

# 同心円形折り目写像について (On round fold maps)

By

北澤直樹 (NAOKI KITAZAWA) \*

## Abstract

In this paper, we introduce *round* fold maps introduced by the author [8] and study manifolds admitting round fold maps; a *round* fold map is a fold map into  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) whose singular value set is a disjoint union of standard spheres of dimensions  $n - 1$  embedded concentrically. We also introduce some numerical invariants of the source manifolds defined from such fold maps and calculate the invariants for some manifolds.

本稿では, [8] で著者により導入された同心円形折り目写像を紹介し, この写像を許容する定義域多様体の性質を紹介する. さらに, この写像を使った不変量を導入し, いくつかの多様体に関してこれらの不変量を計算する.

## § 1. 導入

Morse 理論とは, 多様体をその上の良い関数 (Morse 関数) をもとに調べる手法である ([17], [18]). 特異点と多様体のホモロジーやホモトピー等が関係していることが, 良く知られている. Morse 理論は数学 (幾何学) 全体において重要な役割を担っている.

Morse 理論では関数を用いるが, 関数の代わりに一般のユークリッド空間や多様体への良い写像 (但し値域の次元が定義域の次元より高くないものとする) を用いる Morse 理論の一般形が, 1950 年代の Whitney ([28]) や Thom ([27]) の研究に始まり今に至るまで盛んに研究され続けている. そして Morse 理論では分からないような事実も多く分かってきた.

本稿では Morse 理論の一般形について, Morse 関数の最も単純な一般化である折り目写像を中心に紹介する. 本稿の主要部は現在投稿中の論文 [8] の結果の一部や周辺である.

---

Received June 28, 2012. Revised February 8, 2013.

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary; 57R45. Secondary; 57N15.

*Key Words:* Singularities of differentiable maps, Differential topology

\*Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, JAPAN

e-mail: kitazawa.n.aa@m.titech.ac.jp

© 2013 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

本稿の構成は以下である.

§2 で折り目特異点と呼ばれる特異点しか持たない写像である折り目写像を導入し, さらに本稿を通して重要となる Reeb space を導入する.

§3 で, 折り目写像の特別なクラスとして, Morse 関数の極大点極小点にあたるような点のみを特異点としてもつ **special generic 写像**や, 少し広げたクラスとして, 定義域多様体から Reeb space への商写像を特異点集合に制限したとき単射になっているものとして定義される **simple** な折り目写像を導入し, さらに [8] で著者が導入した**同心円形折り目写像**を紹介する. 同心円形折り目写像の特異点の指数に条件をつけ正則値の逆像を球面の非交和とした場合の, 定義域多様体のホモトピー群 (ホモロジー群) についての [8] で得られた定理を証明する (命題 2, 命題 3).

§4 で §3 の主定理である命題 2 と命題 3 の仮定を満たす写像の定義域多様体の位相型と微分同相型について調べる. 特異点集合の連結成分が 1 個であるものは球面の special generic 写像であるが, 次に単純なものとして, 定理 1 で標準的球面上の球面束に特異点集合の連結成分が 2 個からなるものを構成する. 命題 2, 命題 3 の仮定を満たす写像を許容する向きづけられた単連結多様体たちについて, 与えられた写像を切ってつなげることで連結和にも同様の仮定をみたす同心円形折り目写像を構成できるということを, [13] の平面へのある種の写像の変形に使われた考えを応用して示す (定理 2). さらに 定理 1, 定理 2 から, 標準的球面上の標準的球面をファイバーとする束の連結和に同様の仮定をみたす同心円形折り目写像が構成できることをみる (定理 3).

§5 で, §3 の主定理の仮定を満たす写像の中での特異点集合の連結成分数の最小値という, 定義域多様体の不変量について報告する. Morse 関数の特異点の個数は, 定義域多様体のホモロジーやホモトピーと強く関係しているが, 本稿ではこのことの高次元化を考える. 特に定理 5 として, 7 次元ホモトピー球面で 4 次元球面上の 3 次元球面をファイバーとする束となっているもの (例えば標準的な球面さらにはいくつかの標準的でない球面) が, 定理 1 より特異点集合の連結成分が丁度 2 個からなる  $\mathbb{R}^4$  への同心円形折り目写像を許容するが, その中で 1 個からなるものつまり special generic であるものを許容するのが標準的なもののみであるということを主張する結果を説明する.

今後  $m, n \in \mathbb{N}$  とし,  $M (M^m)$  を  $m$  次元閉  $C^\infty$  級多様体,  $N (N^n)$  を  $n$  次元境界なし  $C^\infty$  級多様体,  $f: M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  級写像,  $S(f)$  を  $f$  の**特異点集合**つまり  $f$  の微分の階数が  $n$  より低いような  $M$  の点全体の集合とする. また  $D^k$  で  $k$  次元単位 (標準的) 球体,  $S^k$  で  $k$  次元単位 (標準的) 球面を表す ( $k \in \mathbb{N}$ ). 最後に, 位相空間  $X$  の内部を  $\text{Int}X$ , 閉包を  $\bar{X}$  で表し, さらに位相空間  $X$  が多様体のとき境界を  $\partial X$  で表す.

本論文の作成に当たり, レフェリーの方には丁寧に読んで頂き, 非常に多くの助言を頂いた. この場を借りて心より感謝申し上げたい.

## §2. 折り目写像 (fold map), Reeb space

Morse 関数の最も単純な一般化である折り目写像を導入する. [6] や [20] 等も参照のこと.

**定義 1.**  $f : M^m \rightarrow N^n$  を  $C^\infty$  級写像とし  $m \geq n \geq 1$  とする.

1. ある  $p \in M$  の局所座標  $(U, \phi)$  ( $\phi = (x_1, \dots, x_m)$ ) とある  $f(p) \in N$  の局所座標  $(V, \psi)$  ( $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ ) があつて  $\phi(p) = 0, \psi(f(p)) = 0$  を満たし, さらに  $0 \leq i \leq m-n+1$  をみたす整数  $i$  があつて

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) := \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$$

$$= (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=0}^{m-n-i} x_{n+k}^2 - \sum_{k=m-n-i+1}^{m-n} x_{n+k}^2)$$

を満たすようにできるとき,  $p \in S(f)$  は**折り目特異点 (fold point)** であるという.

