

カウンタ機械の計算可能性

電気通信大学 金山 裕

はじめに

カウンタを k 個もつ機械を k -CM と表わし [1], 用いて数論的関数を計算する手段として用いることにする. Shepherdson は任意の帰納的関数がある k -CM によって計算できることを示した [4]. したがって, 帰納的関数 f が与えられたとき, $k = k(f)$ が存在して, f は $(k-1)$ -CM では計算できないが, k -CM によって計算できる. この $k(f)$ が如何なるものであるかを, あらゆる f について考察することが本稿の目的である. 従って, ここでは 1 変数関数だけを対象として扱う.

k -CM は $n \times (n+1)$ の行列 $U = [u_{ij}]$ である [2]. ここで u_{ij} は q_i, p_i, z_i ; $i = 1, \dots, k$ から作られる多項式である. このとき各 $i = 1, \dots, n$ について, 部分関数 $\tilde{u}_{(i)}: N^k \rightarrow N^k$ が定義される. この部分関数 $(\tilde{u}_{(1)}, \dots, \tilde{u}_{(n)})$ は方程式系

$$f_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} f_j + u_{i,n+1} \quad : i=1, \dots, n \quad (1)$$

の最小解と仮定している. このとき用いた 1 変数部分関数 (U): $N \rightarrow N$ が「マ」により定義される.

$$(U)(x) = \begin{cases} y & \text{if } (\exists y_1) \dots (\exists y_k) [\tilde{U}_{(1)}(x, 0, \dots, 0) = (y, y_1, \dots, y_k)] \\ \text{undefined} & \text{if } \tilde{U}_{(1)}(x, 0, \dots, 0) = \text{undefined}. \end{cases}$$

「マ」の定理は Turing 機械を模倣することによって, 小林によってはじめとえられた. ここで k -CM を 2-CM によって模倣することによって示す.

定理 1 [小林, 5] すべての 1 変数帰納的関数 f について 3-CM U が存在して $(U) = f$.

証明.

$$U_E = \begin{bmatrix} \mu & \Delta_2 & \mu & \mu & \mu & \mu \\ \mu & \mu & p_1 & \mu & \beta_1 & \mu \\ \mu & \mu & p_2 \Delta_3^2 & \beta_2 & \mu & \mu \\ \mu & \beta_3 & \mu & p_3 \Delta_2 & \mu & \mu \\ \mu & \mu & \mu & \mu & p_2 \Delta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad U_L = \begin{bmatrix} \mu & \beta_1 \Delta_3 & p_1 & \mu & \mu \\ \beta_2 & p_2 \Delta_1 & \mu & \mu & \mu \\ p_1 \Delta_2 & \mu & \mu & \beta_1 & \mu \\ \mu & \mu & \mu & p_3 \Delta_1 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

とおくとき, U_E と U_L は 3-CM で, $\tilde{U}_{E(1)}(x, 0, 0) = (2^x, 0, 0)$ かつ $\tilde{U}_{L(1)}(2^y(2z+1), 0, 0) = (y, z, 0)$ とする.

Shepherson のように, すべての f について U_f が存在して $f = (U_f)$ [4]. $x = (x_1, \dots, x_k) \in N^k$ を gödel number にする.

$$gn(x) = 2^{x_1} 3^{x_2} \dots \pi_k^{x_k} \quad (\pi_k \text{ は } k \text{ 番目の素数, } \pi_1 = 2).$$

と $\exists$ 2, Minsky に $\exists$ 3 と [3], U_f は $\exists$ 1 U_E が存在し
 U_S は 2-CM, $\exists$ 1 U_L の $x \in N^k$ による

$$\tilde{U}_{S(1)}(gn(x), 0) = \begin{cases} (gn(\tilde{U}_{f(1)}(x)), 0) & \text{if } \tilde{U}_{f(1)}(x) \text{ is defined} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と $\exists$ 3, 以上 U_E, U_S, U_L を用いて

$$U = \left[\begin{array}{ccc} U_E & & \\ & U_S & \\ & & U_L \end{array} \right] \begin{matrix} 5 \\ n \\ 4 \end{matrix}$$

