^{\pm} \tilde{f}^j\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega \right|_{C^1(|x| \leq \rho)} = 0.$$

ここで、 $\text{supp}[T_0^{\pm} f] \subset \left[\begin{smallmatrix} \rho, +\infty \\ -\infty, -\rho \end{smallmatrix} \right)$ であることに注意すれば、上の第1項の積分は $|x| \leq \rho$ のとき 0 であり、第2項の積分は (3.2) より $\tilde{f}^j(x)$ に等しいことが分かる。したがって、結局 $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{f}^j - f\|_E = 0$ かつ $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{f}^j(x)|_{C^1(|x| \leq \rho)} = 0$ であるような $\tilde{f}^j(x) \in C_0^{\infty}$ がとれることになる。ゆえに、 $|x| \leq \rho'$ のとき $\varphi(x) = 0$ 、 $|x| \geq \rho$ のとき $\varphi(x) = 1$ であるような $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ をとてきて、 $f^j(x) = \varphi(x) \tilde{f}^j(x)$ とおけば命題3.1で要求されるものになっている。

なお、 $W_{\pm}$ が H_0 から H への unitary operator になっているという事実は、定理1.1の証明に使われるということに注意しておきたい。

参考文献

- [1] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory, Academic Press, 1967.
- [2] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions, Indiana Univ. Math. J. 22

(1972), 101-134.

- [3] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies, *Comm. Pure Appl. Math.* 30 (1977), 165-194.
- [4] R. B. Melrose: Forward scattering by a convex obstacle, *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), 461-499.
- [5] H. Soga: Oscillatory integrals with degenerate stationary points and their application to the scattering theory, *Comm. P. D. E.* 6 (1981), 273-287.
- [6] H. Soga: Singularities of the scattering kernel for convex obstacles, to appear.