2.  $f$  の各特異点が折り目特異点であるとき,  $f$  は**折り目写像 (fold map)** であるという.

**命題 1.**  $f : M^m \rightarrow N^n$  を  $C^\infty$  級写像とし  $m \geq n \geq 1$  とする.

1.  $p \in M$  を  $f$  の折り目特異点とする. このとき定義 1 における  $\min\{i, m-n+1-i\}$  は  $(U, \phi), (V, \psi)$  によらずに定まる (これを  $p$  の**指数**と呼ぶ).
2.  $f : M \rightarrow N$  を折り目写像とする. このとき特異点集合  $S(f)$  そして指数  $i$  の特異点全体の集合  $F_i(f)$  は,  $M$  の  $n-1$  次元  $C^\infty$  部分多様体である. さらに  $f|_{F_i(f)}$  は  $C^\infty$  はめ込み. (折り目写像  $f$  について  $f|_{S(f)}$  が正規交叉をもつはめ込みであるとき,  $f$  は**良い折り目写像**であるということにする.)

例えば各特異点で値の異なる Morse 関数は良い折り目写像である. (各特異点で値の異なる)Morse 関数は  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  において稠密に存在するのに対し, 折り目写像はそうとは限らず, 中には存在しない場合もある. 例えば, 値域が平面  $\mathbb{R}^2$  である場合, 定義域多様体  $M$  の Euler 数が偶数であることが  $M$  上に良い折り目写像が存在することの必要十分条件である (詳しくは, [28], [27], [14], [15] を参照). また, Eliashberg 等に始まる折り目写像の存在問題も重要である (詳しくは, [3], [4] を参照).

次に, Reeb space を導入する (詳しくは, [1], [5] を参照).

**定義 2.**  $f : M^m \rightarrow N^n$  を  $C^\infty$  級写像とする.  $p_1 \in M$  と  $p_2 \in M$  が  $N$  の同じ点における  $f$  の逆像の同じ連結成分にあるときかつその時に限り  $p_1 \sim_f p_2$  と定める. 同値関係  $\sim_f$  から得られる商空間  $W_f := M/\sim_f$  を  $f$  の**Reeb space** という. (商写像を  $q_f : M \rightarrow W_f$  とする.)

$f$  が良い折り目写像の時, Reeb space には自然に多面体の構造が入ることが知られている. より広く安定写像という実特異点論で重要なクラス ([6] 等参照), さらにより広いクラスでも, 同様のことが成立することが知られている.

例えば, (良い) Morse 関数の場合, Reeb space はグラフになる. 後で紹介する special generic 写像や simple な折り目写像の場合, Reeb space はそれほど複雑でない多面体の

構造を有する. 他 [13] には, 定義域が 2 次元以上であるような平面への安定写像の場合に Reeb space が自然に 2 次元多面体になることの証明があり, [7] では安定写像を含む広いクラスが扱われている.

### § 3. 折り目写像のクラス

折り目写像やさらに広げた良い写像についての研究は, Whitney, Thom にはじまり, その後 Levine, Eliashberg 等の研究を経て, 最近では Saeki, Sakuma 等により活発になされている.

本 § では, これまで研究されてきた種々の特殊な折り目写像を紹介する.

特異点集合が指数 0 の折り目特異点のみからなる折り目写像を **special generic 写像** とよぶ. この写像は特異点を丁度 2 個もつ球面上の Morse 関数の一般化であるといえる. Special generic 写像は [1] で導入されその後 [5] さらに [21], [22] 等の研究がある. 例えば [21] では, 球面上の special generic 写像の存在非存在が, 球面の微分構造と関わっていること等が明らかにされている (本稿命題 4 も参照). 同論文では他に値域が  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  である special generic 写像を許容する定義域多様体を (完全にあるいは部分的に) 決定している. 特別な写像を考えると, 定義域多様体のホモトピー・位相型・微分同相型等に関するより詳しい情報を取り出せるのである.

Special generic 写像を含むクラスとして, 特異点集合  $S(f)$  に制限したとき商写像  $q_f$  が単射であるような写像を **simple** な折り目写像という. Simple な折り目写像は [20], [24] の中で研究されてきた. 他にも Reeb space や逆像に関して扱いやすいような平面への安定写像 ([13]) に関する研究や, 最近では正則値の逆像が球面の非交和であるような安定写像 ([23]) の研究もある.

一連の研究状況を踏まえ, 本論文では折り目写像に新たなクラスを導入し, そのクラスの写像の性質や, そのクラスの写像を許容する定義域多様体を調べる. 具体的には次で定義する **同心円折り目写像** の性質や, 同心円折り目写像を許容する定義域多様体の性質を調べる.

Morse 関数の特異点集合は離散集合である. 各特異点で値が異なる Morse 関数は, どのような  $C^\infty$  閉多様体上にも稠密に存在する. 各特異点で値の異なる Morse 関数を一般化して, **特異点集合が球面の非交和で, 特異値集合が特異点集合の埋め込みになっている折り目写像**について考えたい. 特異値集合が特異点集合の埋め込みになっている折り目写像は, 先行研究における具体例等で頻繁に登場している (例 1 を参照).

今後  $N := \mathbb{R}^n$  とする. まず  $C^\infty$  **同値** を振り返る.

$X_1, X_2, Y_1, Y_2$  を  $C^\infty$  級多様体とし,  $c_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  と  $c_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  を  $C^\infty$  級写像とする.  $C^\infty$  級微分同相写像  $\phi_X : X_1 \rightarrow X_2, \phi_Y : Y_1 \rightarrow Y_2$  があつて可換図式

$$\begin{array}{ccc}
X_1 & \xrightarrow{\phi_X} & X_2 \\
\downarrow c_1 & & \downarrow c_2 \\
Y_1 & \xrightarrow{\phi} & Y_2
\end{array}$$

が成り立つとき,  $c_1$  と  $c_2$  は  $C^\infty$  同値であるという.

**定義 3** (round fold map, [8]).  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  を折り目写像で  $n \geq 2$  とする.  $f$  が次を満たす  $C^\infty$  級写像  $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  に  $C^\infty$  同値な時  $f$  は**同心円形折り目写像 (round fold map)** であるという. さらに  $f_0$  を  $f$  の**標準形 (normal form)** という.