$n+10$

のように U を定義すると, U による計算 [2] はつぎのように
 $f(x) = \text{defined}$ のときは,

$$\begin{aligned} \langle 1, (x, 0, 0) \rangle &\xrightarrow{+} \langle 5, (2^x, 0, 0) \rangle = \langle 5, (gn(x, 0, \dots, 0), 0, 0) \rangle \\ &\xrightarrow{+} \langle n+5, (gn(\tilde{U}_{f(1)}(x, 0, \dots, 0)), 0, 0) \rangle \\ &= \langle n+5, (2^{f(x)}(23+1), 0, 0) \rangle \\ &\Rightarrow \langle n+10, (f(x), 3, 0) \rangle \end{aligned}$$

$f(x) = \text{undefined}$ のときは

$$\begin{aligned} \langle 1, (x, 0, 0) \rangle &\xrightarrow{+} \langle 5, (2^x, 0, 0) \rangle = \langle 5, (gn(x, 0, \dots, 0), 0, 0) \rangle \\ &\Rightarrow \dots \quad (\text{停止しない}) \end{aligned}$$

ゆえに $(U)(x) = f(x)$. ☒

よって, あらゆる f が 3-CM によって計算できることが明

らかになつたので, 2-CM または 1-CM での 有限度 の計算が可能となるのが問題になつてくるのである。

1. CM の標準形

2-CM の特性を知るために, 本節ではその標準形を定める. 標準形を定める手続きはすべて *effective* である. 標準形を定めることは, 単純な同値問題を解くことである.

$U = [u_{ij}]$ において, $u_{ii} \neq \mu$ なる u_{ii} を カルーブ という. 任意の U を与へて, $i \neq 1$ のときはカルーブをもつようにすることができ ($i = 1$ については成り立たない).

補題 2. 任意の U について $V = [v_{ij}]$ が存在して,

$$i \neq 1 \rightarrow v_{ii} \neq \mu \wedge \widetilde{U}_{(i)} = \widetilde{V}_{(i)}.$$

証明. $i \neq 1$ かつ $u_{ii} = \mu$ なる i が存在しているとは定する. 方程式系 (1) の右辺で f_i が現われる場所すべてに, (1) の i の行の右辺を代入した方程式系を U' とする. $\widetilde{U}_{(i)} = \widetilde{U}'_{(i)}$ が成り立つ. $u_{ii} = \mu$ であることから, U' には f_i が現われなない. よつて, U' から, i の行と i の列を除いた行列を U'' とすると, $\widetilde{U}_{(i)} = \widetilde{U}''_{(i)}$. この操作を繰り返すと, $i \neq 1 \wedge u_{ii} = \mu$ なる i は存在しなくなる. $\square$

$\forall x \in N^k$ について, $\lambda(x) = x$ とする. また, 任意の部分関数 $f: N^k \rightarrow N^k$ について, $f^0 = \lambda$, $f^{m+1} = f(f^m)$ とする.

基本関数 Δ_g, p_g, γ_g ($g=1, \dots, k$) を重複を許して任意回数掛け
てできる関数 t を項という. $a, c \in \mathbb{N}$; $b=0$ or 1 について

$(a, b, c)_g = p_g^a \gamma_g^b \Delta_g^c$ と定義する. $(a, b, c)_g$ は 1 つの項であ
る. 故に $(a_1, b_1, c_1)_1 \dots (a_k, b_k, c_k)_k$ も 1 つの項であ
る. この形の項を 項の標準形 という. この項を $b_1 \dots b_k$ 項 と
いう. 例えば $p_1^2 \gamma_1 p_2 \Delta_2^3 = (2, 1, 0)_1 (1, 0, 3)_2$ は 10 項である.

補題 3 [項の分解] 任意の a, c, d, g について,

$$(a, 0, c)_g = (a+d, 0, c+d)_g + \sum_{j=0}^{d-1} (a+j, 1, c+j)_g.$$

この補題を用いることによって, 1 つの 01 項を, 世の 01 項
と複数個の 11 項の和に分解することなどが可能になる.

