

## Interpolational path and quasi-supremum

大阪教育大学 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)  
Osaka Kyoiku University

この内容は、同講究録収容の別論文 “Bounds for interpolation path of positive operators” の副産物であり、証明はそちらにお任せして、ここでは大筋について述べることにする。今回の元になる概念も次の公理系を満たす作用素平均  $A \# B$  である [5]:

**monotonicity:**  $A_1 \leq A_2, B_1 \leq B_2 \implies A_1 \# B_1 \leq A_2 \# B_2$ .

**semi-continuity:**  $A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \implies A_n \# B_n \downarrow A \# B$ .

**transformer inequality:**  $T^*(A \# B)T \leq (T^*AT) \# (T^*BT)$ .

**transformer equality** holds if  $T$  is invertible

**normalization:**  $A \# A = A$ .

このとき、representing function  $f_m(x) = 1 \# x$  は、 $(0, \infty)$  上の作用素単調関数

$$0 \leq A \leq B \implies f_m(A) \leq f_m(B).$$

であり、同時に作用素凹関数

$$f_m(tA + sB) \geq tf_m(A) + sf_m(B) \quad \text{for } t, s > 0, t + s = 1.$$

にもなっている。さらに

$$\exists A^{-1} \text{ のとき} \quad A \# B = A^{1/2} f_m(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$$

という形で、関数から作用素平均を再構成できる。ここでは基本的に、Hilbert 空間上の可逆な正作用素を扱うが、実際には作用素平均から少し外れた部分が問題となる。

以前に、Uhlmann [7] のエントロピー構成法に関連して、作用素平均の path

$$A \#_{r,t} B = A^{1/2} (1 - t + t(A^{-1/2} B A^{-1/2})^r)^{1/r} A^{1/2}$$

$(-1 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$  が、interpolational:

$$(A \mathfrak{m}_{r,p} B) \mathfrak{m}_{r,t} (A \mathfrak{m}_{r,q} B) = A \mathfrak{m}_{r,(1-t)p+ tq} B,$$

for  $0 \leq p, q \leq 1$  であることから、微分可能性（両端の微分係数は相対作用素エントロピーである）やその他の性質が出ることを指摘した [2] (cf. [1, 4]). 特に、transposition formula

$$B \mathfrak{m}_{r,t} A = A \mathfrak{m}_{r,1-t} B.$$

が成り立つことに注意しよう。これは、 $-1$  で調和平均、 $0$  で幾何平均、 $1$  で算術平均となる作用素平均としても重要な path であった。

ここでは、 $r$  の制限をはずして考えてみる。時に  $r = \pm\infty$  の場合は、正作用素のある種の sup, inf をあらわしている。極限の存在を確認しておく必要があるが、これを、quasi-supremum, quasi-infimum と呼ぶ。もちろん、束としては不十分だが、どの程度のことが成り立つかにも興味があった。

さて、(可逆) 正作用素  $A, B$  について、(可逆) 正作用素の path を

$$A \mathfrak{m}_{r,t} B = A^{1/2} (1 - t + t(A^{-1/2} B A^{-1/2})^r)^{1/r} A^{1/2}$$

$(0 \leq t \leq 1)$  とする。作用素平均同様、 $\mathfrak{m}_{r,t}$  の representing function  $F_{r,t}$  を

$$F_{r,t}(x) = 1 \mathfrak{m}_{r,t} x = (1 - t + t x^r)^{1/r}$$

とすると、:

**Lemma 1.** *Every function  $F_{r,t}(x)$  is strictly increasing and strictly convex (resp., concave) for  $r > 1$  (resp.,  $r < 1$ ).*

で、もちろん従来の  $r$  以外に作用素平均はない。

**Theorem 2.** *The inequality  $|r| \leq 1$  is the equivalent condition that  $\mathfrak{m}_{r,t}$  is operator mean, or equivalently  $F_{r,t}$  is operator monotone.*

しかし、

**Lemma 3.**  *$F_{r,0}(x) = 1$  and  $F_{r,1}(x) = x$  for all  $r$ . If  $0 < t < 1$ , then*

*$F_{r,t}(x) \uparrow 1 \vee x \equiv \max\{1, x\}$  as  $r \uparrow \infty$  and  $F_{r,t}(x) \downarrow 1 \wedge x \equiv \min\{1, x\}$  as  $r \downarrow -\infty$ .*

