

定値折り目特異点の消去 II

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 佐伯 修
Osamu Saeki

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan

e-mail: saeki@imi.kyushu-u.ac.jp

home-page: <http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/>

概要

In this article, we first give a new simple proof to the elimination theorem of definite fold by homotopy for generic smooth maps of manifolds of dimension > 2 into the 2-sphere. Our new proof has the advantage that it is constructive and is also algorithmic: the procedures enable us to construct various explicit examples. Furthermore, we prove the non-existence of singular Legendrian fibrations on 3-manifolds, answering negatively to a question posed by Goo Ishikawa.

1 序文

本稿の内容は、プレプリント [18] などの概説である。

以下、多様体やその間の写像は C^∞ 級であるものとする。 M を n 次元閉多様体 ($n > 2$), Σ を 2 次元多様体とし, $f: M \rightarrow \Sigma$ に対して, 特異点集合 $S(f)$ を

$$S(f) = \{q \in M \mid \text{rank } df_q < 2\}$$

で定義する。

Whitney[19] 等により, 上のような写像は, 以下の型の特異点しか持たない写像 (excellent map と呼ばれる) で近似できることが知られている。

- (1) $q \in S(f)$ が折り目特異点: f の点 q における写像芽が, 写像 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2)$ の原点における写像芽と C^∞ 級右左同値。
- (2) $q \in S(f)$ がカスプ特異点: f の点 q における写像芽が, 写像 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2^3 + x_1 x_2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_n^2)$ の原点における写像芽と C^∞ 級右左同値。

なお、折り目特異点のうち、上の (1) の式で、 $(x_1, x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$ のように、第2成分関数における符号がすべて同じとできるとき、点 q を**定値折り目特異点**といい、そうでないときは**不定値折り目特異点**という。

以下の定理は [17] において証明された。

定理 1.1 勝手な写像 $f: M \rightarrow S^2$ は、*excellent map* で、定値折り目特異点を持たないものにホモトピックである。

すなわち、2次元球面 S^2 へのどんな *excellent map* も、ホモトピーで定値折り目特異点を消去できるのである。

[17] における証明では、定義域多様体 M を手術して別の多様体に変えているほか、構成が複雑で、具体的な写像の構成という観点からは難があった。そこで本稿では、定義域を変えずに具体的なホモトピーを構成する手法を与えることで、上の定理の別証明を与える。その手法は、ある意味でアルゴリズム化することができ、それをを用いて具体例を実際に豊富に作ることができる。

2 定理 1.1 の証明

まず M は連結であるとして良い（そうでなければ、各連結成分に対して、以下の議論を行えば良い）。

以下、与えられた写像 f を順次ホモトピーで変形してゆくが、記号の節約のため、変形されてできる写像についても同じ記号 f を用いてゆくことにする。

与えられた写像 $f: M \rightarrow S^2$ は *excellent map* で近似できる。近似写像はもとの写像とホモトピックであるので、 f は初めから *excellent* であるとしてよい。このとき、 $S(f)$ は M 内のコンパクトな 1 次元部分多様体となることに注意しよう。

以下、*excellent map* $f: M \rightarrow S^2$ に対して、 $S_0(f)$ で、 f の定値折り目特異点全体のなす M の部分多様体を表す。これは有限個の円周と開区間の非交和と微分同相であり、各開区間成分の端点はカスプ特異点になっていることに注意する。

Step 1: $S_0(f)$ は 1 つの円周と微分同相としてよい。

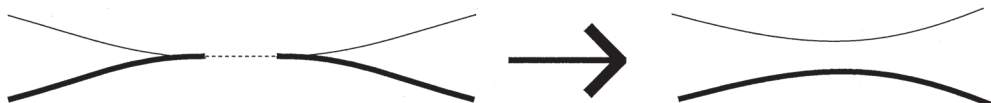
以下、いくつかの図を用いて説明するが、すべて値域多様体 S^2 における特異点集合の像 $f(S(f))$ を表していて、太線は定値折り目特異点集合の像を、細線はそれ以外の特異点からなる集合の像を表す。