1. 特異点集合  $S(f_0)$  が標準的球面の非交和.
2. 制限写像  $f_0|_{S(f_0)}$  が  $C^\infty$  級埋め込み.
3.  $D_r^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq r\}$  とする. ある  $l \in \mathbb{N}$  があり  $f_0(S(f_0)) = \sqcup_{k=1}^l \partial D_k^n$  (ただし  $\sqcup_{k=1}^l \partial D_k^n$  は非交和を表す).

このとき標準形  $f_0$  において,  $\mathbb{R}^n$  内の原点を起点とする半直線を  $f_0$  の**軸 (axis)** とよぶ.  $f_0$  について,  $\mathbb{R}^n$  内の  $D_{\frac{1}{2}}^n$  を  $f_0$  の**真核 (proper core)** という.  $f$  とその標準形  $f_0$ ,  $C^\infty$  級微分同相写像  $\Phi : M \rightarrow M$ ,  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  があり可換図式

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\Phi} & M \\
\downarrow f & & \downarrow f_0 \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

が成立するとする.  $f_0$  の軸  $L$  について 1 次元  $C^\infty$  級部分多様体  $\phi^{-1}(L)$  もまた  $f$  の**軸 (axis)** という.  $f_0$  の真核  $D_{\frac{1}{2}}^n$  について  $\phi^{-1}(D_{\frac{1}{2}}^n)$  もまた  $f$  の**真核 (proper core)** という.

### 例 1.

1.  $m$  次元  $C^\infty$  級 homotopy 球面  $M$  上の special generic 写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m \geq n \geq 2$ ) で, 特異点集合  $S(f)$  が  $S^{n-1}$  と  $C^\infty$  級微分同相であり,  $f|_{S(f)}$  が  $C^\infty$  級埋め込みであるようなものが [21] 等で構成されている. これらは同心円形折り目写像である.
2. [13] の §7 の FIGURE 7 (b), [23] の §6 の Figure 8. これらは同心円形折り目写像 (の Reeb space) とみなせる. special generic 写像ではないが, simple な折り目写像ではある. それぞれ定義域は 4 次元以上の  $C^\infty$  級ホモトピー球面,  $S^2$  上の  $C^\infty$  級  $S^2$  束で, 値域は平面である. 特異値集合はそれぞれ  $\mathbb{R}^n$  に同心円状に埋め込まれた  $n-1$  次元標準的球面 3, 2 個の非交和である. (図 2, 図 3)

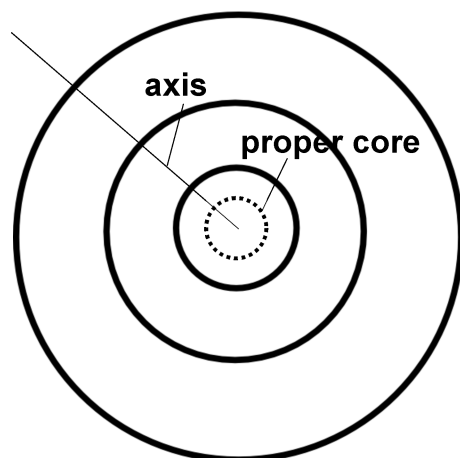
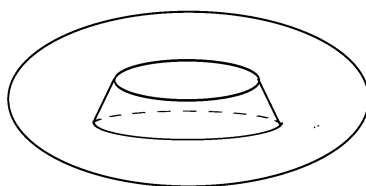
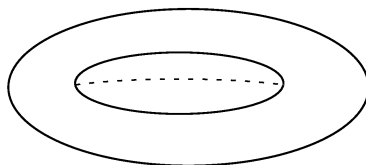


図 1. (平面への) 同心円形折り目写像の像, 特異値集合, 軸 (axis), 真核 (proper core)



↓

図 2. [13] §7 の FIGURE 7 (b) (Reeb space)



↓

図 3. [23] §6 の Figure 8 (Reeb space)

その他にも, Kobayashi が [10] や [11], [12] の中で著者とは独立に安定写像による多様体の平面像の研究を行い, 同心円形折り目写像の定義をみたすものを登場させている.

[8] の中で, 同心円形折り目写像の一般的な性質, 特に同心円折り目写像を許容する多様体のホモロジーやホモトピーに関する情報を以下のように明らかにすることができた.

**命題 2** ([8]).  $M^m$  を単連結  $m$  次元  $C^\infty$  級多様体,  $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  を以下を満たす同心円形折り目写像とし,  $n \geq 2, m \geq 2n$  とする.

1. 特異点の指数が 0 または 1.
2.  $f(M)$  が  $D^n$  に  $C^\infty$  級微分同相.
3. 各正則値  $p \in \mathbb{R}^n - f(S(f))$  の逆像  $f^{-1}(p)$  は **almost-sphere** (標準的円板を境界上の  $C^\infty$  級微分同相ではり合わせてできる球面) の非交和.

このとき,  $q_f$  は  $0 \leq k \leq m - n - 1$  を満たす各  $k$  に対して, ホモトピー一群の間の同型  $\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f)$  を誘導する. さらに,  $f$  の真核  $C$  上の点の逆像の連結成分数が  $l$  であれば, 次が成立する.

$$\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f) \cong \{0\} \quad (0 \leq k \leq n - 1)$$

$$\pi_n(M) \cong H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{l-1} & m > 2n \\ \mathbb{Z}^{2(l-1)} & m = 2n \end{cases}$$

**命題 3** ([8]). 命題 2 の仮定のもと  $M$  は コンパクト  $(n - 1)$ -連結 PL 多様体  $W$  で次を満たすものの境界となる.

1. 包含写像  $i : M \rightarrow W$  が誘導する写像  $i_* : \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(W)$  が  $0 \leq k \leq m - n - 1$  で同型.
2.  $W$  は  $S^n$  のブーケに単純ホモトピー同値.

命題 2 と命題 3 の証明. STEP 1 定義域多様体を境界とするコンパクト PL 多様体の構成 ([20] の Proposition 3.12 とその証明や, [23] の Theorem 4.1 とその証明も参照.)

