

ヒルベルト空間の値をとる

マルティンゲールの確率積分

名大 理 国 田 寛

§1. 序

$(X, \|\cdot\|)$ は reflexive, separable なバナッハ空間, X^* をその dual な空間とする. $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ は可分な確率空間で, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ($s \leq t$ のとき) とする. 写像 $X(\omega): \Omega \rightarrow X$ がすなわち $f \in X^*$ に対し, $(f, X_t(\omega))$ が可測なときに, X を X -値確率変数とする. X -値確率過程の定義も同様である. X_t を X -値確率過程とすれば, $\|X_t\|$ は実数値確率過程となる. X -値確率過程 $X_t, t \geq 0$ が (i) $E(\|X_t\|) < \infty, \forall t < \infty$ かつ (ii) すなわち $f \in X^*$ に対し $((f, X_t), \mathcal{F}_t, P)$ がマルティンゲール, の条件を満たすとき X -値マルティンゲールという. X -値マルティンゲールに對して次の proposition は容易にたしかめられる.

Proposition 1. X_t を X -値マルティンゲールとする.

- (1) X_t は弱右連続な version である。即ち, (a) $P(X_t = X_t^*) = 1$, $\forall t \geq 0$, (b) $\forall f \in \mathcal{X}^*$ に対し (f, X_t^*) は t に関し右連続, 3 つの条件を満たす X_t^* が存在する.
- (2) $\|X_t\|$ は方マルチンゲール. 時に X_t が弱(右)連続ならば $\|X_t\|$ は(右)連続である.

以下マルチンゲール X_t は弱右連続とする.

スカラー値マルチンゲールに関する確率積分 $\int \bar{\pi} dX$ は, 被積分関数 $\bar{\pi}(t, \omega)$ と何に与えられるかにより次の三種が考えられる.

- (I) $\bar{\pi}(t, \omega)$ が有界な実数値 very well 可測な関数 α とし, $\int \bar{\pi} dX$ とスカラー値マルチンゲールとして定義する. $\bar{\pi}(t, \omega)$ が階段関数のとき, 即ち $0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ と $\mathcal{F}_{t_n}$ -可測な実数値有界関数 $\bar{\pi}_n(\omega)$ が存在して

$$\bar{\pi}(t, \omega) = \bar{\pi}_n(\omega) \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

となるとき, 確率積分は

$$(1) \quad \int_0^t \bar{\pi} dX = \sum_{t_n \leq t} \bar{\pi}_n (X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$

と定義する. 明らかに

$$(2) \quad (f, \int_0^t \bar{\pi} dX) = \int_0^t \bar{\pi} d(f, X) \quad \forall f \in \mathcal{X}^*$$

とみたす。したがって、一般の $\bar{w}$ に対しては

$$(3) \quad (f, \bar{w}) = \int_0^t \bar{w} d(f, X), \quad \forall f \in \mathcal{X}^*$$

とみたすマル $\bar{w} = \gamma$ -ル Y_t^* が存在すれば、それを $\bar{w}$ の X に対する確率積分と定義しよう。

(II). $\bar{w}(t, \omega)$ が $\mathcal{X}^*$ -値確率過程で、 $(f, \bar{w}(t, \omega))$, $f \in \mathcal{X}$ が very well 可測のとき、 $\int_0^t (\bar{w}, dX_s)$ と実数値マル $\bar{w} = \gamma$ -ルとして定義する。即ち $\bar{w}(t, \omega)$ が階段函数のとき、

$$\int_0^t (\bar{w}, dX) = \sum_{t_{n+1} \leq t} (\bar{w}_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$

とすれば上式の左辺は実数値マル $\bar{w} = \gamma$ -ルになる。

(III). (t, ω) を固定すれば、 $\bar{w}(t, \omega); \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$ が連続な線型作用素となっているとき、 $\int \bar{w} dX$ は $\mathcal{X}^*$ -値マル $\bar{w} = \gamma$ -ルとして定義する。 $\bar{w}$ が階段函数のときは、(1)式に $\bar{w}$ と定義すればよい。これが実数値マル $\bar{w} = \gamma$ -ルになることは

$$\begin{aligned} \left(\int \bar{w} dX, \varphi \right) &= \sum_{t_{n+1} \leq t} (\bar{w}_n (X_{t_{n+1}} - X_{t_n}), \varphi) = \sum_{t_{n+1} \leq t} (\bar{w}_n^* \varphi, X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) \\ &= \int (\bar{w}^* \varphi, dX), \quad \forall \varphi \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