まず、 $S_0(f)$ の円周成分があれば、**swallowtail move** (図 1 参照。詳細については [15, Lemma 3.3] も参照) を用いることで、 $S_0(f)$ の各成分は開区間と微分同相としてよい。

次に、もし 2 つ以上の開区間成分があれば、Levine [11] による**カスプ消去**の方法 (図 2 参照。詳細は [15, Lemma 3.7] も参照) を用いて、異なる成分の端点に現れるカスプ対 (で、Levine の意味で *matching pair* になるもの) を消去してゆくこ



図 1: Swallowtail move

図 2: カスパ消去. 点線は, 2つのカスパ特異点の matching pair を結ぶ M 内の joining curve ([11] 参照) の像.

とで, $S_0(f)$ は 1つの開区間成分のみからなるとしてよい. (なお, 1つの開区間成分の端点に現れるカスパ対は matching pair を成すので, $S_0(f)$ の別の開区間成分の端点に現れるカスパは, そのどちらかのカスパと matching pair をなすことに注意する.) 最後に, 残った 1つの開区間成分の端点に現れるカスパ対を消去すれば, $S_0(f)$ を 1つの円周にできる.

なお, 上で使われた写像の改変操作は, すべて写像のホモトピーを用いて実現できることに注意する.

Step 2. $f|_{S_0(f)}$ は埋め込みとしてよい.

まず $f|_{S_0(f)}$ は, S^2 への閉曲線のはめ込み (正則閉曲線) であることに注意する. こうした正則閉曲線の正則ホモトピー類は, $\text{mod } 2$ の回転数のみで決まることが知られている. そこでまず, 回転数の偶奇を変える操作を導入する.

図3のように, $S_0(f)$ に swallowtail move を施したあとで, 生じたカスパ特異点の組を消去する. ここで, 点線は, 2つのカスパ特異点を (局所的に) 結ぶ joining curve の f による像である. この結果できた excellent map をあらためて f と書くと, $S_0(f)$ は相変わらず 1つの円周であって, $f|_{S_0(f)}$ の回転数は 1 だけ変わっていることがわかる. (なお, この結果, 定値でない折り目特異点が増えてしまうが, それは気にしない.) この操作を以下, **curl move** と呼ぶことにする.

この結果, $f|_{S_0(f)}$ は埋め込みと正則ホモトピックであるとしてよい. 一方, S^2 上の 2つの正則閉曲線が正則ホモトピックであれば, それらは図4にあるような **disk move** を有限回繰り返すことで互に移り合うことが知られている. ここで, 図の斜線部は S^2 に埋め込まれた (角を持つ) 円板であって, 境界円周内の弧に沿って正則閉曲線と交わっているものである (境界円周における, その弧の補空間である弧は, 正則閉曲線の別の部分と横断的に交わるかも知れない).

そこで, $f|_{S_0(f)}$ に対する disk move を, 写像のホモトピーで次のように実現する. まず, $S_0(f)$ の M における十分小さな近傍の像を考えることで, $f|_{S_0(f)}$ には normal orientation が付くことに注意する (近傍の像がある方向に矢印が向いてい

