

Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k, \alpha)$ in $\mathbb{C}^n$

金沢大・理 児玉秋雄 (Akio Kodama)

[1] Introduction.

$\mathbb{C}^n$ の領域 D に対して, $\text{Aut}(D)$ をその正則自己同型群とする. 以下, D の境界点 p に対して,

(*) $\begin{cases} D \text{ のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 } \{k_j\} \text{ と} \\ \text{Aut}(D) \text{ の列 } \{g_j\} \text{ が存在して, } g_j(k_j) \rightarrow p \text{ である.} \end{cases}$

が成立するとき, (D, p) に対して (*) が成立する, と言う.

$\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域のカテゴリーの中での, 正則自己同型群による, n 次元開球 B^n の特徴付けに関する B. Wong [8] の結果の拡張として, J. P. Rosay は次のことを示した:

定理 R [7]. $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域 D に対して, D の強擬凸境界点 p が存在し, かつ (D, p) に対して (*) が成立すると仮定する. このとき, D は B^n に双正則同値である.

この結果を見ていると, 自然に次の問題が起こる:

問題. 上の定理において, 点 p が弱擬凸境界点である, すなわち, 点 p において D の局所定義関数の Levi 形式が

退化するときには、領域 D に近していかなることがあるだろうか？

最近、この問題に関連して、R. E. Greene - S. G. Krantz [2] は弱擬凸領域

$$E(m) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 + |z_n|^{2m} < 1 \}$$

($1 < m \in \mathbb{N}$) に対して、次のような特徴付けを得た。彼らの結果を述べる前に、点 $p = (1, 0, \dots, 0)$ は $E(m)$ の弱擬凸境界点であることに注意しておこう。

定理 G-K [2]. D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で、次の条件をみたすものとする：

- (1) D の境界 ∂D は $\mathbb{C}^{n+1}$ -smooth である。
- (2) $p = (1, 0, \dots, 0) \in \partial D$ である。
- (3) $\mathbb{C}^n$ 内で、 p のある開近傍 U が存在し $D \cap U = E(m) \cap U$ となる。
- (4) (D, p) に対して (*) が成立する。

このとき、 D は $E(m)$ に双正則同値である。

彼らの定理の証明方法は、Kohn にはじまる $\bar{\partial}$ -方程式の理論を用いるもので、非常に複雑である。従って、 ∂D 全体での $\mathbb{C}^{n+1}$ -smoothness の仮定は落せない。また、Rosay タイプの結果を示すには、問題になっている境界点 p のある開近傍内

で ∂D が C^2 -smooth であればよいと思われる。実際、
本稿の第一目的はこの点を明らかにすることである。

自然数 k ($1 \leq k \leq n$) と実数 $\alpha > 0$ に対して

$$\rho(k, \alpha; z) = -1 + \sum_{i=1}^k |z_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2 \right)^\alpha ;$$

$$E(k, \alpha) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(k, \alpha; z) < 0 \}$$

と置く。従って、 $E(m) = E(n-1, m)$ であり、 $k=n$ 又は
 $\alpha=1$ のとき $E(k, \alpha) = B^n$ である。ここで一つ注意し
ておきたいことは、 $\partial E(k, \alpha)$ は点 $p = (1, 0, \dots, 0) \in \partial E(k, \alpha)$
において、一般的には smooth でないことである。さて、以
上の記号のもとで、Greene-Krantz の結果は次のように一般
化される [5] :

定理 I D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすもの
とする :

- (1) $p = (1, 0, \dots, 0) \in \partial D$ である。
- (2) $\mathbb{C}^n$ 内で、点 p のある開近傍 U が存在し $D \cap U = E(k, \alpha) \cap U$ となる。
- (3) (D, p) に対して (*) が成立する。

このとき、 D は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である。

正則写像族に対する正規族の理論を用いることにより、 $\bar{\partial}$ -
方程式を用いることなく、定理 I の証明が出来る。

さて、定理 I の (2) は非常にきつい条件であるので、これを落したいのであるが目下のところ、まだ完全には成功していない。しかし、収束 $\mathcal{G}_\mu(k_\mu) \rightarrow p$ にある種の条件を付けると、次のことがわかる。(R-lim の定義は [3] を見て下さい。)