補題 4. すべての項 t について, t と等価な標準形の t' が
1 つとしてただ 1 つ存在するが, それは $t = \mu$ である.

補題 5. 任意の多項式 u について, 項 $t_1, \dots, t_m$ ($m \geq 0$)
が存在して, $u = t_1 + \dots + t_m$. ここで $m=0$ のときは右辺
 $= \mu$ と定義する.

補題 6. t が $b_1 \dots b_k$ 項, t' が $b'_1 \dots b'_k$ 項で $tt' \neq \mu$ ならば,
 $b''_1 \dots b''_k$ 項 t'' が存在して, $tt' = t''$ かつ $b''_g = \max(b_g, b'_g)$
 $: g=1, \dots, k$.

このように, 対象を 2-CM に限ることにする. 01, 10, 00 項を
更に細かく, つぎのように定義する.

- (a) $a_1 > c_1 \wedge a_2 = c_2$ のとき, 項 $(a_1, 0, c_1), (a_2, 1, c_2)_2$ を $01 =$ 項という.
 (b) $a_1 = c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, 項 $(a_1, 1, c_1), (a_2, 0, c_2)_2$ を $10 =$ 項という.
 (c) $a_1 > c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, 項 $(a_1, 0, c_1), (a_2, 0, c_2)_2$ を $00--$ 項という.
 (d) $a_1 > c_1 \wedge a_2 \leq c_2$ のとき, 項 " " を $00-+$ 項という.
 (e) $a_1 \leq c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき, 項 " " を $00+-$ 項という.

更に, $\text{im}(f) = \{f(x) \mid x \in N^2\}$ と定義する.

$00, 01, 10$ 項の有限集合 T が "つぎ" の条件 $I \sim V$ をすべて満たすとき, 標準系 といいられる.

I. すべての $t \in T$ の domain は互に素である.

II. $t \in T$ が 00 項ならば, t は $00--$, $00+-$, $00-+$ 項のいずれかである.

III. $t \in T$ が 01 項ならば, $[t \text{ は } 01 = \text{項} \vee (\exists t') [t' \in T \wedge t' \text{ は } 01 = \text{項} \text{ または } 00-+ \text{項} \wedge \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t')]]$

IV. $t \in T$ が 10 項ならば, $[t \text{ は } 10 = \text{項} \vee (\exists t') [t' \in T \wedge t' \text{ は } 10 = \text{項} \text{ または } 00+- \text{項} \wedge \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t')]]$

V. $[t, t' \in T \wedge t \text{ は } 01 \text{ 項} \wedge t' \text{ は } 10 \text{ 項}] \rightarrow tt' = t't = \mu.$

さらに, $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ のとき, $f * g = \sum_{m=0}^{\infty} f^m g$ と定義する. $*$ は 2 項演算子である.

補題 7. (a) $f * g = f(f * g) + g.$

(b) $(f_1 + f_2) * g = (f_1 * f_2) * (f_1 * g)$

(c) $f_1 f_2 = f_2 f_1 = \mu \rightarrow (f_1 + f_2) * g = f_1 f_1 * g + f_2 f_2 * g + g.$

補題 8. 任意の 2-CM の多項式 f, g について, $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) = \emptyset$ ならば, 00, 01, 10 項の標準形の集合 $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ と多項式 g' が存在して, $f * g = (\sum T)^* g'$. $\Leftarrow$ $\sum T = t_1 + \dots + t_m$ と定義する.

証明. つぎのいくつかのステップにより, T と g' を与えます. (1) f を項の和の形に直し, f の項すべてこの集合 T とおく. 別に $T' = \emptyset$ とおく.

(2) $T = \{(a_1, 0, c_1)_1, (a_2, 0, c_2)_2 \mid a_1 \leq c_1 \wedge a_2 \leq c_2\}$ と改め T とおく.