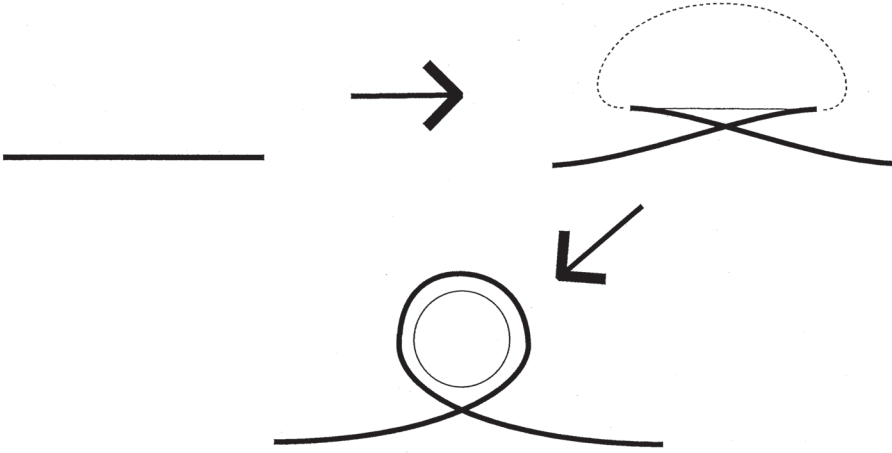


図 3: Curl move



図 4: Disk move

ると考える). すると, disk move を行う disk が, その normal orientation の方
 ない場合と, ある場合の 2 通りがあることがわかる.

前者の場合は, 容易に写像のホモトピーで実現できる. 実際, f の Stein 分解を
 考え, 商空間から S^2 への局所的埋め込みを, 正則ホモトピーで動かせばよい. 念
 のため, Stein 分解と商空間の定義を以下に思い出しておこう.

定義 2.1 多様体間の写像 $g: X \rightarrow Y$ を考える. 定義域多様体 X の 2 点 x_1, x_2 が, Y の
 1 点 y の g による逆像の同じ連結成分に入るとき同値と定義し, この同値関係による
 X の商空間を W_g , 商写像を $q_g: X \rightarrow W_g$ と書く. このとき, 次の図式を可換に
 する連続写像 $\bar{g}: W_g \rightarrow Y$ が一意的に存在することが容易にわかる.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ q_g \searrow & & \nearrow \bar{g} \\ & W_g & \end{array}$$

この図式を g の Stein 分解と呼ぶ. また W_g は商空間, もしくは Reeb 空間と呼ば
 れる (詳細は [9, 12] 等を参照).

なお, W_f における $q_f(S_0(f))$ の近傍は, 境界付き 2 次元多様体の構造をしてい
 て, $q_f(S_0(f))$ が境界に対応することが容易に示せる (たとえば [9] 参照). さらに,

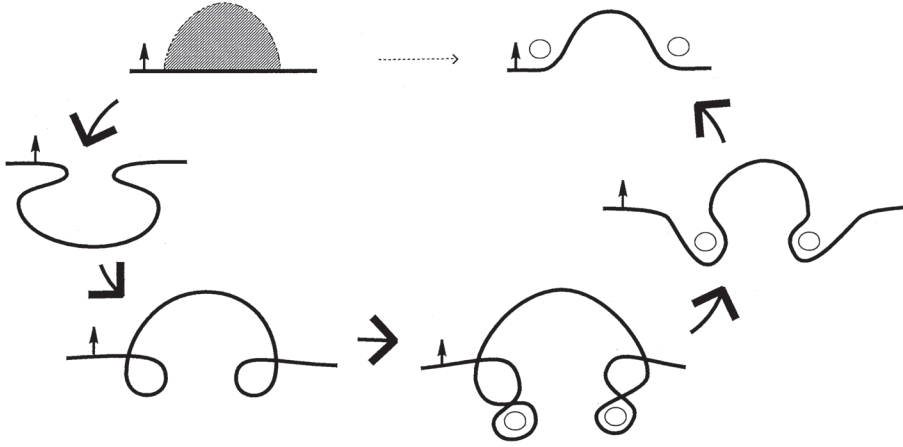


図 5: Disk move を実現する変形列

そこへの $\bar{f}: W_f \rightarrow S^2$ の制限写像ははめ込みである。したがって、その近傍のみを、 $\bar{f}$ による境界の像の「外側方向」へ正則ホモトピーで自由に動かすことができるのである。そして、その正則ホモトピーと商写像 q_f を合成することで、 f のホモトピーによる変形が構成できる。

