

A trial of an arithmetic construction of rank 2 reflexive sheaves (残念氏の仕事を紹介)

都立大理学部

寺 友 秀

0. 動機 $\mathbb{P}^n$ 上の rank n の n -vector bundle を構成
することは、大問題であるが、現在 $n=1, 2$ のときは
知られている。今 $n=2$ 知られている nontrivial 例、
の例を挙げてみる。

① $\mathbb{P}^4$ 上の rank 2 vector bundle (Horrocks-Mumford)

② $\mathbb{P}^5$ 上の rank 3 vector bundle (Horrocks)

③ $\mathbb{P}^{2m+1}$ 上の rank $2m$ vector bundle

(null correlation bundle = mathematical instanton)

④ $\mathbb{P}^n$ 上の rank $(n-1)$ bundle (Tango)

⑤ $\mathbb{P}^4$ 上の rank 3 vector bundle (残念氏)

等があげられる。この中でも有名なのは Horrocks-Mumford
の vector bundle には、いくつかの構成法があるが、この
ように stratification を使って、組み合わせ論的に (よくは
有限体の構造を使った組み合わせ論を用いて) 構成する
方法が知られている。そこでこの構成法に倣って、 $\mathbb{P}^n$
上の reflexive sheaf の構成法を a bit だけ残念氏から
この方法では、構成される reflexive sheaf は locally free と
ならないが、有限体をもとにして組み立てられているので、群の
作用や Chern class に関して (現在のところ C_4 まで)
具体的に計算することが可能である。

1. 構成法. p を素数とし, $p \equiv 1 \pmod{4}$ と仮定する.
 以下 $\mathbb{A}^1$ 上の $\mathbb{P}^{p-1}$ 上の reflexive sheaf を構成しよう.
 今 $\mathbb{A}^1$ 上の $\mathbb{P}^{p-1}$ 上の $V = \text{Map}(\mathbb{A}^1, \mathbb{C})$ とする. p 個の $\mathbb{A}^1$ 上の
 空間と見做す. $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{p-1} = \mathbb{P}(V)$ とする. $i \in \mathbb{A}^1$ に対して, ξ_i
 特性関数 $\xi_i \in V$ とする. 可成り. $\mathbb{P} = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_p])$
 とする. $i \in \mathbb{A}^1$ に対して, H_i を $\xi_i = 0$ で定義した超平面,
 $H_i^0 = H_i - \bigcup_{j \neq i} H_j$ とする. $N_i = \mathbb{P} - \bigcup_{j \neq i} H_j$ とおく.
 N_i は H_i^0 の open neighborhood とする. $\bigcup_{i \in \mathbb{A}^1} N_i =$
 $\mathbb{P} - \{\text{codim} \geq 2 \text{ strata}\}$ とする. $\mathbb{A}^1$ 上の stratification は
 divisor H_i ($i \in \mathbb{A}^1$) から自然に定まる. $\mathbb{A}^1$ 上の
 平方剰余である x に対して $y \in \mathbb{A}^1$ の存在して $x = y^2$ と
 書ける x とする. $x \in \mathbb{A}^1$ のとき, $x \in \mathbb{A}^1$ と表す. $x - y \in \mathbb{A}^1$ の
 とき, $x \sim y$ と書く. $x - y \in \mathbb{A}^1 - \mathbb{A}^1$ のとき $x \not\sim y$ と書く.
 p 条件より $x \sim y \iff y \sim x$ とする.

Def $(f, f_i^\pm)$ $\mathbb{C}[x_i]_{i \in \mathbb{A}^1}$ の $f, f_i^\pm$ とする.

$$f = \prod_{i \in \mathbb{A}^1} x_i, \quad f_i^+ = \prod_{j \neq i} x_j, \quad f_i^- = \prod_{j \neq i} x_j$$

と定義する. $\deg f = p, \deg f_i^\pm = \frac{1}{2}(p-1)$ とする.

Def (Sheaf $\mathcal{F}_p^\circ$) $\mathcal{F}_p^\circ|_{N_i} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{p-1}}(\frac{p-1}{2})|_{N_i}$ の subsheaf
 とし, $e_1 = (f, 0), e_2 = (0, f), f_i' = (x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}} f_i^-, x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}} f_i^+)$

と定義する. (以下 $x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}} = x_i$ とする.)