定理 II. D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすものとする:

(1) $p = (1, 0, \dots, 0) \in \partial D$ である。

(2) p の開近傍 U と、連続関数 $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$D \cap U = \{ z \in U \mid \rho(z) < 0 \};$$

$$\rho(z) = \rho(k, \alpha; z) + R(z);$$

$$R(z) = o\left(|z_1 - 1|^2 + \sum_{i=2}^k |z_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2\right)^\alpha\right)$$

($z \rightarrow p$), をみたすものが存在する。

(3) D のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 $\{k_\mu\}$ と $\text{Aut}(D)$ 内の列 $\{\mathcal{G}_\mu\}$ が存在して、 $R\text{-}\lim \mathcal{G}_\mu(k_\mu) = p$ である。

このとき、 D は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である。

p が強擬凸境界点である場合を考えれば、点 p のまわりでの D の局所定義関数 $\rho(z)$ が条件 (2) にある形をしていることが最も合理的であることがわかる。また、条件 (3) は model space $E(k, \alpha)$ に対しては常に成り立つ条件であることがわかる。

最後に, B. L. Fridman [1] の結果が, 我々の model space $E(k, \alpha)$ に対しても成立することを示したい. すなわち, 複素多様体 M, D に対して, M が D の双正則像によって exhaust される とは, 任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対して, D から M の中への双正則写像 $f_K: D \rightarrow M$ で $K \subset f_K(D)$ となるものが存在すること, と定義するとき次のことが成り立つ:

定理 III. n 次元双曲型多様体 M が $E(k, \alpha)$ の双正則像によって exhaust されると仮定する. このとき, M は $E(k, \alpha)$ と双正則同値であるか, または M は開球 B^n に双正則同値であるかのいずれかが成立する.

Fridman は上の定理において, $E(k, \alpha)$ のかわりに $\mathbb{C}^n$ 内の C^3 -smooth 境界をもつ強擬凸有界領域 D に対して同様の結果を示している.

[2] $E(k, \alpha)$ の構造.

定理の証明に必要な $E(k, \alpha)$ の構造に関する結果をまとめておこう.

(2.1) $E(k, \alpha)$ は S. Kobayashi [4] の意味で完備双曲型である有界ライnhルト領域である. 従って, $E(k, \alpha)$ は H. Wu [9] の意味で taubt である [6].

(2.2) 点 $\xi = (0, \dots, 0, 1) \in \partial E(k, \alpha)$ の近くで $\partial E(k, \alpha)$ は実解析的であり, かつ ξ は $E(k, \alpha)$ の強擬凸境界点である.

(2.3) $\text{Aut}(E(k, \alpha))$ は次の形の変換から成る連結リー群である: $z' = (z_1, \dots, z_k)$, $z'' = (z_{k+1}, \dots, z_n)$ とおくと

$$(z', z'') \mapsto \left(\frac{Az' + b}{Cz' + d}, \frac{L \cdot z''}{(Cz' + d)^{1/2\alpha}} \right), \quad \begin{pmatrix} A & b \\ C & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(k, 1), \\ L \in \text{L}(n-k).$$

(2.4) 任意の点列 $\{p^\mu\} \subset E(k, \alpha)$, $p^\mu \rightarrow p = (1, 0, \dots, 0) \in \partial E(k, \alpha)$ に対して, $\text{Aut}(E(k, \alpha))$ 内の列 $\{\psi_\mu\}$ で $\psi_\mu(p^\mu) = (0, \dots, 0, t_\mu)$, $0 \leq t_\mu < 1$ となるものが存在する.

[3] 定理の証明の概略.