次に、disk move を行う disk が、 $f|_{S_0(f)}$ の normal orientation の方にある場合を考える。この場合には上のような簡単な議論は適用できない。商空間を「へこませる」ことが一般にはできないからである。そこで、商空間からの局所的埋め込みを、図5のように、 S^2 の裏側を使って変形することを考える。 f の商空間の局所的埋め込みを変形したあとで、curl move を2回使い（その結果、不定値折り目特異点集合の成分数が2つ増えるが気にしない）、さらにその結果の商空間の（局所的）はめ込み写像を正則ホモトピーで変形することで、 $f|_{S_0(f)}$ に対する disk move が実現できることになる（[17, Case 2, p. 375] も参照）。

こうした disk move を有限回繰り返すことで、 $f|_{S_0(f)}$ が埋め込みであるとして良いことになる。

Step 3. $S_0(f)$ を消去する。

まず必要ならば、商空間 W_f における $q_f(S_0(f))$ の近傍の S^2 への埋め込み写像を正則ホモトピーで変形することで、 S^2 内で $f(S_0(f))$ が（normal orientation と逆側に）張る円板内に、特異点集合像がないようにできる。すると、図6のような写像の変形列を施すことで、 $S_0(f)$ を、1つの不定値折り目特異点からなる成分に取り換えることができる（[5, Fig. 7], [6, Lemma 4.8] も参照）。

こうして定値折り目特異点が、写像のホモトピーによりすべて消去できたことになる。□

注意 2.2 上述の証明は、ある意味でアルゴリズム化可能である。これは4次元多

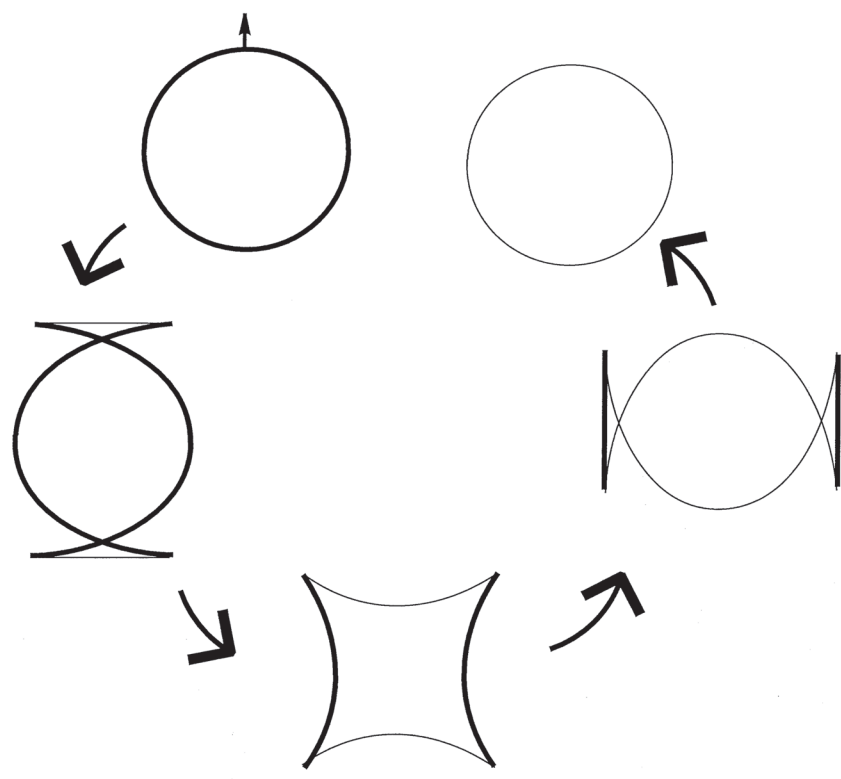


図 6: 定値折り目特異点集合の消去

様体上のある種の写像 (broken Lefschetz fibration や trisection など) の単純化操作においても重要な役割を果たすことに注意する. 詳細は, [1, 2] を参照.

注意 2.3 上では値域多様体が S^2 の場合のみ考えているが, 射影平面 $\mathbf{R}P^2$ であっても同様の議論が適用できる.