によって (II) に帰着されることに注意するはよい。

上記の三種の確率積分が定義される $\bar{w}$ の class を求める。

とは、一般のバナッハ空間では容易ではない。しかし X がヒルベルト空間の場合は、二次エマルゲンゲールとほぼ同じ結果が得られるので以下これについてやる。

§2. ヒルベルト空間の場合.

$(X, (\cdot, \cdot))$ をヒルベルト空間, $\|\cdot\|$ をその内積から導かれるノルムとする。以下確率積分と前節の $\equiv$ の場合にわけて考へる。

(I). $M = \{X_t; \text{エマルゲンゲールかつ } E(\|X_t\|^2) < \infty, \forall t < \infty, X_0 = 0\}$ とおく。 $\|X_t\|^2$ は右連続なエマルゲンゲールだから、Meyer の分解により, natural increasing process $\langle X \rangle_t$ 是 $\|X_t\|^2 - \langle X \rangle_t$ がエマルゲンゲールになる t のみ一つ存在する。又 $X, Y \in M$ に対し $\langle X, Y \rangle_t$ は $\frac{1}{4} \{ \langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t \}$ によって定義すれば

$$(4) \quad E((X_t - X_s, Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s) = E(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s | \mathcal{F}_s), \quad \forall t \geq s,$$

が成り立つ。実際上式の左辺は、 $X=Y$ のとき、

$$E(\|X_t\|^2 + \|X_s\|^2 | \mathcal{F}_s) - 2E(\langle X_t, X_s \rangle | \mathcal{F}_s)$$

とすることが $E(\langle X_t, X_t \rangle | \mathcal{F}_s) = \|X_t\|^2$ となる (一般に X が $\mathcal{F}$ -可測 $\mathcal{F}$ -値確率変数, Y が $\mathcal{F}'$ -可測 $\mathcal{F}$ -値確率変数で, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, $E(\|X\|^2) < \infty$, $E(\|Y\|^2) < \infty$ ならば $E(\langle X, Y \rangle | \mathcal{F}) = E(\langle X, E(Y | \mathcal{F}) \rangle | \mathcal{F})$ となる))

$$E(\|X_t - X_s\|^2 | \mathcal{F}_s) = E(\|X_t\|^2 - \|X_s\|^2 | \mathcal{F}_s) = E(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s | \mathcal{F}_s)$$

$X \neq Y$ にも式 (4) の定義から (4) となることは明らか:

$$L_2(\langle X \rangle) = \{ \Phi(t, \omega); \text{ 実数値 very well 可測}, E(\int_0^t \Phi^2 d\langle X \rangle) < \infty \forall t < \infty \}$$

よって

Theorem 1. $X \in \mathcal{M}$, $\Phi \in L_2(\langle X \rangle)$ に対し

$$(5) \quad \langle Y, Z \rangle_t = \int_0^t \Phi d\langle X, Z \rangle, \quad \forall Z \in \mathcal{M}$$

を満たす $Y \in \mathcal{M}$ が唯一に存在する. 更にこの Y は

$$(6) \quad (f, Y_t) = \int_0^t \Phi d(f, X) \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

を満たす.

証明は (4) 式から不等式

$$E\left(\int_0^t \Phi^2 d\langle X, Y \rangle\right) \leq E\left(\int_0^t \Phi^2 d\langle X \rangle\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int_0^t \Phi^2 d\langle Y \rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

を用いて一変元 2 元 4 元 $\mathcal{Y} = \mathcal{V}$ と $\mathcal{L}$ の間に同値がある.