定理 I の証明に定理 II を用いるので, 最初に定理 II の証明を与える. そのために, まず $R\text{-lim}$ の定義をしよう. $D, \mathcal{F}$ を定理 II における $\mathbb{C}^n$ の有界領域, および点 $p = (1, 0, \dots, 0)$ のまわりでの D の局所定義関数とすると,

$$\begin{aligned} \rho(z) = & 2\text{Re}(z_1 - 1) + |z_1 - 1|^2 + \sum_{i=2}^k |z_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2 \right)^\alpha \\ & + o\left(|z_1 - 1|^2 + \sum_{i=2}^k |z_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2 \right)^\alpha\right) \end{aligned}$$

と変形できる. これより, 定数 A, B を $0 < A < 1 < B$ と

任意に定めるとき, 必要ならば Γ を中心 p , 半径が十分小さな開球にとりなおして, Γ 上において

$$(3.1) \quad 2\operatorname{Re}(z_1-1) + A[|z_1-1|^2 + \sum_{i=2}^k |z_i|^2 + (\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2)^\alpha]$$

$$\leq \rho(z)$$

$$\leq 2\operatorname{Re}(z_1-1) + B[|z_1-1|^2 + \sum_{i=2}^k |z_i|^2 + (\sum_{j=k+1}^n |z_j|^2)^\alpha]$$

が成立すると仮定してよい。従って, 任意の点列 $\{p^\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset D \cap \Gamma$, $p^\nu \rightarrow p$ をとるとき, 各 $\nu=1, 2, \dots$ に対して,

$$\zeta(p^\nu) = (\zeta_1(p^\nu), \dots, \zeta_n(p^\nu)) \in \partial D \cap \Gamma, \quad \lambda(p^\nu) < 0$$

が存在して,

$$p^\nu = \zeta(p^\nu) + \lambda(p^\nu)N, \quad N = (1, 0, \dots, 0)$$

と書ける。この記号のもとで

定義. 点列 $\{\operatorname{Re}(\zeta_1(p^\nu)-1)/\lambda(p^\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ が有界数列であるとき, $\underline{R\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} p^\nu = p}$ と記す。

点 $p = (1, 0, \dots, 0)$ において ∂D が C^1 -smooth の場合には, 通常の意味で $\{p^\nu\}$ が p に non-tangential に収束すれば $R\text{-}\lim p^\nu = p$ であることがわかる。

3.1. 定理IIの証明の概略: 座標変換 $(u_1, \dots, u_n) = (z_1-1, z_2, \dots, z_n)$ を行い, $u' = (u_1, \dots, u_k)$, $u'' =$

$(u_{k+1}, \dots, u_n)$ とおく. (3.1)より, Γ 上において,

$$(3.2) \quad 2\operatorname{Re} u_1 + A[|u'|^2 + |u''|^{2\alpha}] \\ \leq S(u) \leq 2\operatorname{Re} u_1 + B[|u'|^2 + |u''|^{2\alpha}],$$

かつ, Γ は原点 0 中心の十分小さい半径をもつ開球であるとしてよい. さて, $\psi_p(u) = \exp u_1$ は D の点 p のまわりでの local peaking function であることがわかり, その結果, $\{\varphi_\mu\}$ は定数写像 $C_p: u \mapsto p, u \in D$, に一様収束すると仮定してよい. さらに, すべての $\mu=1, 2, \dots$ に対し

$$p^\mu = \varphi_\mu(k_\mu) \in D \cap \Gamma, \quad R\text{-}\lim \varphi_\mu(k_\mu) = p$$

としてよい. 従って, $N = (1, 0, \dots, 0)$ に対して,

$$p^\mu = \xi^\mu + \lambda^\mu N, \quad \xi^\mu = (\xi_1^\mu, \dots, \xi_n^\mu) \in \partial D \cap \Gamma, \quad \lambda^\mu < 0$$

とおくとき,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \xi_1^\mu / |\lambda^\mu| = d_0 \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定してよい. 各 $\mu=1, 2, \dots$ に対して

$$r_\mu = |\lambda^\mu|^{1/2}, \quad s_\mu = |\lambda^\mu|^{1/2\alpha}$$

とおく. $d_0 = 0$ と $d_0 \neq 0$ の二通りの場合があるが, $d_0 = 0$ の場合のみ証明する. ($d_0 \neq 0$ の場合も適当な座標変換を行えば同様に出来る.) このとき, (3.2)より

$$(\operatorname{Re} \xi_1^\mu / |\lambda^\mu|, \xi_i^\mu / r_\mu, \xi_j^\mu / s_\mu, R(\xi^\mu) / |\lambda^\mu|) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