注意 2.4 Gay–Kirby [6] は, 定理 1.1 より一般的な定理を示している. たとえば, Σ を一般の 2 次元多様体としたとき, $f : M \rightarrow \Sigma$ が定値折り目特異点を持たない excellent map にホモトピックとなるためには, 指数 $[\pi_1(\Sigma) : f_*\pi_1(M)]$ が有限であることが必要十分であることが示されている.

3 具体例

この節では, 定理 1.1 の証明を具体的に適用することで, 定値折り目特異点を持たない excellent map の具体例を与えよう.

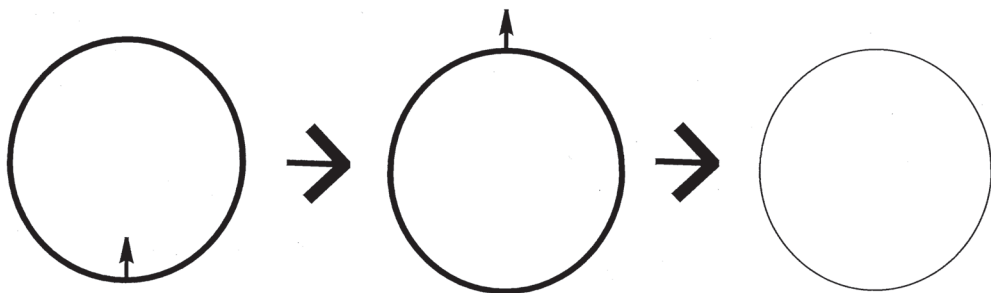


図 7: 定値折り目特異点消去の具体例

例 3.1 $\mathbf{R}^4$ 内の 3 次元単位球面 S^3 を考える. また, 標準的射影 $\pi : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ で定義し, $f = \eta \circ \pi|_{S^3} : S^3 \rightarrow S^2$ を考える. ここで, $\eta : \mathbf{R}^2 \rightarrow S^2$ は埋め込みである. すると, f は excellent であって, 特異点として定値折り目特異点しか持たず, $S_0(f)$ は S^1 と微分同相であって, $f|_{S_0(f)}$ が埋め込みであることが容易に確かめられる. この excellent map に対して, 2 節の操作を適用してみよう. この例の場合, $f|_{S_0(f)}$ は既に埋め込みとなっているので, Step 3 を適用する. 図 7 のように, まず S^2 の isotopy で, $f(S_0(f))$ の normal orientation の逆側が小さな円板であって, そこに f の像が入らないようにできる. すると, 図 6 の方法で, $S_0(f)$ を, 不定値折り目特異点からなる 1 つの円周に取り換えることができる (図 7 参照).

なお, 最初の f は全射ではないが, 定値折り目特異点を消去したあとの excellent map は全射であることに注意する.

例 3.2 次に Hopf fibration $h : S^3 \rightarrow S^2$ を考える. これに, birth move ([15, Lemma 3.1, Remark 3.2] 参照) を施したあと, カスプ消去を図 8 のように行くと, excellent map で, $S(f)$ が, 定値折り目特異点からなる 1 つの円周と, 不定値折り目特異点からなるもう 1 つの円周からなるものが構成できる. この定値折り目特異点集合に 2 節の操作を適用すると, 特異点集合が不定値折り目特異点のみからなり, それが 2 つの円周からなるものが構成できる (図 8 参照).