Theorem 1 に よる, 直交射影等一次マルティンゲール理論と同じ事が成り立つ. まず $X, Y \in \mathcal{M}$ が $\langle X, Y \rangle_t \equiv 0$ を満たすとき直交するという. これは (X_t, Y_t) が一次マルティンゲールであることと同値である. $\mathcal{M}$ の部分集合が, 閉かつ linear の確率積分に閉して用いられるとき, 部分空間という. $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分空間であるとは任意の $X \in \mathcal{M}$ は $X_1 \in \mathcal{N}$ と $X_2 \in \mathcal{N}^\perp = \{X \in \mathcal{M} \text{ と直交する } Y \in \mathcal{M} \text{ の全体}\}$ との和に一意に分解できる. 更に $\mathcal{M}$ には可算個の互に直交する列 $\{X^n\}$ が存在して任意の $X \in \mathcal{M}$ は $X = \sum_{n=1}^{\infty} \int \bar{X}_n dX^n$ と表現される. (この様な $\{X^n\}$ が可算個であることは, $\mathcal{M}$ が $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ が separable であることからわかる) $\mathcal{M}_c$ を強連続な $\mathcal{M}$ のものの全体, $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_c^\perp$ とする.

Theorem 2. (1) $X_t \in \mathcal{M}$ で $X_t = Y_t - \tilde{Y}_t$ と書けるものは $\mathcal{M}_d$ で dense である. ただし Y_t は jump のみで変化する確率過程, $\tilde{Y}_t$ は強連続な確率過程である.

$$(8) \quad \sum_{t_n \leq t} \|\tilde{Y}_{t_n} - \tilde{Y}_{t_{n-1}}\|^2 \rightarrow 0 \quad (\text{分割を細かくしていくとき}) \quad \text{in } L_2\text{-sense}$$

を満たすもの.

(2). $X \in \mathcal{M}_d$ のとき

$$(9) \quad \sum_{t_n \leq t} \|X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\|^2 \rightarrow \sum_{s \leq t} \|\Delta X_s\|^2 \quad \text{in } L_2\text{-sense.}$$

(証明略).

(II). $\Phi(t, \omega)$ が X -値確率過程で, $\forall t \geq 0$ の $\varphi \in X$ に対し
 (Φ, φ) が very well 可測のとき, Φ は very well 可測とす.
 $X \in \mathcal{M}$ に対し

$$\tilde{\mathcal{L}}_2(\langle X \rangle) = \{ \Phi; X\text{-値 very well 可測かつ } E(\int_0^t \|\Phi\|^2 d\langle X \rangle) < \infty, \forall t < \infty \}$$

と置く. $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}_2(\langle X \rangle)$ が階段函数のとき, §1 で確率積分
 $\int(\Phi, dX)$ を定義したから, 以下は

$$E\left(\left[\int(\Phi, dX)\right]^2\right) \leq E\left(\int \|\Phi\|^2 d\langle X \rangle\right)$$

が成り立つ. 実際, $\int(\Phi, dX) = \sum_{t_n \leq t} (\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$ であるから

$$E\left(\left[\int(\Phi, dX)\right]^2\right) = E\left(\sum_{n, m} (\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})(\Phi_m, X_{t_{m+1}} - X_{t_m})\right)$$

であるから $n < m$ のとき

$$\begin{aligned} & E((\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})(\Phi_m, X_{t_{m+1}} - X_{t_m})) \\ &= E((\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})(\Phi_m, E(X_{t_{m+1}} - X_{t_m} | \mathcal{F}_{t_m}))) = 0. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E\left(\left[\int(\Phi, dX)\right]^2\right) &= E\left(\sum_n (\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})^2\right) \\ &\leq E\left(\sum_n \|\Phi_n\|^2 \|X_{t_{n+1}} - X_{t_n}\|^2\right) = E\left(\sum_n \|\Phi_n\|^2 [\langle X \rangle_{t_{n+1}} - \langle X \rangle_{t_n}]\right) \\ &= E\left(\int_0^t \|\Phi_n\|^2 d\langle X \rangle\right). \end{aligned}$$

さて $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}_2(\langle X \rangle)$ に対し, 階段函数の列で

$$E\left(\int_0^t \|\Phi - \Phi_n\|^2 dX\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall t < \infty$$

また $\{\Phi_n\} \subset L_2(\mathcal{X})$ であることは, $\int(\Phi_n, dX)$ は実数値
 2ル $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \int(\Phi, dX)$ に収束する. 尤も, $\{\varphi_i\}$ は $\mathcal{X}$ の
 CONS とし, $\Phi^i = (\Phi, \varphi_i)$, $X^i = (X, \varphi_i)$ とおけば,

$$\int(\Phi, dX) = \sum_i \int \Phi^i dX^i$$

がなりたつ. ただし上式の右辺は実数値2ル $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \int(\Phi, dX)$ に
 なる確率積分である.