となっているので、quasi-sup, inf が定義できる:

$$A \bigvee B = A \mathfrak{m}_{\infty,t} B \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} A \mathfrak{m}_{r,t} B = A^{1/2} (1 \vee A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2} \quad \text{and}$$

$$A \bigwedge B = A \mathfrak{m}_{-\infty,t} B \equiv \lim_{r \rightarrow -\infty} A \mathfrak{m}_{r,t} B = A^{1/2} (1 \wedge A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$$

$(t \neq 0, 1)$ .  $t$  の条件は、 $A \mathfrak{m}_{r,0} B = A$  と  $A \mathfrak{m}_{r,1} B = B$  からきている。すぐわかる性質としては、

**Lemma 4.**  $A \hat{\wedge} B \leq A, B \leq A \vee\vee B$  and  $A \vee\vee B + A \hat{\wedge} B = A + B$ . If  $A \leq B$  then  $A \vee\vee B = B \vee\vee A = B$  and  $A \hat{\wedge} B = B \hat{\wedge} A = A$ .

まとめると、

**Theorem 5.** The path  $A \mathfrak{m}_{r,t} B$  is nondecreasing and norm-continuous for  $r$ : For  $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$  and  $0 < t < 1$ ,

$$A \hat{\wedge} B = A \mathfrak{m}_{-\infty,t} B \leq \cdots \leq A \mathfrak{m}_{r,t} B = \lim_{p \rightarrow r} A \mathfrak{m}_{p,t} B \leq A \mathfrak{m}_{s,t} B \leq \cdots \leq A \mathfrak{m}_{\infty,t} B = A \vee\vee B.$$

If  $A \leq B$ , then  $A \leq \cdots \leq A \mathfrak{m}_{r,t} B \leq A \mathfrak{m}_{s,t} B \leq \cdots \leq B$  for  $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$  and  $0 \leq t \leq 1$ .

さらに、意外なことに、transformer inequality は成り立たないが、equality は成立する。これは、古田先生が良く使われる Lemma と同じ手法を使えばよい (e.g.[3]):

**Theorem 6.** The transformer equality holds for  $\mathfrak{m}_{r,t}$  for  $-\infty \leq r \leq \infty$ .

途中の段階では可換な演算ではない ( $A \mathfrak{m}_{r,t} B \neq B \mathfrak{m}_{r,t} A$ ) が、極限は可換である:

**Theorem 7.**  $A \vee\vee B = B \vee\vee A$  and  $A \hat{\wedge} B = B \hat{\wedge} A$ .

transformer equality より、transposition formula も成り立ち、 $\mathfrak{m}_{r,t}$  が interpolational path であることがわかる:

**Theorem 8.** A path  $A \mathfrak{m}_{r,t} B$  is interpolational in the sense that

$$(A \mathfrak{m}_{r,p} B) \mathfrak{m}_{r,t} (A \mathfrak{m}_{r,q} B) = A \mathfrak{m}_{r,(1-t)p+ tq} B$$

for  $-\infty \leq r \leq \infty$  and  $0 \leq p, q, t \leq 1$ . In particular, the transposition formula holds:  $B \mathfrak{m}_{r,t} A = A \mathfrak{m}_{r,1-t} B$ .

さて、微分してみれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{r,t}}{\partial t}(x) &= \frac{x^r - 1}{r} (1 - t + tx^r)^{(1-r)/r} \\ \frac{\partial^2 F_{r,t}}{(\partial t)^2}(x) &= \frac{(x^r - 1)^2 (1 - r)}{r^2} (1 - t + tx^r)^{(1-2r)/r} \end{aligned}$$

がわかるので、

**Lemma 9.** For a fixed  $r$ ,  $F_{r,t}$  is a convex (resp., concave) differentiable path for  $t$  if  $r > 1$  (resp.,  $r < 1$ ).

さて、solidarity を

$$A \mathfrak{s}_r B = \frac{\partial A \mathfrak{m}_{r,t} B}{\partial t} \Big|_{t=0} = A^{1/2} \frac{(A^{-1/2} B A^{-1/2})^r - 1}{r} A^{1/2} = \frac{A \mathfrak{m}_{0,r} B - A}{r},$$

とおけば、エントロピー的な関係式が出る:

**Theorem 10.** *The derivative operator has an informational property:  $A \mathfrak{s}_r(A \mathfrak{m}_{r,t} B) = t(A \mathfrak{s}_r B)$  for  $r \in \mathbb{R}$  and  $t \in [0, 1]$*

最後に、quasi-sup、inf の演算で、lattice にどれだけ近づけるかを述べておく。  
lattice の公理系を思い出しておこう:

**idempotent:**  $x \cap x = x, \quad x \cup x = x.$

**commutative:**  $x \cup y = y \cup x, \quad x \cap y = y \cap x.$

**absorptive:**  $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z = x.$

**associative:**  $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \quad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z.$

quasi-sup、inf に近い形で、lattice になるものに、Olson の lattice がある [6]:

$$A \curlyvee B \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} (A^r + B^r)^{1/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{A^r + B^r}{2} \right)^{1/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} ((1-t)A^r + tB^r)^{1/r}$$

lattice と両立する順序は、spectral order である。これに対し、

**Theorem 11.**  $A \leq B \iff A \curlyvee B = B \iff A \curlywedge B = A$

というように、通常の順序が対応している。また、

**absorption law :**  $A \curlyvee (B \curlywedge A) = A \curlywedge (B \curlyvee A) = A.$

も成立する。なぜなら、

$$A \curlyvee (B \curlywedge A) = A^{1/2} (1 \vee (A^{-1/2} B A^{-1/2} \wedge 1)) A^{1/2} = A^{1/2} 1 A^{1/2} = A$$

$$A \curlywedge (B \curlyvee A) = A^{1/2} (1 \wedge (A^{-1/2} B A^{-1/2} \vee 1)) A^{1/2} = A^{1/2} 1 A^{1/2} = A.$$

となるからである。しかし、associative law は成立しない:

例. Putting

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \geq B,$$

we have  $1 \vee C = C$  and

$$A \vee 1 = B + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

By

$$\begin{aligned} C^{-1/2} A C^{-1/2} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ C^{-1/2} (A \vee 1) C^{-1/2} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

we have

$$\|C^{-1/2} A C^{-1/2}\| = \frac{15 + \sqrt{145}}{16} < \frac{35 + \sqrt{585}}{32} = \|C^{-1/2} (A \vee 1) C^{-1/2}\|.$$

Then  $1 \vee C^{-1/2} A C^{-1/2} \neq 1 \vee C^{-1/2} (A \vee 1) C^{-1/2}$  and hence

$$A \vee (B \vee C) = A \vee C \neq (A \vee 1) \vee C = (A \vee B) \vee C.$$

その他、 $f(x) = 1 \vee x$  が作用素単調でないことから生じることとして、全く  $\sup$ ,  $\inf$  らしくない性質がある：

|                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\min\{\ A^{-1}\ ^{-1}, \ B^{-1}\ ^{-1}\} \leq A \wedge B \leq A \vee B \leq \max\{\ A\ , \ B\ \} \text{ は成立しない。}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

実際、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおくと、positive contraction になり、

$$A^{-1/2} B A^{-1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

のように射影のスカラー倍になって、

$$1 \vee A^{-1/2} B A^{-1/2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

より、

$$A \vee B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となって、 $1$  とは順序関係がつかない。 $B$  は可逆ではないが、連続性より、可逆正作用素でも同じことが起こる。

$$D(A, B) \equiv A \vee B - A \wedge B = A^{1/2} |A^{-1/2} B A^{-1/2} - 1| A^{1/2}$$

は、作用素距離関数的だが、三角不等式は成立しない。

実際、transformer equality より、これは次に帰着される:

$$D(A, B) \underset{?}{\leq} D(A, 1) + D(B, 1) = |A - 1| + |B - 1|$$

しかし、前の例と modular identity より、

$$D(A, B) = 2(A \vee B) - (A + B)$$

$$\leq 2 - (A + B) = 1 - A + 1 - B = D(A, 1) + D(B, 1)$$

したがって、三角不等式は成り立たない。もともと作用素不等式としては無理があるので当然であるが、ノルムあるいはトレースを取って、数値化した場合に成立するかどうかはまだわかっていない。幾何学的に興味深い問題であると思うが。

## 参考文献

- [1] J.I.Fujii and E.Kamei : *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34** (1989), 541-547 .
- [2] J.I.Fujii and E.Kamei : *Interpolational paths and their derivatives*, Math. Japon., **39** (1994), 557-560.
- [3] T.Furuta : *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan. Acad., **65**(1989), 126.
- [4] E.Kamei : *Paths of operators parametrized by operator means*, Math. Japon. **39**(1994), 395-400. 47A63
- [5] F.Kubo and T.Ando : *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **248** (1980) 205-224.
- [6] M.P.Olson : *The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice*, Proc. Amer. Math. Soc., 28: 537-544 (1971).
- [7] A.Uhlmann : *Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory*, Commun. Math. Phys. **54**(1977), 22-32.