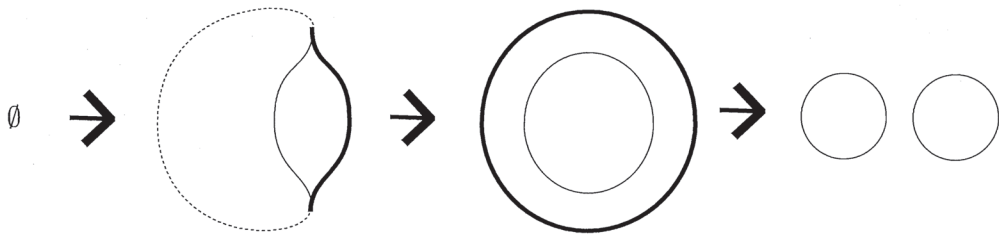


図 8: Hopf fibration の変形

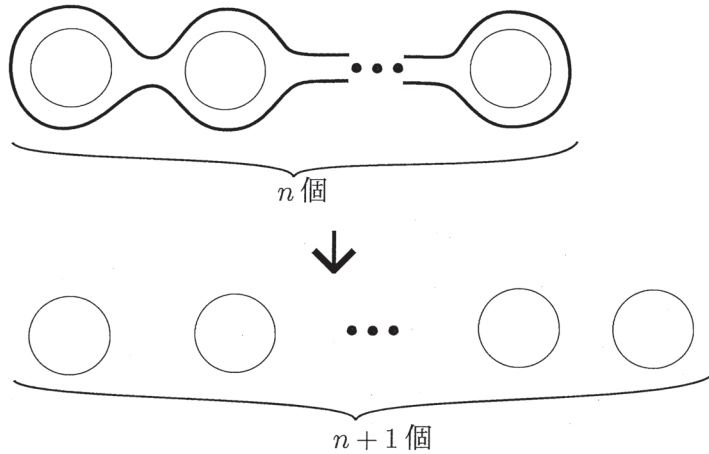


図 9: n 個の excellent maps の「連結和」とその定値折り目特異点の消去

なお、この写像 $S^3 \rightarrow S^2$ は、 $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ の生成元を表すことに注意する。

次に正の整数 n を勝手にとる。図 8 の右から 2 つ目の特異値集合をもつ excellent map を n 個用意し、それらの値域を共通の S^2 に取る。そしてそれらの特異値集合を、定値折り目特異点集合像が外側に来るように、同心円状に含む円板達が交わらないように、それぞれの写像の像を調整しておく。そして、それらの「連結和」を取る。つまり、定値折り目特異点の適当な球体近傍を取り去って、次の写像と貼り合わせてゆくのである。詳細は [14] 参照。こうして、特異値集合が図 9 の上図にあるような excellent map $S^3 \rightarrow S^2$ が構成できる。連結和を行う際に定義域多様体 S^3 の向きに気を付ければ、こうして得られる写像は $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ において、 $n \in \mathbf{Z}$ を表すことがわかる。

この写像の定値折り目特異点を我々の方法で消去すると、 $S(f)$ が不定値折り目特異点のみで、 $n+1$ 個の円周からなる写像 $f: S^3 \rightarrow S^2$ ができ、その特異値集合は、 S^2 において互いに交わらない円板を張ることがわかる (図 9 下図参照)。

S^3 の向きを逆にすれば、 $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ において負の整数に対応する写像も構成できる。こうして $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ のすべての元について、定値折り目特異点を持たない具体的な excellent map が代表元として取れることがわかった。これらの例では、特異点集合への制限写像が埋め込みになっていることに注意しよう。

なお、定値折り目特異点を持たない excellent map $S^3 \rightarrow S^2$ で、特異点集合が空でなく、そこへの制限写像が埋め込みであって、 $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$ の $n \in \mathbf{Z}$ を表すものとしたとき、特異点集合の連結成分数が $|n|+1$ 個以上となるかどうかは、著者の知る限り、open problem¹ である。なお、図 8 の変形を用いれば、2 個ずつ増やすことは可能であることに注意する。

ところで、一般の 3 次元閉多様体からの excellent map の場合、特異点集合への

¹この問題は高瀬将道氏による。

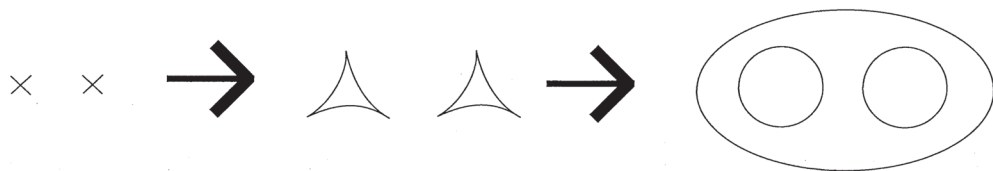


図 10: $\pi_4(S^2) \cong \mathbf{Z}_2$ の生成元を表す excellent map の構成

制限を埋め込み写像にすることはできない. 詳細は [16] を参照されたい.