(3) 次の条件を満たす $t_1, \dots, t_\ell \in T$ ($\ell \geq 2$) と $a_1, c_1, a_2, a'_1, c'_1$ が存在するかどうかを調べる. なければ (4) へ移る.

$$\begin{cases} t_1 = (a_1, 0, c_1)_1, (a_2, 1, c_2)_2 \\ t_1, \dots, t_\ell = (a'_1, 0, c'_1)_1, (a_2, 1, a_2)_2 \end{cases}$$

存在するならば, $a_1 \leq a'_1$ かつ $t_2, \dots, t_\ell$ は 01 項か 00 項である. この中に 00 項は重複して現われる可能性があるが, 同一の 01 項は高々 1 回しか現われない.

$a_1 < a'_1$ のとき, $a_1 + d = a'_1$ とおき, 補題 3 を用いて t_1 を分解する.

$$\begin{aligned} t_1 &= t'_1 + \sum_{j=1}^{d-1} t_{1j}' \\ &= (a'_1, 0, c_1 + d)_1, (a_2, 1, c_2)_2 + \sum_{j=1}^{d-1} (a_1 + j, 1, c_1 + j)_1, (a_2, 1, c_2)_2 \end{aligned}$$

これにより, 端の効果をつくることができ, このとき,

$$\begin{cases} t_1' t_2 \dots t_d = t_1 t_2 \dots t_d = (a_1', 0, c_1'), (a_2, 1, a_2)_2 \\ \text{dom}(t_1' t_2 \dots t_d) = \text{dom}(t_1') \end{cases}$$

と仮定、 $(T - \{t_1\}) \cup \{(a_1', 0, c_1'), (a_2, 1, a_2)_2 \mid a_1' > c_1'\} \cup \{t_{1j}' \mid j=0, \dots, d-1\}$ を改めて T とおく。ここでも (3) の先頭に戻る。

(4) 上の (3) と同様の処理を 10 項について行う。

(5) 01 項であって 01 = 項ではない項 t_1 が T に属しているければ (6) に進む。そのような項を 1 つとり、これを分解して端の効果がないようにしておく。つまり $t_1 = (a_1, 0, c_1), (a_2, 1, c_2)_2$ で a_1 は十分大きいとする。(3) の処理が終わっているで、ループを作ることはない)。このとき、つぎの 2 つのうちの一つしかの条件が成立する。

$$\begin{cases} (a) \exists t_2 \dots t_{d+1} \in T [\text{im}(t_1 \dots t_d) \subseteq \text{dom}(t_{d+1}) \wedge t_{d+1} \text{ は } 01\text{-項} \\ \text{または } 00\text{-項}] \\ (b) \exists t_2 \dots t_d \in T [\text{dom}(t_1) = \text{dom}(t_2 \dots t_d) \wedge \text{im}(t_1 \dots t_d) \cap \text{dom}(T) = \emptyset] \end{cases}$$

(a) のときには $(T - \{t_1\}) \cup \{t_2 \dots t_{d+1}\}$ を再び T とおく。

(b) のときには $(T - \{t_1\})$ を再び T とおき、 $T' \cup \{t_1 \dots t_d\}$ を再び T' とおく。この後 (5) の先頭へ戻る。

(6) 10 項であって 10 = 項ではない項について、(5) と同様の処理を行う。

(7) $t, t' \in T \wedge t \text{ は } 01\text{-項} \wedge t' \text{ は } 10\text{-項} \wedge [t t' \neq \mu \vee t' t \neq \mu]$ なる t, t' が存在しなければ (8) に進む。存在するとき、

$[t = t_0 + \sum_j t_j \wedge t' = t'_0 + \sum_j t'_j \wedge t_0 \text{ は } 0 \text{ 項} \wedge t'_0 \text{ は } 10 \text{ 項} \wedge t_j, t'_j \text{ は } 11 \text{ 項} \wedge t_0 t'_0 = t'_0 t_0 = \mu]$ なる $t'_0, t_0, \{t_j\}, \{t'_j\}$ が存在する. このとき, $(T - \{t, t'\}) \cup \{t_0, t'_0\} \cup \{t_j\} \cup \{t'_j\}$ を再び T とおき, 再び (7) の先頭へ戻る.