(Ⅳ). $\Phi(t, \omega)$ は (t, ω) に固定すれば, $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ の連続
 な線型作用素であり, かつこの $\varphi \in \mathcal{X}$ に対し $\Phi(t, \omega)\varphi$ は
 very well 可測である. Φ の Hilbert-Schmidt ノルムは

$$\|\Phi\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi^* \varphi_k\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \{\varphi_k\} \text{ は CONS}$$

によって定義する. $\|\Phi\|_2$ は CONS $\{\varphi_k\}$ のとり方に依らず

である. 又 $\|\Phi\|_2 = \|\Phi^*\|_2$ である. ところで

$$\tilde{L}_2(\mathcal{X}) = \{ \Phi; \text{very well 可測} \text{ かつ } E\left(\int_0^t \|\Phi\|_2^2 dX\right) < \infty, \forall t < \infty \}$$

とおき, $\Phi \in \tilde{L}_2(\mathcal{X})$ に対し, $Y = \int \Phi dX \in \mathcal{M}$ を次式によ
 って定義する.

$$(10) \quad (Y, \varphi) = \int (\Phi^* \varphi, dX) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

この Y の存在を示すために、形式的に

$$(11) \quad Y = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX) \varphi_k$$

と置く。もし (11) の右辺が L^2 -収束すれば、それが (10) を満たすことは容易にたしかめられる。(11) の右辺の各項 φ_k の和が存在することは、次の関係式によって保証される。

$$\begin{aligned} E \left(\left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX) \varphi_k \right]^2 \right) &= E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX) \right]^2 \right) \\ &\leq E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \|\Phi^* \varphi_k\|^2 d\langle X \rangle \right) = E \left(\int_0^t \|\Phi^*\|_2^2 d\langle X \rangle \right) < \infty. \end{aligned}$$

§3. 確率積分の変換公式

まず有界変分をもつ $\mathcal{H}$ -値確率過程を定義する。 $\mathcal{H}$ -値確率過程 φ_t が

$$\sup_{\Delta} \sum_{t_n \leq t} \|\varphi_{t_n} - \varphi_{t_{n-1}}\| < \infty, \quad \Delta = \{0 < t_1 < t_2 < \dots\}$$

をみたすとき有界変分をもつという。この様な φ_t と有界な

very well 可測 (スカラー, 線型汎函数, 線型作用素) $\Phi(t, \omega)$ とにたいし, 確率積分 $\int \Phi d\varphi$ が定義されることは明らかで

ある.

$X \rightarrow R'$ の写像 F が,

$$F(x+h) - F(x) = (F'(x), h) + \frac{1}{2}(F''(x)h, h) + o(\|h\|^2), \quad \forall h \in X$$

を満たすとき, 二回微分可能という. ただし $F'(x)$ は X の線型汎函数, $F''(x)$ は X の線型作用素である. $F'(x)$ 及び $F''(x)$ が X に関し連続あるいは作用素のノルムで連続のとき, F は二回連続的に微分可能という.

Theorem 3. $F: X \rightarrow R$ が二回連続的に微分可能で, $\|F'\|, \|F''\|_2$ が X に関し有界とする. $X \in \mathcal{M}$, φ : 有界変分, $A_t = X_t + \varphi_t$ とおくと

$$\begin{aligned} F(A_t) - F(A_0) &= \int_0^t (F'(A_s^-), dX_s) + \frac{1}{2} \left\langle \int_0^t F''(A_s^-) dX^c, X^c \right\rangle_t \\ &\quad + \int_0^t (F'(A_s^-), d\varphi_s) + \sum_{\|dX_s\| > 0} [F(A_s) - F(A_s^-) - (F'(A_s^-), X_s - X_s^-)]. \end{aligned}$$

ただし X^c は X の $\mathcal{M}^c$ の射影, A_s^- は A_s の s^- の左極限である.