例 3.3 次に $S^4 \rightarrow S^2$ なる excellent map を構成しよう. まず, $\pi_4(S^2) \cong \mathbf{Z}_2$ であって, 生成元は, 合成 $h \circ \Sigma h$ で代表されることが知られている. ここで $h: S^3 \rightarrow S^2$ は Hopf fibration であり, $\Sigma h: S^4(= \Sigma S^3) \rightarrow S^3(= \Sigma S^2)$ はその懸垂 (suspension) である. そして S^3 と ΣS^2 の同一視を適当に選ぶことで, この写像 $S^4 \rightarrow S^2$ は特異ファイバーをちょうど 2 つ持つ, 種数 1 の Lefschetz fibration とできることが知られている (詳細は [13] を参照). これは excellent map ではないが, wrinkling move ([10] 参照) により, 各 Lefschetz 特異点を, 不定値折り目特異点と 3 つのカスプ特異点からなる 1 つの円周に (ホモトピーで) 変形できることが知られている. こうして図 10 の真ん中の特異値集合を持つ excellent map が構成できる. この 6 つのカスプ特異点を消去すると, 図 10 の一番右の特異値集合を持つ (カスプ特異点を持たず, 定値折り目特異点も持たない) excellent map が構成できる.

なお, $\pi_4(S^2) \cong \mathbf{Z}_2$ の自明な元の代表元に対しては, 例 3.1 と同様の構成法が適用できることに注意する.

例 3.4 Σ^n を n 次元ホモトピー球面で, $n \geq 5$ なるものとしよう. すると [14] より, excellent map $\Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^2$ で, 特異点に定値折り目特異点しか持たず, 像が単位円板となるものが構成できる. これと埋め込み $\mathbf{R}^2 \rightarrow S^2$ を合成した excellent map を考えよう. これに対して例 3.1 と同じ手法を適用すれば, excellent map $\Sigma^n \rightarrow S^2$ で, 特異点に不定値折り目特異点しか持たず, 特異点集合が 1 つの円周で, そこへの制限写像が埋め込みとなるものが構成できる.

4 特異 Legendrian fibration

この節では, M を向き付けられた閉 3 次元多様体で, 接触構造が与えられているものとする (すなわち M は接触 3 次元多様体). そして $f: M \rightarrow S^2$ を excellent map で, カスプ特異点を持たないものとする.

定義 4.1 f が特異 Legendrian fibration であるとは, 任意の $y \in S^2$ に対して, $f^{-1}(y)$ が, 接触構造が定める平面場に接するときをいう.

上の定義において、 y は f の特異値かも知れないことに注意しよう。Excellent map f がカスプ特異点を持たなければ、 $f^{-1}(y)$ の各連結成分は、 M の 1 次元部分多様体か、孤立点、すなわち 0 次元部分多様体 ($f^{-1}(y)$ が定値折り目特異点を含む場合) か、あるいははめ込まれた曲線 ($f^{-1}(y)$ が不定値折り目特異点を含む場合) であることに注意する。

なお、もし f が特異 Legendrian fibration であれば、定値折り目特異点を持たない。これは埋め込まれた曲面上の特性葉層構造を用いればわかる (たとえば [3] 参照)。そこで、定値折り目特異点を持たない excellent map が、どのような条件を満たせば、それが特異 Legendrian fibration となるような接触構造を許容するか、という問題²が考えられる。

なお、特異点をまったく持たない写像については既に研究があり、上の問題には解答が与えられている (たとえば [4, Proposition 1.1.7], [7] を参照)。

ところが、特異点を持つ場合には、残念ながら以下が得られた。

定理 4.2 $f : M \rightarrow S^2$ を excellent map とする、 $S(f) \neq \emptyset$ であれば、 f は特異 Legendrian fibration には決してならない。