$(1 \leq i \leq k < j \leq n)$ がある。さて、 D を相対コンパクトな部分領域 D_j の単調増大列で覆っておく：

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset \dots \supset D_{j+1} \supset D_j \supset \dots \supset D_1 \supset \overline{\{k_\nu \mid \nu=1, 2, \dots\}}.$$

任意の j を固定するとき、十分大きな番号 $\nu(j)$ が存在して、

$$\mathcal{G}_\nu(D_j) \subset D \cap U, \quad \nu \geq \nu(j)$$

となる。そこで正則写像列 $h_\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $L_\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$F^\nu: D_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($\nu \geq \nu(j)$) を次のように定義する：

$$h_\nu(u) = (u_1 - \zeta_1^\nu, \dots, u_n - \zeta_n^\nu),$$

$$L_\nu(w) = (-w_1/\lambda^\nu, w_2/r_\nu, \dots, w_k/r_\nu, w_{k+1}/s_\nu, \dots, w_n/s_\nu),$$

$$F^\nu(u) = L_\nu \circ h_\nu \circ \mathcal{G}_\nu(u), \quad u \in D_j.$$

このとき、 $\{F^\nu\}$ は D_j から $\mathbb{C}^n$ 内の領域

$$W_\nu = (L_\nu \circ h_\nu)(D \cap U)$$

$$= \{w \in \mathbb{C}^n \mid (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) \in U, \rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) < 0\}$$

の中への双正則写像列であるが、 $\rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}$ を解析すること

により $\{W_\nu\}$ は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である $\mathbb{C}^n$ の領域

$$W(k, \alpha) = \left\{ w \in \mathbb{C}^n \mid 2\operatorname{Re} w_1 + \sum_{i=2}^k |w_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^n |w_j|^2 \right)^\alpha < 0 \right\}$$

に収束することがある。このとき、 $E(k, \alpha)$ が taut である

ことと、Kobayashi distances が正則写像の下で距離非増加性を持つことを用いて、 $\{F_\nu\}$ の部分列 $\{F_{\nu_j}\}$ で双正則写像 $F: D \rightarrow W(k, \alpha)$ に収束するものが存在することがあ

かる.

3.2. 定理 I の証明の概略: 定理 II, III の証明のアイデアもこの定理 I の証明に含まれているので, 多少詳しく証明を与えることにする. まず $\{k_\nu\}$ はコンパクト集合に含まれているから, ある点 $k_0 \in D$ が存在して

$$k_\nu \rightarrow k_0 \quad \text{as } \nu \rightarrow \infty$$

としてよい. また, 点 p のまわりでの local peaking function の存在性から

$\{g_\nu\}$ は定数写像 $C_p: z \mapsto p$ に一様収束する
と仮定してよい. (2.4) から, 与えられた点列

$$p^\nu := g_\nu(k_0) \in D \cap U = E(k, \alpha) \cap U, \quad p^\nu \rightarrow p$$

に対して, $\psi_\nu \in \text{Aut}(E(k, \alpha))$ が存在して

$$g^\nu := \psi_\nu(p^\nu) = (0, \dots, 0, t_\nu), \quad 0 \leq t_\nu < 1.$$

Case 1. $\{g^\nu\}$ が $E(k, \alpha)$ 内に集積点 g をもつ: $g^\nu \rightarrow g$ と仮定してよい. $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ を定理 II のようにとるとき, 各 j に対して, 十分大きい番号 $\nu(j)$ が存在して

$$g_\nu(D_j) \subset D \cap U = E(k, \alpha) \cap U, \quad \nu \geq \nu(j)$$

となる. そこで正則写像列

$$f^\nu := \psi_\nu \circ g_\nu|_{D_j} : D_j \rightarrow E(k, \alpha), \quad \nu \geq \nu(j)$$

を考えると, $f^\nu(k_0) = g^\nu \rightarrow g \in E(k, \alpha)$ であることと, $E(k, \alpha)$

が taut であることより $f^\nu \rightrightarrows f(j) : D_j \rightarrow E(k, \alpha)$ と仮定し