略証. $X_t^d \equiv X_t - X_t^c$ は $\varphi_t - \tilde{\varphi}_t$ と書け, φ_t 及び $\tilde{\varphi}_t$ は Theorem 2 の条件を満たすとする. $\{T_n\} \in X_t, \varphi_t, \tilde{\varphi}_t$ 及び φ_t の ε -chain とする (ノルムに依りて). $T_n \uparrow t$ を簡単のため t に近い T_n と書けば,

$$\begin{aligned}
 F(A_t) - F(A_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} [F(A_{T_n}) - F(A_{T_{n-1}})] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} [F(A_{T_n}^-) - F(A_{T_{n-1}})] + \sum_{n=1}^{\infty} [F(A_{T_n}) - F(A_{T_n}^-)]
 \end{aligned}$$

と 3. 51

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} [F(A_{T_n}^-) - F(A_{T_{n-1}})] &= \sum_{n=1}^{\infty} (F'(A_{T_{n-1}}), A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} (F''(A_{T_{n-1}})(A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}), A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} o(\|A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}\|^2)
 \end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum (F'(A_{T_{n-1}}), X_{T_n} - X_{T_{n-1}}) + \sum (F'(A_{T_{n-1}}), \varphi_{T_n} - \varphi_{T_{n-1}}) \\
 &\quad - (F'(A_{T_{n-1}}), \Delta X_{T_n})
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t (F'(A_s^-), dX_s) + \int_0^t (F'(A_s^-), d\varphi_s) - \sum_{\|\Delta X_s\| > 0} (F'(A_s^-), \Delta X_s)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum (F''(A_{T_{n-1}})(X_{T_n}^c - X_{T_{n-1}}^c), (X_{T_n}^c - X_{T_{n-1}}^c))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum (F''(A_{T_{n-1}})(X_{T_n}^c - X_{T_{n-1}}^c), (\varphi_{T_n}^c - \varphi_{T_{n-1}}^c))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum (F''(A_{T_{n-1}})(\varphi_{T_n}^c - \varphi_{T_{n-1}}^c), X_{T_n}^c - X_{T_{n-1}}^c)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum (F''(A_{T_{n-1}})(\varphi_{T_n}^c - \varphi_{T_{n-1}}^c), \varphi_{T_n}^c - \varphi_{T_{n-1}}^c)$$

$$F_t \leq \varphi_t = \varphi_t - \tilde{\varphi}_t. \quad \text{上式の右辺は } \langle \int F'(A_s^-) dX^c, X^c \rangle$$

$$\text{に収束する. } \Rightarrow, \exists, \text{ 四項は } 0 \text{ に収束する. } (\sum \|\varphi_{T_n} - \varphi_{T_{n-1}}\|^2 \rightarrow 0)$$

($\varepsilon \rightarrow 0$) を使えばよい). I_3 も 0 に収束する. したがって定理が得られる.

付記 正規過程の上に定義されたマルコングール.

$X_t, t \geq 0$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_s; s \leq t)$ とする. $(\Omega, \mathcal{B}_t, P)$ 上の平均 0, 2乗可積分なマルコングールの作る空間を $\mathcal{M}$ とする. $\mathcal{M}$ と X_t の関連を調べることは興味ある問題である. 例えば $X_t = (B_t^1, \dots, B_t^N)$ が N -次元ブラウン運動のとき, $\mathcal{M}$ の base は $\{B_t^1, \dots, B_t^N\}$ であることが知られている. 以下 X_t が正規過程のとき $\mathcal{M}$ の構造を調べる.

正規過程の性質の表現には, Hellinger-Hahn の定理が有効であるが, マルコングールの立場から証明を付ける. 簡単のため, X_t は連続とする. まず t を任意に固定し, $Y_s^t = E(X_t | \mathcal{B}_s)$ とおけば Y_s^t は s に関し正規なマルコングールである. したがって $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ に対し $Y_{s_4}^t - Y_{s_3}^t$ と $Y_{s_2}^t - Y_{s_1}^t$ は直交する. ゆえに $Y_{s_4}^t - Y_{s_3}^t$ と $Y_{s_2}^t - Y_{s_1}^t$ は独立である. ゆえに Y_s^t は s に関し加法過程になっている. 今 $\{Y_s^t (t \in [0, \infty))\}$ から生成される $\mathcal{M}$ の部分空間を $\mathcal{M}'$ とする. $\mathcal{M}'$ の base とし, 各元を正規加法過程から選べる. $Y_s^n = Y_{t_n}^{t_n}$ ($\{t_n\}$ は $[0, \infty)$ の dense) に Schmidt の直交化を行えば