(8) $\exists t_1 \dots t_l \in T \exists a_1 \exists a_2 [t_1 t_2 \dots t_l = (a_1, 1, a_1), (a_2, 1, a_2)_2]$ なるものが存在しないとき, (9)へ進む. そうでないとき, $T - \{t_1\}$ を改めて T とおき, 再び (8) の先頭へ戻る.

(9) 11項の $t_i \in T$ が存在しなければ (10)へ進む. 存在するときはつねに l が成立する ($l \geq 0$).

$(\exists t_1) \dots (\exists t_l) [t_1, \dots, t_l \in T \wedge \overbrace{(t_1, \dots, t_l)}^{(\Sigma T) = \mu}]$. このとき $T - \{t_1\}$ を改めて T とおき, $T' \cup \{t_1, \dots, t_l\}$ を改めて T' とおき, (9) の先頭へ戻る.

(10) 得られた T が最終的に求める T である. 更に $g' = g + (\Sigma T')g$ とおく, □

項 t が $00--$, $00-+$, $00+-$, $01=$, $10=$ 項のいずれかであるとき, t は α 標準形 であるという

補題 9. 任意の 2-CM U について, $V = [v_{ij}]$ が存在して, $[i \neq 1 \rightarrow (\exists t) [v_{ii} = t \wedge t \text{ が } \alpha \text{ 標準形}]] \wedge [v_{11} = \mu \vee (\exists t) [v_{11} = t \wedge t \text{ が } \alpha \text{ 標準形}]] \wedge [\tilde{U}_{(1)} = \tilde{V}_{(1)}]$.

証明. 補題 2 と 補題 8 によつて, $U = [u_{ij}]$ が $(i \neq 1 \rightarrow (\exists T) [u_{ii} = \Sigma T \wedge T \text{ は } \alpha \text{ 標準形}]) \wedge (u_{11} = \mu \vee (\exists T) [u_{11} = \Sigma T \wedge T \text{ は } \alpha \text{ 標準形}])$

を諾むと仮定してよい. $u_0 = \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} f_j + \sum_{j=i+1}^n u_{ij} f_j + u_{i,n+1}$ とおく, いま u_{ii} が α 標準形の項にも μ にも等しくないとする. u_{ii} を項の和に分解して, その項の集合を T とおくと, その形によって条件 (I) ~ (IV) のうちいずれかが満たされる.

(I) 00 - 項が T に属するとき,

その項を t とする. 更に,

01 = 項を $t_{01,1}, \dots, t_{01,m}$, その和を v_{01}

10 = 項を $t_{10,1}, \dots, t_{10,l}$, その和を v_{10}

01 = 項以外の 01 項の和を v_{01} ,

10 = 項以外の 10 項 " v_{10} , とそれぞれ表わす.

T は α 標準形をしていさから, 次式が成り立つ.

$$v_{01}(t + w_{01} + w_{10} + v_{10}) = \mu$$

$$v_{10}(t + w_{10} + w_{01} + v_{01}) = \mu$$

$$w_{01}(t + w_{01} + w_{10} + v_{10}) = \mu$$

$$w_{10}(t + w_{10} + w_{01} + v_{01}) = \mu$$

これと補題 7 によって,

$$u_{ii} * u_0 = (t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * u_0$$

$$= ((v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * t) * (v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10}) * u_0$$

$$= 1 * ((v_{01} + w_{01})(v_{01} + w_{01}) * u_0 + (v_{10} + w_{10})(v_{10} + w_{10}) * u_0 + u_0)$$

$$= t * ((v_{01} + w_{01})v_{01} * u_0 + (v_{10} + w_{10})v_{10} * u_0 + u_0)$$

いま

$$w_{01,g} = \sum \{t \mid \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{01,g})\} \quad : g=1, \dots, m$$

$$w_{10,g} = \sum \{t \mid \text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{10,g})\} \quad : g=1, \dots, l$$