特異値集合の各連結成分の十分小さな  $C^\infty$  級閉管状近傍 ( $S^{n-1} \times [-1, 1]$  とみなせ特異値集合の部分は  $S^{n-1} \times \{0\}$  に対応) の逆像は, 指数 0 の成分ならば  $S^{n-1}$  上の  $C^\infty$  級  $D^{m-n+1}$  束, 指数 1 の成分なら  $S^{n-1}$  上の PL  $S^{m-n+1} - \text{Int}(D^{m-n+1} \sqcup D^{m-n+1} \sqcup D^{m-n+1})$  ( $S^{m-n+1}$  から互いに交わらない 3 個の  $D^{m-n+1}$  の非交和の内部を取り除いたもの) 束となる. これは  $f$  とこの閉管状近傍から  $S^{n-1} \times \{0\}$  への射影の合成が  $S^{n-1}$  上の  $C^\infty$  級束になること, さらにファイバーについては特異点の指数と正則値の逆像が almost-sphere の非交和であることから分かる. それらに同伴な PL  $D^{m-n+2}$  束を (もとの束のファイバーが境

界の PL 部分多様体となるように) つくることができる. また特異値集合の閉管状近傍の補集合の閉包の逆像は  $m-n$  次元 almost-sphere をファイバーとする  $C^\infty$  級束の非交和である. それらに同伴な PL  $D^{m-n+1}$  束を (もとの束のファイバーが境界と一致するように) つくることができる. さらに  $S^{n-1}$  上の  $C^\infty$  級  $D^{m-n+1}$  束に対応してできた  $D^{m-n+2}$  束は  $[0, 1]$  をファイバーとする部分束に,  $S^{n-1}$  上の PL  $S^{m-n+1} - \text{Int}(D^{m-n+1} \sqcup D^{m-n+1} \sqcup D^{m-n+1})$  束に対応してできた  $D^{m-n+2}$  束は  $K := \{re^{i\pi t} \mid 0 \leq r \leq 1, t = 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$  をファイバーとする部分束に, そして  $m-n$  次元 almost-sphere をファイバーとする  $C^\infty$  級束に対応する  $D^{m-n+1}$  束は一点からなる空間をファイバーとする部分束に (ファイバーを保ったまま) 縮約する. 各球体束, そして球体束の縮約で得られた各部分束は貼りあう. 結果として  $m+1$  次元 PL 多様体  $W$  が  $\partial W = M$  となるように構成される. また, 前の球体束の縮約で得られた各部分束が貼りあった結果,  $W_f$  に PL 同相な多面体が  $W$  の部分多面体として得られる.  $W$  は  $W_f$  に単純ホモトピー同値となることがわかる.

## STEP 2 $W, W_f$ のホモトピー群と $M$ のホモトピー群の関係

$W$  は  $W_f$  に単純ホモトピー同値になる.  $W_f$  は  $n$  次元の多面体とみなせる.  $W$  は指数が  $n$  以下のハンドルの和に分解できる.  $W$  は,  $M \times [0, 1]$  に  $M \times \{1\}$  にそって指数  $m-n+1$  以上のハンドルを接合することによって得られると考えられる.  $\pi_k(M) \cong \pi_k(W) \cong \pi_k(W_f)$  ( $0 \leq k \leq m-n-1$ ) が従い, 特に最初の同型は包含写像により誘導される. 包含写像  $i: M \rightarrow W$  と  $W$  の  $W_f$  に単純ホモトピー同値な多面体への縮約 (レトラクト) を考えれば, 包含写像とレトラクトの合成とみなせる  $q_f$  が  $\pi_k(M)$  と  $\pi_k(W_f)$  の同型を誘導することもわかる.

## STEP 3 $W_f$ の単純ホモトピー型と $M$ のホモトピー群

STEP 1, STEP 2 より  $\pi_1(M) \cong \pi_1(W) \cong \pi_1(W_f) \cong \{0\}$  である.  $l+1$  個以上の端点を有する, 連結な, ループを有さないグラフを  $L$ ,  $L$  の  $l$  個の端点からなる集合を  $P$  とする.  $W_f$  は,  $l$  個の  $D^n$  の非交和と  $S^{n-1} \times L$  を,  $S^{n-1} \times P$  と  $l$  個の  $D^n$  の非交和の境界を同一視して貼りあわせて得られるものと単純ホモトピー同値であることがわかる.  $W_f$  は  $l-1$  個の  $S^n$  のブーケに単純ホモトピー同値である. 命題 3 が示せた.

命題 2 のホモトピー群に関する結果を示す. STEP 2 の同型と  $W_f$  が  $l-1$  個の  $S^n$  のブーケに単純ホモトピー同値であることから  $m > 2n$  の場合は明らかである.  $m = 2n$  の場合のみ示す.  $\pi_k(M) \cong \pi_k(W) \cong \pi_k(W_f) \cong \{0\}$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) は明らかで,  $H_k(M, \mathbb{Z}) \cong H_k(W, \mathbb{Z}) \cong H_k(W_f, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), さらに Poincare duality から  $H_k(M, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$  ( $n+1 \leq k \leq 2n-1$ ) が従う. いま  $b_k(X)$  で位相空間  $X$  の  $k$  次 Betti 数を表すことにする.  $W$  は  $l-1$  個の  $S^n$  のブーケに単純ホモトピー同値である. ゆえに 2 個の  $W$  を境界  $M$  で貼りあわせて得られる  $2n+1$  次元閉多様体のオイラー数は  $2(b_0(W) + (-1)^n b_n(W)) - (b_0(M) + (-1)^n b_n(M) + b_{2n}(M)) = 2 + 2 \times (-1)^n (l-1) - 2 - (-1)^n b_n(M)$  と表せる. さらに多様体の次元は奇数なのでオイラー数は 0 である. よって  $b_n(M) = 2(l-1)$ . 以上より  $m = 2n$  の場合  $\pi_n(M) \cong H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2(l-1)}$

が分かる. □

前の例 1 の例たちは (最初の例のみ次元対に関する条件が必要だが) 全て命題の仮定を満たしている.