$$X^n = Y^n - P_{L(X^1, \dots, X^n)} Y^n$$

が正規過程になる。実際、まず Y^1 と Y^2 は jointly に正規だから

から $\langle Y^1 \rangle$, $\langle Y^2 \rangle$, $\langle Y^1, Y^2 \rangle$ は ω に無関係となる。ゆえに

$$W(s) = d\langle Y^1, Y^2 \rangle_s / d\langle Y^1 \rangle_s \quad \text{は } \omega \text{ に無関係。したがって } P_{L(Y^1)} \equiv$$

$\int W(s) dY^1$ は正規である。このより X^2 が正規になる。一般に

X^n が正規になることも同様である。この結果を用いて正規

過程 X_t の表現は次の様にして得られる。 $Y_s^t = E(X_t | \mathcal{B}_s) \in \mathcal{M}'$

だから、 $Y_s^t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi_n(t, s, \omega) dX_s^n$ と表現される。ここで Y_s^t

と X_s^n は jointly に正規だから $\Phi_n(t, s, \omega) \equiv d\langle X^n, Y^t \rangle_s / d\langle X^n \rangle_s$

は ω に無関係。ゆえに $X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi_n(t, s) dX_s^n$ を得る。

次に $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ を示す。このために、有限回以上の微係数が恒等的に 0 になる $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($\exists N$) と、 jointly に正規な N 個の $Y^1, \dots, Y^N$ に対し

$$E(F(Y_t^1, \dots, Y_t^N) | \mathcal{B}_s) = \text{定数}$$

が s に関する N 個の $Y^1, \dots, Y^N$ とみて $\mathcal{M}'$ に属することとを示せば十分である。簡単のため、 $N=1$, $Y_t^1 = Y_t$ とする。確率積分

の公式によって

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t F'(Y_u) dY_u + \frac{1}{2} \int_0^t F''(Y_u) d\langle Y \rangle_u.$$

(Y_t は連続)。ゆえに

$$E(F(Y_t) | \mathcal{B}_s) = F(Y_0) + \int_0^{t \wedge s} F'(Y_u) dY_u + \frac{1}{2} \int_0^t E(F''(Y_u) | \mathcal{B}_s) d\langle Y \rangle_u.$$

右辺の第1項は定数 (a.e.), 第2項は $\mathcal{M}'$ に属するから,
 “第3項 = 定数” が $\mathcal{M}'$ に属する: と云うことは”.

$$E(F''(Y_u) | \mathcal{B}_s) = F''(Y_0) + \int_0^{u \wedge s} F^{(3)}(Y_v) dY_v + \frac{1}{2} \int_0^u E(F^{(4)}(Y_v) | \mathcal{B}_s) d\langle Y \rangle_v$$

から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t E(F''(Y_u) | \mathcal{B}_s) d\langle Y \rangle_u &= \frac{1}{2} \left[F''(Y_0) \langle Y \rangle_t + \int_0^t \left[\int_0^{u \wedge s} F^{(3)}(Y_v) dY_v \right] d\langle Y \rangle_u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_0^u E(F^{(4)}(Y_v) | \mathcal{B}_s) d\langle Y \rangle_v \right] d\langle Y \rangle_u \right] \end{aligned}$$

上式の右辺の第2項は

$$\langle Y \rangle_t \int_0^{s \wedge t} F^{(3)}(Y_v) dY_v - \int_0^{t \wedge s} \langle Y \rangle_v F^{(3)}(Y_v) dY_v \in \mathcal{M}'.$$

第3項についても同じ議論をくり返せば $E(F(Y_t) | \mathcal{B}_s)$ = 定数
 が $\mathcal{M}'$ に属することから証明される.

文 献

Ю. Л. Далецкий, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ
 ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ
 УРАВНЕНИЯ, УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК (1967), т. XXII,
 3 - 54.

H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya
 Math. J. 30 (1967), 209 - 245.