と定義すると,

$$u_i^* u_0 = t^* \left[\sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) t_{01,g}^* u_0 + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 + u_0 \right]$$

これに対して, つぎの方程式群をもち, (I) の方程式とあ
きかえる.

$$\begin{cases} f_i = t f_i + \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) f'_{i,g} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} + u_0 \\ f'_{i,g} = t_{01,g} f'_{i,g} + u_0 & : g=1, \dots, m \\ f''_{i,g} = t_{10,g} f''_{i,g} + u_0 & : g=1, \dots, l \end{cases}$$

置き換えてできた新たな方程式群と (I) の最小解は等しい.
ない. 又ここに現われるすべてのホルダー $t, t_{01,g}, t_{10,g}$ は
すべて標準形をしている.

(II) 00-項が T に属するとき.

その項を t とする. $u_0, v_{01}, v_{10}, w_{10}, t_{01,1}, \dots, t_{01,m}, t_{10,1},$
 $\dots, t_{10,l}$ を (I) と同様に定義する. μ は

$$w_{01} = \sum \{t \in T \mid t \text{ は } 01\text{-項でない} \wedge t \text{ は } 01\text{-項である} \wedge (\exists g) [\text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t_{01,g})]\}$$

$$w_{01}' = \sum \{t \in T \mid t \text{ は } " \wedge " \wedge (\exists g) [\text{im}(t) \subseteq \text{dom}(t)]\}$$

このとき (I) と同様に

$$w_{01}' (v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}') = \mu$$

が成り立つ。故に,

$$\begin{aligned}
 u_{i0}^* u_0 &= (t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}')^* u_0 \\
 &= ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* w_{01}')^* ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* u_0) \\
 &= \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) t_{01,g}^* u_0 + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 \\
 &\quad + (w_{01}' + t) t^* \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}^* u_0 + u_0
 \end{aligned}$$

このことから, 次の (1) の方程式の代りに, 方程式群

$$\begin{cases}
 f_i = \sum_{g=1}^m (t_{01,g} + w_{01,g}) f'_{i,g} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} + (w_{01}' + t) f_{i0} + u_0 \\
 f'_{i,g} = t_{01,g} f'_{i,g} + u_0 & : g = 1, \dots, m \\
 f''_{i,g} = t_{10,g} f''_{i,g} + u_0 & : g = 1, \dots, l \\
 f_{i0} = t f_{i0} + \sum_{g=1}^l (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g}
 \end{cases}$$

でおきかえる。ここに現われる小ループはそれぞれ 1 個の項から成り, α 標準形をしている。このうち第 1 式は小ループをもたないから, この右辺を他の式 f_i に代入することによって f_i を消去する。この消去操作によって, 他の式の小ループが変化を受けることはない。

(I), (II) 以外の場合, すなわち (III) 00 項を含む場合と (IV) 00 項を全く含まない場合は, 上と同様にして変形できる。



00 項 $t = (a_1, 0, c_1), (a_2, 0, c_2)$ は β の形のいずれかをしているとき, β 標準形 をしている, といわれる。

$$(a) \quad a_1, a_2 > 0, \quad c_1 = c_2 = 0. \quad \text{即ち } t = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$$

$$(b) \quad a_1 > 0, \quad c_1 = a_2 = 0 \quad \text{即ち } t = p_1^{a_1} p_2^{c_2}$$

$$(c) \quad a_2 > 0, \quad a_1 = c_2 = 0 \quad \text{即ち } t = p_2^{a_2} p_1^{c_1}$$

補題 10. 任意の 2-CM U について, $V = [v_{ij}]$ が存在して, $[i \neq 1 \rightarrow (\exists t)[v_{ii} = t \wedge t = \beta \text{ 標準形}]] \wedge [v_{11} = \mu V$
 $(\exists t)[v_{11} = t \wedge t = \beta \text{ 標準形}]] \wedge [\widetilde{U}_{(1)} = \widetilde{V}_{(1)}].$

証明. U は補題 9 の条件を満たすと仮定する. このとき, 各 α 標準形を持つ小ループ $u_{ii} = (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)_2$ の形による場合が分けられる. u_0 を補題 9 の証明におけると同様に定義する.