証明法から分かることを一つ補足する. 命題での仮定のうち  $f(M)$  が  $D^n$  と  $C^\infty$  級微分同相であるという部分を除く. すると,  $f(M)$  は  $S^{n-1} \times [0, 1]$  と  $C^\infty$  級微分同相である可能性がある. STEP 2, STEP 3 より  $M$  と  $W_f$  が単連結となるから,  $n = 2$  のときこれは起こりえないことが従う.  $f(M)$  が  $S^{n-1} \times [0, 1]$  と  $C^\infty$  級微分同相であるとき STEP 2, STEP 3 より  $\pi_{n-1}(M) \cong \pi_{n-1}(W_f) \cong \mathbb{Z}$  が従う.  $\pi_{n-1}(M) \cong \pi_{n-1}(W_f) \cong \{0\}$  ならば  $f(M)$  は  $D^n$  と  $C^\infty$  級微分同相であることも分かる. 最後に  $\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f) \cong \{0\}$  ( $1 < k < n-1$ ) も成り立つ.

#### § 4. 同心円形折り目写像の定義域多様体の位相型, 微分同相型

本 § では, 同心円折り目写像を使って定義域多様体の位相型や微分同相型を取り出す研究を紹介する. 以下折り目写像のクラスを導入する.

$\mathcal{F}$ ; 良い折り目写像全体

$\mathcal{R}$ ; 同心円形折り目写像全体

$\mathcal{R}_a$ ; 命題 2 の三条件を満たす同心円形折り目写像全体

$\mathcal{R}_s$ ;  $\mathcal{R}_a$  の写像で, 正則値の逆像が標準的球面の非交和であるもの全体

さらに同心円形折り目写像について条件を定義する.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  をある同心円形折り目写像の標準形とする.  $E$  を  $f$  の真核  $D^{n-\frac{1}{2}}$  の補集合の閉包の逆像,  $L$  を軸とする.  $\pi_P(x) := \frac{1}{2} \frac{x}{|x|}$  ( $\pi_P: f(E) \rightarrow \partial D^{n-\frac{1}{2}}$ ) について  $\pi_P \circ f|_E$  は  $C^\infty$  級沈め込みであり,  $E$  には  $\partial D^{n-\frac{1}{2}}$  上の  $C^\infty$  級  $f^{-1}(L)$ -束の構造が入る (Ehresmann の定理 [2]).  $\pi_P \circ f|_{\partial E}$  は  $f|_{\partial E}: \partial E \rightarrow \partial D^{n-\frac{1}{2}}$  に一致する.

$f$  が標準形でなくとも自然に  $C^\infty$  級束の構造を入れられる.

**定義 4.** 前の束が, 構造群をファイバーの  $C^\infty$  級微分同相写像全体として考えたとき自明束になるとする. このとき  $f$  は  $C^\infty$  自明であるという.

**定義 5.**  $\mathcal{R}_a$  の写像  $f$  が単調であるとは, 真核の各点の逆像の連結成分数が  $S(f)$  の連結成分数と一致することである.

次の定理 1 の証明の中でも具体的に構成を行うが,  $C^\infty$  自明な同心円形折り目写像は容易に構成できる. また, 例えば例 1 の Kobayashi-Saeki の例以外の例は単調である.

**定理 1.**  $m$  次元連結閉  $C^\infty$  級多様体  $M^m$  上に,  $C^\infty$  自明な  $\mathcal{R}_a$  に属する写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m > n \geq 2$ ) で真核の各点の逆像が 2 個の成分からなる単調なものが存在する必要十分条件は,  $M$  が  $S^n$  上の almost-sphere をファイバーとする  $C^\infty$  級束であることである.

定理 1 の証明.  $\Sigma$  を  $m - n$  次元 almost sphere とする. ある  $C^\infty$  級微分同相写像  $\Phi : S^{n-1} \times (\Sigma \sqcup \Sigma) \rightarrow \partial D^n \times (\Sigma \sqcup \Sigma)$  で  $S^{n-1}$  上の自明な  $C^\infty$  級  $(\Sigma \sqcup \Sigma)$ -束の同型であって底空間  $S^{n-1}$  の  $C^\infty$  級微分同相写像を誘導するようなものによって,  $S^n$  上の  $C^\infty$  級  $\Sigma$  束の構造を持つ  $m$  次元多様体  $M$  は  $(D^n \times (\Sigma \sqcup \Sigma)) \cup_{\Phi} (S^{n-1} \times [0, 1] \times \Sigma)$  とみなすことができる.

$\tilde{f} : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow [a, +\infty)$  を境界  $\Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\})$  上で最小値  $a$  をとり, 特異点が丁度 2 個で  $\Sigma \times [0, 1]$  の内部にありそれぞれ指数 0, 1 で, さらに 2 つの特異点で値が異なるような Morse 関数とする.  $p : \Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times D^n \rightarrow D^n$  を射影,  $\Phi : \Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n) \rightarrow \Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \partial D^n$  を  $S^{n-1}$  上の自明な  $C^\infty$  級  $(\Sigma \sqcup \Sigma)$ -束の同型で  $C^\infty$  級微分同相写像  $\phi : S^{n-1} \rightarrow \partial D^n$  を誘導するものとして

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n) & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \partial D^n \\ \downarrow \tilde{f}|_{\Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \text{id}_{\partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n)}} & & \downarrow p|_{\Sigma \times (\{0\} \sqcup \{1\}) \times \partial D^n} \\ \{a\} \times \partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n) & \xrightarrow{\phi} & \partial D^n \end{array}$$

が成り立つとして良い. 以上から  $p$  に  $\tilde{f} \times \text{id}_{\partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n)}$  を  $\Phi, \phi$  で貼りあわせて  $M$  上に単調で  $C^\infty$  自明な同心円形折り目写像  $p \cup_{\Phi, \phi} (\tilde{f} \times \text{id}_{\partial(\mathbb{R}^n - \text{Int} D^n)}) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が構成された.