てよい. 従って, 対角線論法により $f^\nu \rightrightarrows f: D \rightarrow E(k, \alpha)$ とし

てよい. f が双正則写像であることを示したい. そのために

$$E_\nu := \psi_\nu(E(k, \alpha) \cap U) = \psi_\nu(D \cap U);$$

$$g^\nu := g_\nu^{-1} \circ \psi_\nu^{-1}|_{E_\nu}: E_\nu \rightarrow D$$

とおけば, 明らかに

$$(3.3) \quad g^\nu \circ f^\nu = \text{id}, \quad f^\nu \circ g^\nu = \text{id}.$$

が成り立つ. また, $E(k, \alpha)$ の相対コンパクト部分領域 E' を任意にとるとき, $\psi_\nu^{-1}(E') \rightarrow \{p\}$ である. 従って, ある番号

ν_0 が存在して $E' \subset E_\nu$, $\nu \geq \nu_0$ となる. この事実と

D が有界領域であることから $g^\nu \rightrightarrows g: E(k, \alpha) \rightarrow \bar{D} \subset \mathbb{C}^n$

と仮定してよい. もしも, $g(E(k, \alpha)) \subset D$ であることがわか

れば (3.3) より $f: D \rightarrow E(k, \alpha)$ は双正則同型であることが

わかる. さて, 十分大きいすべての ν に対して, $[f(\bar{D}_1) \cup$

$f^\nu(\bar{D}_1)] \subset E' \subset E(k, \alpha)$ となる相対コンパクト領域 E' が存

在する. 従って, $g^\nu(f^\nu(\bar{D}_1)) = \bar{D}_1$ において $\nu \rightarrow \infty$ として,

$D_1 \subset g(E') \subset g(E(k, \alpha))$ を得る. これより, $g(E(k, \alpha))$ は

空集合でない開集合を含むから g は開写像となることがわ

かり, 特に $g(E(k, \alpha)) \subset D$ と結論出来る.

Case 2. $\{g^\nu\}$ が $E(k, \alpha)$ 内に集積点をもたない. この場合,

D と $E(k, \alpha)$ がともに開球 B^n に正則同値であることを示したい.

$$g^\nu \rightarrow g := (0, \dots, 0, 1) \in \partial E(k, \alpha)$$

と仮定してよい. (2.2)より ξ は $E(k, \alpha)$ の強擬凸境界点であるから, 点 ξ の十分小さい開近傍 W 上で定義された C^2 -smooth な強多重劣調和関数 $\rho: W \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して,

$$E(k, \alpha) \cap W = \{z \in W \mid \rho(z) < 0\}, \quad d\rho(z) \neq 0, \quad z \in \partial E(k, \alpha) \cap W$$

となる. このとき, 点 ξ のまわりでの適当な座標系 $w = (w_1, \dots, w_n)$ をとれば, この座標系に関して, 次のことが成立することがわかる:

$$(3.4) \quad \xi = (0, \dots, 0);$$

$$(3.5) \quad \xi^\nu = (0, \dots, 0, \delta_\nu), \quad (\delta_\nu, \delta_\nu/|\delta_\nu|) \rightarrow (0, -1);$$

$$(3.6) \quad w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \text{ とおくと, 適当な複素数 } C_j \text{ に対して}$$

$$\rho(w) = 2\operatorname{Re} w_n + |w|^2 + A(w);$$

$$A(w) = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n C_j w_j \bar{w}_n \right) + o(|w|^2).$$

従って, $R > 0$ のまわりで定義された連続関数 $\ell(x)$ と定数 $C > 0$ とが存在して次のことが成り立つ:

$$(3.7) \quad \ell(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(3.8) \quad |A(w)| \leq C|w||w_n| + \ell(|w|^2)|w|^2 \quad \text{near } w=0.$$