(a.1) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき.

$$\begin{aligned} u_{ii} * u_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (p_1^{a_1} p_2^{c_1})^k (p_2^{a_2} p_1^{c_2})^k u_0 \\ &= u_0 + \sum p_1^{a_1} (p_1^{c_1} p_1^{a_1})^k p_2^{a_2} (p_2^{c_2} p_2^{a_2})^k p_1^{c_1} p_2^{c_2} u_0 \\ &= u_0 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} (p_1^{a_1-c_1} p_2^{a_2-c_2}) * p_1^{c_1} p_2^{c_2} u_0. \end{aligned}$$

これの方程式系 (1) の形式は

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1-c_1} p_2^{a_2-c_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

2 おき換えても, 方程式の最小解は変わらない. ここで u_{00} は $\sum \{(a_1'-c_1, b_1', c_1'), (a_2'-c_2, b_2', c_2')_2 f_j \mid (a_1', b_1', c_1'), (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \leq u_0 \wedge c_1 \leq a_1' \wedge c_2 \leq a_2'\}$ に等しい. この際, 必要ならば項を分解する. f_i は小ループを含まないから f_i を消去する. こうしても

他の式の小ループの値を変更することはない(他の場合についてはその結果の4を示す).

(a.2) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 \leq c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} p_2^{c_2 - a_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

でおきかえる. u_{00} は (a.1) に示したものと同一.

(a.3) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 \leq c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき,

(a.2) と対称的に示せる.

(b) $b_1 = 0 \wedge b_2 = 1 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 = c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} z_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

でおきかえる. ここで u_{00} は

$$\sum \left\{ (a_1' - c_1, b_1', c_1'), (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \mid (a_1', b_1', c_1'), (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \leq u_0 \right. \\ \left. \wedge c_1 \leq a_1' \right\}$$

に等しい.

(c) $b_1 = 1 \wedge b_2 = 0 \wedge a_1 = c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき.

(b) の場合と同様に示せる. □

以上により, 遂に 2-CM の標準形が得られた.

2. 2-CM と 1-CM の計算可能性

7.5 の定理によつて, 2-CM の計算の特性づけを行ふ.

定理 11. 任意の 2-CM U に対し 2 , $N_1 \subseteq N$ が存在して,
 $\overline{N_1} = \mathcal{K}_0 \wedge [(x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = \text{undefined}) \vee (\exists f)(f \text{ は 1 次関数} \wedge (x \in N_1 \rightarrow$
 $(U)(x) = f(x)))]$

略証. U を標準形とし, CM の各状態を遷移する計算において,
 1 ルーパを回る回数だけが異なるものを同一視する. $\boxtimes$

定理 12. 任意の 1-CM U に対し 2 , $N_1 \subseteq N$ が存在して,
 $[(x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = \text{undefined}) \vee (\exists a)[x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = x+a] \vee (\exists a)[x \in N_1 \rightarrow (U)(x) =$
 $x-a] \vee (\exists a)[x \in N_1 \rightarrow (U)(x) = a]]$.

以上の 2 つの定理によつて, 1-CM, 2-CM, 3-CM に属する計算可能な関数の族が真に異なることが示された.

謝辞. 東工大小林孝次郎助教授は定理 1 だけでなく, 2-CM の標準形を定める方針を筆者に示さん, さんが本研究を推進する大きな力となつたことをここに記して, 感謝する.

文献

1. Fisher, P.C. et al., Counter machines and counter languages, Math. System Theory, 2, pp265-283.
2. Kanayama, Y., Algebraic properties of programs, 日米コンピュータ会議.
3. Minsky, M.L., Computation, Prentice-Hall, 1967.
4. Shepherdson, J.C., et al. Computability of Rec. func., J.ACM, 10, pp217-255, 1963.
5. 小林孝次郎, 私信.