証明. 上の議論により、不定値折り目特異点 $p \in S(f)$ が必ず存在する。局所座標を適当にとれば、 f は p の近傍で、 $(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, z)$ で与えられるとして良い。 f を特異 Legendrian fibration にする接触構造があったとする。その接触構造を定める contact 1-form が、上の局所座標に関して

$$\alpha = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy + \varphi_3 dz$$

で与えられるとする。

$f^{-1}(f(p))$ は、点 p の近傍で $x^2 - y^2 = 0$, $z = 0$ で与えられる。これは 2 つの直線分からなるが、これが contact 1-form が定める平面場に接しなければならないので、

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) \neq 0$$

がわかる。このとき、

$$\alpha \wedge d\alpha|_p = \varphi_3(0) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0) \right) dx \wedge dy \wedge dz|_p$$

となるので、 α の非退化性から、

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0) \neq 0$$

がわかる。

²これは石川剛郎氏が提起した問題である。

さて、ベクトル場 $v = (y, x, 0)$ は各ファイバーに接している。したがって仮定から、 $y\varphi_1 + x\varphi_2$ は恒等的にゼロであることがわかる。

一方、 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ であつたので、Hadamard の補題より、原点の近傍で

$$\varphi_1 = xg_1 + yh_1 + zk_1, \quad \varphi_2 = xg_2 + yh_2 + zk_2$$

となる C^∞ 級関数 $g_1, h_1, k_1, g_2, h_2, k_2$ が存在する。このとき、

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0) = h_1(0), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0) = g_2(0)$$

となる。すると、

$$y\varphi_1 + x\varphi_2 = xyg_1 + y^2h_1 + yzk_1 + x^2g_2 + xyh_2 + xzk_2$$

が恒等的にゼロとなる。これを y について 2 回微分して $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を代入すると、 $h_1(0) = 0$ がわかる。同様に、 $g_2(0) = 0$ もわかる。

これから、

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0) = 0 - 0 = 0$$

となるが、これは矛盾である。したがって、 f を特異 Legendrian fibration にする接触構造は存在しない。□

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP15K13438, JP16K13754, JP16H03936, JP17H01090, JP17H06128 の助成を受けている。

参考文献

- [1] R.İ Baykur and O. Saeki, *Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds*, preprint, arXiv:1705.11169 [math.GT].
- [2] R.İ Baykur and O. Saeki, *Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds*, preprint, arXiv:1710.06529 [math.GT], to appear in Proc. Natl. Acad. Sci. USA.
- [3] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 165–192.
- [4] Y. M. Eliashberg and W. P. Thurston, *Confoliations*, Univ. Lecture Series, Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

- [5] D.T. Gay and R.C. Kirby, *Fiber-connected, indefinite Morse 2-functions on connected n -manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108** (2011), 8122–8125.
- [6] D. Gay and R. Kirby, *Indefinite Morse 2-functions; broken fibrations and generalizations*, Geom. Topol. **19** (2015), 2465–2534.
- [7] E. Giroux, *Structures de contact sur les variétés fibrées en cercles au-dessus d'une surface*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 218–262.
- [8] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., Vol. 14, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [9] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2607–2636.
- [10] Y. Lekili, *Wrinkled fibrations on near-symplectic manifolds*, Geom. Topol. **13** (2009), 277–318.
- [11] H. I. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3**, Suppl. 2 (1965), 263–296.
- [12] H. Levine, *Classifying immersions into $\mathbf{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbf{R}^2$* , Lecture Notes in Math., Vol. 1157, Springer–Verlag, Berlin, 1985.
- [13] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), 298–301.
- [14] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.
- [15] O. Saeki, *Constructing generic smooth maps of a manifold into a surface with prescribed singular loci*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 1135–1162.
- [16] O. Saeki, *Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces*, Topology **35** (1996), 671–698.
- [17] O. Saeki, *Elimination of definite fold*, Kyushu J. Math. **60** (2006), 363–382.
- [18] O. Saeki, *Elimination of definite fold II*, preprint, arXiv:1709.03804 [math.GT].
- [19] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 374–410.