連結閉  $C^\infty$  級多様体  $M^m$  上に  $\mathbb{R}^n$  への条件を満たす写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  があるとする.  $M$  を真核の逆像とその補集合の閉包に分ける. 真核の逆像は,  $D^n$  上の 2 つの  $C^\infty$  級微分同相な  $m - n$  次元の almost-sphere  $\Sigma$  の非交和をファイバーとする  $C^\infty$  級束である. 仮定より  $C^\infty$  自明である. 以上から  $S^{n-1}$  上の自明な  $C^\infty$  級  $(\Sigma \sqcup \Sigma)$ -束の間の同型であり底空間  $S^{n-1}$  の  $C^\infty$  級微分同相写像を誘導するような  $C^\infty$  級微分同相写像  $\Phi : S^{n-1} \times (\Sigma \sqcup \Sigma) \rightarrow \partial D^n \times (\Sigma \sqcup \Sigma)$  によって,  $M$  は  $(D^n \times (\Sigma \sqcup \Sigma)) \cup_{\Phi} (S^{n-1} \times [0, 1] \times \Sigma)$  とみなせる.  $M$  は,  $S^n$  上の almost-sphere をファイバーとする  $C^\infty$  級束の構造を有することが従う. 以上で定理が示された.  $\square$

**定理 2.**  $M_1, M_2$  を向きづけられた  $m$  次元単連結閉  $C^\infty$  級多様体とする.  $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $\mathcal{R}_s$  に属する同心円形折り目写像とし,  $n \geq 2, m \geq 2n$  とする. すると連結和  $M := M_1 \sharp M_2$  にも  $\mathcal{R}_s$  に属する同心円形折り目写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在する.  $f_1, f_2$  が単調ならば  $f$  も単調にできる.

証明においては, [13] の, 次元 4 以上の単連結  $C^\infty$  級多様体から平面への安定写像で比較的扱いやすいものの定義域の微分同相型の変えない変形 (R-operation と命名されている) の根底にある考えを適用できるということが鍵となる. R-operation は, 定義域多様体の微分同相型を保ったまま特異値集合の一部分を変化させる操作である.

**注意 1.** 正確には, R-operation は安定写像そのものではなく安定写像から定まる Reeb space への商写像に対し定義されている. この商写像に対する操作が自然に平面へ

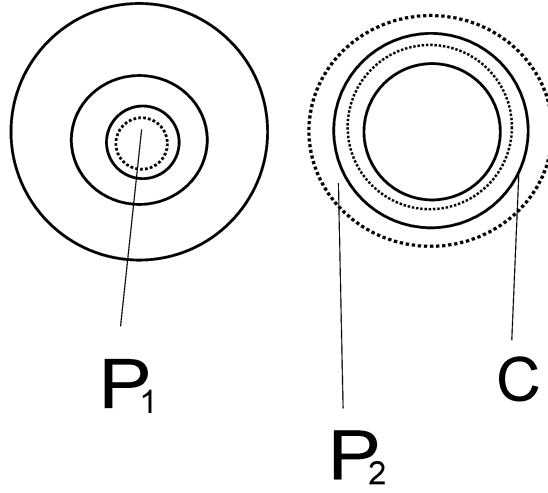


図 4.  $P_1, P_2, C \subset \mathbb{R}^n$  ( $P_1$  は点線の内部,  $P_2$  は点線で囲まれた部分.  $P_2$  は  $C$  の閉管状近傍でもある.)

の安定写像への操作とみなされる.

R-operation の逆とみなせる手法を応用して定理を示す.

定理 2 の証明.  $P_1$  を  $f_1$  の真核とする.  $P_2$  は  $f_2(S(f_2))$  の連結成分 ( $S^{n-1}$  に  $C^\infty$  級微分同相) で  $f_2(M_2)$  の境界であるようなもの ( $C$  とする) の十分小さな  $C^\infty$  閉管状近傍とする (図 4).

$V_1$  を  $f_1^{-1}(P_1)$  の連結成分とする.  $f_1|_{V_1} : V_1 \rightarrow P_1$  ( $f_1|_{\partial V_1} : \partial V_1 \rightarrow \partial P_1$ ) は  $D^n$  ( $\partial D^n = S^{n-1}$ ) 上の自明な  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$ -束を与える.  $V_2$  を  $f_2^{-1}(P_2)$  とする.  $\pi_{n-1}(M_2) \cong \{0\}$ ,  $2(n-1) + 2 \leq m$  より,  $V_2$  は  $C$  の  $C^\infty$  級閉管状近傍で  $S^{n-1}$  上の自明な線形  $D^{m-n+1}$ -束の構造をもち ( $f_2|_{\partial V_2}$  がこの束  $V_2$  の部分束の構造を与える.  $V_2$  の束構造について命題 2, 3 の証明の STEP 1 や [21] 他 [13] 参照.), かつ  $C, V_2$  は  $M_2$  内に埋め込まれた  $D^m$  の内部にある.  $D^m$  から  $V_2$  の内部を取り除いた  $D^m - \text{Int}V_2$  は, 自然な  $D^n$  上の自明な  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$  束の構造をもつものの内部から  $\text{Int}D^m$  を除いたものとなる. もとの  $D^m$  は,  $V_2$  と  $D^m - \text{Int}V_2$  が,  $S^{n-1}$  上の自明な  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$  束の構造を有する境界の間の底空間の  $C^\infty$  級微分同相写像を誘導する束同値により境界で同一視されて得られているとみなせる.

$S^{n-1}$  上の自明な  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$ -束間の束同値とみなされ底空間の  $C^\infty$  級微分同相を誘導するような  $C^\infty$  級微分同相写像  $\Phi : \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  と,  $C^\infty$  級微分同相写像  $\Psi : \partial D^m \rightarrow \partial D^m$  で  $D^m$  上の  $C^\infty$  級微分同相写像 ( $M_2 - \text{Int}(M_2 - \text{Int}D^m)$  から  $M_1 - \text{Int}(M_1 - \text{Int}D^m)$  への  $C^\infty$  級微分同相写像) に拡張するものをうまくとると, 次が成り立つことがわかる (ただし  $\cong$  は, 二つの多様体が  $C^\infty$  級微分同相であることを示す).

$$\begin{aligned}
& (M_1 - \text{Int}V_1) \bigcup_{\Phi} (M_2 - \text{Int}V_2) \\
& \cong (M_1 - \text{Int}V_1) \bigcup_{\Phi} ((D^m - \text{Int}V_2) \bigcup (M_2 - \text{Int}D^m)) \\
& \cong (M_1 - \text{Int}V_1) \bigcup_{\Phi} ((S^m - (\text{Int}V_2 \sqcup \text{Int}D^m)) \bigcup_{\Psi} (M_2 - \text{Int}D^m)) \\
& \cong (M_1 - \text{Int}D^m) \bigcup_{\Psi} (M_2 - \text{Int}D^m)
\end{aligned}$$

$M_1$  と  $M_2$  の連結和  $M$  ができ,  $M$  上に  $\mathcal{R}_s$  に属する  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が自然に構成できることが分かる. そして  $f_1$  と  $f_2$  が単調ならば  $f$  も単調に出来ることも従う.  $\square$

定理 1 と 定理 2 から次が従う.