$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ を以前のものとし, 任意に固定した j に対して, 正則写像列 $f^\nu = \psi \circ \varphi|_{D_j} : D_j \rightarrow E(k, \alpha)$ を考えると $f^\nu(k_0) = \xi^\nu \rightarrow \xi = (0, \dots, 0) \in \partial E(k, \alpha)$, かつ ξ が強擬凸境界点であることより $f^\nu \rightarrow C_\xi$ と仮定してよい. 従って, 十分大きい ν_j が存在して

$$f^\nu(D_j) \subset E(k, \alpha) \cap W, \quad \nu \geq \nu_j.$$

が成り立つ。そこで、正則写像列 $L_\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $F^\nu: D_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ を次のように定義する:

$$L_\nu(w) = (w/\sqrt{|\delta_\nu|}, -w_n/\delta_\nu), \quad w \in \mathbb{C}^n;$$

$$F^\nu(z) = L_\nu(f^\nu(z)), \quad z \in D_j.$$

このとき, $F^\nu(k_0) = (0, \dots, 0, -1)$ かつ $F^\nu(D_j)$ は領域

$$W_\nu := L_\nu(E(k, \alpha) \cap W) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid L_\nu^{-1}(w) \in W, \rho \circ L_\nu^{-1}(w) < 0\}$$

に含まれる。さて、今

$$\rho^\nu(w) = [\rho \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu|, \quad A^\nu(w) = [A \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu|$$

とおけば次のことが成り立つことがわかる:

$$(3.9) \quad \rho^\nu(w) = 2\operatorname{Re}(-\delta_\nu w_n/|\delta_\nu|) + |w|^2 + A^\nu(w);$$

$$(3.10) \quad |A^\nu(w)| \leq [C\sqrt{|\delta_\nu|} + r(|L_\nu^{-1}(w)|^2)] \cdot |w|^2.$$

従って, $w^\nu = F^\nu(z)$, $z \in D_j$ とおけば, (3.9), (3.10) より

$$\begin{aligned} (3.11) \quad |w_n^\nu + \delta_\nu/|\delta_\nu||^2 - 1 &= |w_n^\nu|^2 + 2\operatorname{Re}(\delta_\nu w_n^\nu/|\delta_\nu|) \\ &> |w^\nu|^2(1 + A^\nu(w^\nu)/|w^\nu|^2) \\ &\geq |w^\nu|^2/2 \geq 0. \end{aligned}$$

これは, $\delta_\nu/|\delta_\nu| \rightarrow -1$ に注意すれば, 十分大きいすべての ν に対して, F_n^ν は D_j から taut 領域 $\mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\}$ への正則写像であることを示している。すべての ν に対して,

$$F_n^\nu(k_0) = -1 \text{ であったから, } F_n^\nu \Rightarrow F_n(y): D_j \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\},$$

従って (3.11) より $\{F^\nu\}$ は正則写像 $F(y): D_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ に広義一様収束すると仮定してよい。一方, $\rho^\nu(w) \Rightarrow 2\operatorname{Re} w_n + |w|^2$

であるから, $\{W_n\}$ は開球 B^n に双正則同値である領域 $W = \{w \in \mathbb{C}^n \mid 2\operatorname{Re} w_n + |w|^2 < 0\}$ に収束する. このとき, Case 1 と同様にして, $\{F_n\}$ の部分列 $\{F_{n_k}\}$ で双正則写像 $F: D \rightarrow W$ に広義一様収束するものが存在することがわかる. 特に, D は等質領域となる. 従って, 適当な列 $\{\sigma_k\} \subset \operatorname{Aut}(D)$ に対して, $R\text{-}\lim \sigma_k(k_0) = p$ と出来る. このとき, 定理 II より D は $E(k, \alpha)$ と双正則同値であることが結論される.

3.3. 定理 III の証明の概略: 任意に点 $k_0 \in M$ を固定し

M を相対コンパクト部分領域 M_j の単調増大列で覆っておく:

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \supset \dots \supset M_{j+1} \supset M_j \supset \dots \supset M_1 \ni k_0.$$

M は $E(k, \alpha)$ の双正則像で exhaust されているから, $E(k, \alpha)$ から

M の中への双正則写像列 $\psi_\nu: E(k, \alpha) \rightarrow M$ が存在して,

$$M_\nu \subset \psi_\nu(E(k, \alpha)), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

となる. 従って正則写像列

$$\mathcal{F}_\nu := \psi_\nu^{-1}: \psi_\nu(E(k, \alpha)) \rightarrow E(k, \alpha), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

は M の任意のコンパクト集合上で一様にある正則写像

$\mathcal{F}: M \rightarrow \overline{E(k, \alpha)} \subset \mathbb{C}^n$ に収束したと仮定してよい. また,

必要ならば $\psi_\nu, \mathcal{F}_\nu$ を適当に $\psi_\nu \circ \sigma_\nu^{-1}, \sigma_\nu \circ \mathcal{F}_\nu$ ($\sigma_\nu \in \operatorname{Aut}(E(k, \alpha))$) と取りかえることにより

$$\mathcal{F}^\nu := \mathcal{F}_\nu(k_0) = (0, \dots, 0, t_\nu), \quad 0 \leq t_\nu < 1$$

と仮定してよい.