**定理 3.**  $M^m$  を向きづけられた  $m$  次元連結閉  $C^\infty$  級多様体とする.

$M$  が  $S^n$  ( $n \geq 2, m \geq 2n$ ) 上の向きづけられた  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$ -束の連結和ならば,  $M$  上に  $\mathcal{R}_s$  に属する単調な同心円形折り目写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在する.

## § 5. 数え上げ不変量—特異点集合の連結成分数—

Morse 不等式が示すように, Morse 関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  の固定された指数の特異点の数や全ての特異点の総数は, 多様体  $M$  のトポロジーと深く関係する. また, Reeb の定理 [19] や [26] の結果が示すように, 多様体  $M$  上の Morse 関数全体の中でのそれらの数の最小値も  $M$  のトポロジーに関係する.

折り目写像の特異点集合は, 値域の次元より 1 次元低い定義域多様体内の部分多様体である. Morse 不等式や Euler 数公式の高次元化として, 折り目写像の特異点集合の決められた指数の特異点からなるまたは全部の連結成分の個数が多様体の情報とどう関係しているかということを考える. 関連して折り目写像の存在問題を振り返る.

まず, Whitney, Thom, Levine ([28], [27], [14]) の平面への良い折り目写像の研究がある. 平面への安定写像は稠密に存在し, 良い折り目写像は Euler 数が偶数のときまたそのときに限り存在することが分かっている. また [15] では, Morse 理論における Euler 数公式が平面への安定写像へ拡張されている. その後 Eliashberg により, [3], [4] で値域が (次元が 2 以上の) 一般の多様体の場合の折り目写像の存在問題が考察され, 現在に至るまで重要問題として盛んに研究されている.

$\mathcal{A}$  を折り目写像のクラスとする.  $M$  を  $\mathcal{A}$  に属する  $\mathbb{R}^n$  への良い折り目写像を許容するような多様体とすると, 定められた指数の特異点集合の連結成分数の最小値を考える.  $\mathcal{A}$  に属する  $\mathbb{R}^n$  への折り目写像全体の中で, 指数  $k$  の特異点集合の連結成分数の最小値を  $\mathcal{A}(M, n, k)$  と書く. また,  $\mathcal{A}$  に属する  $\mathbb{R}^n$  への折り目写像全体の中で, 特異点集合の連結成分数の最小値を  $\mathcal{A}(M, n)$  とする. これについて, 以下のような問題が考えられる.

**例 2.**

1.  $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{F}$  つまり良い折り目写像全体とする. このとき  $\mathcal{A}(M, n, k)$  を決定することを考える. Eliashberg の存在問題 ([3], [4]) の延長であると捉えられる. ここで詳しくは説明しないが先行研究結果から答えがすぐ出るものもある.
2.  $\mathcal{A} := \mathcal{R}$  つまり  $\mathcal{A}$  として同心円形折り目写像全体をとる. このとき  $\mathcal{A}(M, n, k)$  を決定することを考える. 後で, 主に  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{R}_a$  または  $\mathcal{R}_s$  の場合つまり  $\mathcal{A}$  として 命題 2 と 命題 3 の仮定を満たすもの全体をとった場合について考察する.
3.  $\mathcal{A}$  として良い折り目写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  で,  $f(M)$  が  $D^n$  に  $C^\infty$  級微分同相, かつ  $f$  の任意の  $f(M)$  に含まれる正則値  $p$  で  $f^{-1}(p)$  が  $S^2$  または  $T^2$  であるもの全体をとる.  $M$  が単連結 4 次元閉  $C^\infty$  級多様体のとき,  $\mathcal{A}(M, 2)$  を決定することを考える.  
この問題について, [9], [13] において Levine の Euler 数公式, R-operation を用いたアプローチで解答が出されている. 原論文では, 一般次元での定式化はなく, 単連結 4 次元多様体上でのみ定式化されている.

本稿では  $\mathcal{R}_a$  や  $\mathcal{R}_s$  に関して分かることを紹介する. 命題 2, 命題 3 とこれらの証明法から次が容易にわかる.

**定理 4.**  $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{R}_a$  または  $\mathcal{R}_s$  とする.  $m$  次元単連結閉  $C^\infty$  級多様体  $M^m$  上に  $\mathcal{A}$  に属する写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  があるとし,  $n \geq 2, m \geq 2n$  とする.  $b_n(M) = l_1, \mathcal{A}(M, n, 0) = l_2$  とすると次が成立する.

1.  $m > 2n$  ならば  $\mathcal{A}(M, n, 1) = l_1 + l_2 - 1$ .  $m = 2n$  ならば  $l_1$  は偶数で  $\mathcal{A}(M, n, 1) = \frac{l_1}{2} + l_2 - 1$  である.
2.  $2 \leq k \leq \frac{m-n+1}{2}$  であれば  $\mathcal{F}(M, n, k) = \mathcal{R}(M, n, k) = \mathcal{A}(M, n, k) = 0$  である.

証明. 二つ目は自明なので最初のみ示す.

$m > 2n$  とする. 軸の逆像は  $m - n + 1$  次元標準的球面から互いに交わらない標準的球体  $l_1 + 1$  個の内部の非交和をとり除いたものに PL 同相で,  $f$  の軸の逆像への制限は, 特異点が内部にあり特異点の指数が 0 か 1 か  $m - n$  か  $m - n + 1$  で境界で最小値をとる Morse 関数とみなせる.  $l_2$  は指数 0 または  $m - n + 1$  の特異点の最小個数に一致する. 指数 1 または  $m - n$  の特異点の個数は最小  $l_1 + l_2 - 1$  と計算され,  $f$  の指数 1 の特異点集合の連結成分の最小個数に一致する.  $m = 2n$  とする. 軸の逆像は  $m - n + 1$  次元標準的球面から互いに交わらない標準的球体  $\frac{l_1}{2} + 1$  個の内部の非交和をとり除いたものに PL 同相である. 後は同様に証明できる.  $\square$

定理 3 と定理 4 から次が従う.

**系 1.** 定理 4 で,  $M$  上に  $\mathcal{R}_s$  に属する  $\mathbb{R}^n$  への写像が存在しない, または存在して  $\mathcal{R}_s(M, n) > l + 1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) であれば,  $M$  は  $S^n$  上の有向  $C^\infty$  級  $S^{m-n}$  束  $l$  個の連結和ではない.

系 1 の仮定を満たす,  $\mathcal{R}_s$  に属する  $\mathbb{R}^n$  への写像が存在するような多様体の例をさがすのは難しいようである.

$m < 2n$  の場合にわかる面白い例を紹介する. [16] 等によれば, いくつかの 7 次元の  $C^\infty$  級ホモトピー球面は  $S^4$  上の線形  $S^3$ -束の構造を有する. この中には, 標準的 7 次元球面  $S^7$  の他に  $S^7$  と  $C^\infty$  級微分同相でないものも含まれる. 定理 1 よりこれらの上には特異点集合が 2 個の連結成分からなる単調な  $\mathcal{R}_s$  に属する  $\mathbb{R}^4$  への写像が構成できる. 次の事実に着目する.

**命題 4** ([21]).  $m$  次元  $C^\infty$  級ホモトピー球面  $M^m$  から  $\mathbb{R}^n$  への良い special generic 写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在し,  $m > n \geq 1$  ならば Reeb space  $W_f$  は可縮である. 逆に良い special generic 写像  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  があり Reeb space  $W_f$  が可縮ならば  $M$  はホモトピー球面であり, さらに  $1 \leq m - n \leq 3$  ならば  $M^m$  は  $S^m$  と  $C^\infty$  級微分同相である.

[21] の議論に関連して,  $m \geq n \geq 2$  のとき,  $S^m$  は  $\mathbb{R}^n$  への special generic 写像を許容し, さらに特異点集合が  $S^{n-1}$  に  $C^\infty$  級微分同相であるような同心円形折り目写像も許容することつまり例 1 の最初の例のような写像を許容することも補足する.

この命題は, 多様体の微分構造と special generic 写像の存在非存在の深い関係を示す具体的結果の一つであるともいえる. 定理 1 と命題 4 から次が従う.

**定理 5.** 7 次元閉  $C^\infty$  級多様体  $M^7$  が  $S^7$  ならば,  $\mathcal{R}_s(M, 4) = 1$  である.  $M$  が  $S^7$  と  $C^\infty$  級微分同相ではないが  $S^7$  と同相でかつ  $S^4$  上の  $C^\infty$  級  $S^3$ -束の構造を有せば,  $\mathcal{R}_s(M, 4) = 2$  である.

この命題は, 次を具体的に示している.

1.  $C^\infty$  級ホモトピー球面上に常に折り目写像が存在することが [3], [4] 等の研究から分かっていたが, ある種の球面にさほど複雑でない折り目写像が具体的に構成できることが分かった.
2. 決められたクラス内で同心円形折り目写像の連結成分数を減らすための障害が多様体の微分構造と関わっていることを, 具体的に示す例が得られた.

最近, 著者はここで述べたような束構造を有さない 7 次元  $C^\infty$  級ホモトピー球面にも  $\mathcal{R}_s$  に属する  $\mathbb{R}^4$  への写像を構成できたが, 特異点集合の最小の連結成分数を完全に決定するのは今後の課題である. これについては現在論文準備中である.

## References

- [1] O. Burlet, G. de Rham, *Sur certaines applications generiques d'une variete close a 3 dimensions dans le plan*, Enseign.Math., 20 (1974). 275–292.
- [2] C. Ehresmann, *Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29–55.

- [3] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
- [4] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
- [5] Y. K. S. Furuya, P. Porto, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. 35 (1990), 41–52.
- [6] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics(14), Springer-Verlag(1974).
- [7] J. T. Hiratuka, *A fatorizacao de Stein e o numero de singularidades de aplicacoes estaveis* (in Portuguese), PhD Thesis, University of Sao Paulo, 2001.
- [8] N. Kitazawa, *Fold maps with concentric singular value sets*, preprint.
- [9] M. Kobayashi, *Simplifying certain stable mappings from simply connected 4-manifolds into the plane*, Tokyo J. Math. 15 (1992), 327–349.
- [10] M. Kobayashi, *Bubbling surgery on a smooth map*, preprint.
- [11] M. Kobayashi, *Characterisations of Pao's 4-manifolds by their stable maps to  $S^2$  and  $\mathbb{R}^2$* , preprint.
- [12] M. Kobayashi, *Uses of bubbling surgeries for manifold understandings by means of stable maps*, preprint.
- [13] M. Kobayashi, O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans.Amer.Math.Soc.348 (1996), 2607–2636.
- [14] H. I. Levine, *Mappings of Manifolds into the Plane*, American Journal of Mathematics, Vol.88, No.2 (Apr.1966), 357–365.
- [15] H. I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology 3, suppl. 2 (1965), 263–296.
- [16] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics 64 (2) (1956), 399–405.
- [17] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963.5.1).
- [18] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.
- [19] G. Reeb, *Sur les points singuliers d ' une forme de Pfaff completement integrable ou d ' une fonction numerique*, -C.R.A.S. Paris 222, 1946, pp.847–849.
- [20] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J.Math.Soc.Japan Volume 44, Number 3(1992), 551–566.
- [21] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl.49(1993), 265–293.
- [22] O. Saeki, K. Sakuma, *On special generic maps into  $\mathbb{R}^3$* , Pacific J.Math.184 (1998), 175–193.
- [23] O. Saeki, K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math.Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
- [24] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected  $2n$ -manifolds into  $\mathbb{R}^3$* , Topology Appl., 50 (1993), 249–261.
- [25] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. of Math. Volume 17, Number 1 (1994), 21–32.
- [26] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer.J.Math 84 (1962), 387–399.
- [27] R. Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56), 43–87.
- [28] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., 62 (1955), 374–410.