Case 1. $\{g^j\}$ が $E(k, \alpha)$ 内に集積点 g をもつ: このとき,
まず Kobayashi distances の正則写像のもとでの距離非増加
性より, M は $\mathbb{C}^n$ のある有界領域 D と同一視出来ることが
わかる. 従って, 証明は定理 I, Case 1 に帰着され, M と $E(k, \alpha)$
とが双正則同値であることがわかる.

Case 2. $\{g^j\}$ が $E(k, \alpha)$ 内に集積点をもたない: このとき,
 $g^j \rightarrow g := (0, \dots, 0, 1) \in \partial E(k, \alpha)$ としてよい. また, g が $E(k, \alpha)$
の強擬凸境界点であることから $g^j \Rightarrow C_{g^j}$ と仮定してよい.
このとき, 定理 I の証明中の Case 2 のように, g のまわりでの
座標系 $w = (w_1, \dots, w_n)$ を導入し, 正則写像列 $L_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,
 $F^j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ を

$$L_j(w) = (w/\sqrt{|\delta_j|}, -w_n/\delta_j), \quad F^j(x) = L_j(g_j(x))$$

と定義すれば, 定理 I の証明の Case 2 とまったく同様にして,
 $\{F^j\}$ の部分列 $\{F^{j_k}\}$ で双正則写像 $F: M \rightarrow W \cong B^n$ に
広義一様収束するものが存在することがわかる.

[4] 2つの注意.

4.1. D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域とし, p を $\overline{D}$ の一点とする. d_D で
 D の Kobayashi pseudodistance を表す. このとき,

定義. 点 p の $\mathbb{C}^n$ における任意の近傍 W に対して, p の
ある近傍 V が存在して

$$\overline{V} \subset W, \quad d_D(D \cap (\mathbb{C}^n \setminus W), D \cap V) > 0$$

となるとき, D は点 p で双曲的に埋込まれている, という.

P. Kiernan [3] の結果によれば, $\mathbb{C}^n$ の任意の有界領域 D に対しては, D は任意の点 $p \in \partial D$ で双曲的に埋込まれている.

注意 1. 定理 I, II において, $\mathbb{C}^n$ 内の領域 D は有界である必要はなく, 一般に「 D は点 p で双曲的に埋込まれている」という条件で置き換えられる.

任意の自然数 $n_1, \dots, n_s$ と任意の実数 $\alpha_2, \dots, \alpha_s > 0$ に対して, 有界ラインハルト領域 E を次のように定義する:

$$E = \{(z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_s} \mid |z_1|^2 + \sum_{i=2}^s |z_i|^{2\alpha_i} < 1\}.$$

注意 2. 定理 II と同様の結果は, 有界ラインハルト領域 E に対しても成立する.

参考文献

- [1] B. L. Fridman, Biholomorphic invariants of a hyperbolic manifold and some applications, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), 685-698.

- [2] R.E. Greene and S.G. Krantz, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non-compact automorphism groups, *Lect. Notes in Math.* 1268, Springer-Verlag, 1987, 121-157.
- [3] P. Kiernan, On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970), 49-51.
- [4] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, 1970.
- [5] A. Kodama, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k, \alpha)$ in $\mathbb{C}^n$, to appear in *Tôhoku Math. J.* 1988.
- [6] P. Pflug, About the Carathéodory completeness of all Reinhardt domains, *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II* (G.I. Zapata, ed.), 1984, 331-337.
- [7] J.P. Rosay, Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 29, 4 (1979), 91-97.
- [8] B. Wong, Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group, *Invent. Math.* 41 (1977),

253-257.

[9] H. Wu, Normal families of holomorphic mappings,
Acta Math. 119 (1967), 193-233.