このとき, 容易に, $(\mathcal{F}_p^\circ|_{N_i})|_{N_i \cap N_j}$ と $(\mathcal{F}_p^\circ|_{N_j})|_{N_i \cap N_j}$

は一致する. $\mathcal{F}_p^\circ|_{N_i}$ は $\mathcal{F}_p^\circ$ の $\bigcup_{i \in \mathbb{A}^1} N_i$ 上の torsion free
 sheaf の制限と見做す. $\mathbb{A}^1$ 上の $\mathcal{F}_p^\circ$ と定義する.

$$\mathcal{F}_P^0 / \bigcup_{i \in \mathbb{F}_p} N_i = \mathbb{P}^{r-1} - \{\text{codim } 2 \text{ strata}\} \xrightarrow{j} \mathbb{P}^{r-1}$$

Lemma $\mathcal{F}_P^0$ は $\bigcup_{i \in \mathbb{F}_p} N_i$ 上 locally free

proof 3つの generator e_1, e_2, f_i' の関係は 1 次関係式

$$li f_i^- e_1 + li f_i^+ e_2 = f_i'$$

が成り立つ。 $li f_i^-, li f_i^+$ は x_i で割り切れる。単純式である。

N_i 上 invertible. $\therefore \mathcal{F}_P^0|_{N_i}$ は e_1, f_i' で生成される。

Q.E.D.

Def $\bigcup_{i \in \mathbb{F}_p} N_i$ から $\mathbb{P}^{r-1}$ への自然な inclusion j がある。(上図)

$\mathcal{F}_P \ni \mathcal{F}_P = j_* \mathcal{F}_P^0$ で定義される。このとき $\mathcal{F}_P$ は reflexive

である。 $\text{codim } 2$ 以上 locally free であることがわかる。

(O.S.S.) への local to generator を書き下す。

Lemma $\mathcal{O}_P(p)^{\oplus 2}$ から H_i ($i \in \mathbb{F}_p$) への制限写像

$$\exists \delta_i, \delta = \bigoplus_i \delta_i : \mathcal{O}_P(p)^{\oplus 2} \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus 2}$$

とある。 $\exists \tau = \bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(\frac{1}{2}(p+1))$ から $\bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus 2}$ への準同型 Φ^1 と

$$\Phi^1 : \bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(\frac{1}{2}(p+1)) \ni (o_i) \mapsto (\sigma_i f_i)_i \in \bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus 2}$$

とある。 $\sigma_i = (f_i^-, f_i^+)$ である。

このとき $\mathcal{F}_P = \delta^{-1}(\text{Im } \Phi^1)$ である。

proof $\delta^{-1}(\text{Im } \Phi^1) \subset \mathcal{F}_P$ である。 $\delta^{-1}(\text{Im } \Phi^1)|_{N_i} = \mathcal{F}_P^0|_{N_i}$ と見

ればよい。 $\text{Ker } \delta$ は $(x_i, 0), (0, x_i)$ で生成され $\prod_{i \in \mathbb{F}_p} x_i$ は

N_i 上 unit である。 $(f, 0), (0, f)$ で生成される。

$$f_i' = x_{i+1}^{\frac{1}{2}(p+1)} (f_i^-, f_i^+) \text{ 7 } \delta \text{ a } \tau^i. \quad \mathcal{F}_p^0|_{N_i} = \delta^{-1}(\text{Im } \mathcal{F}^1).$$

これは, $s \in \mathcal{F}_p(U) \subset \mathcal{O}_p(p)^{\oplus 2}$ と可及.

$$s|_{N_i \cap U} = a e_i + b f_i \quad a \in \mathcal{O}(N_i \cap U), b \in \mathcal{O}\left(\frac{p+1}{2}\right)(N_i \cap U)$$

$$\therefore s|_{H_i^0 \cap U} = b f_i|_{H_i^0} \text{ から } b \in \mathcal{O}_{H_i}\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{ と得る.}$$

(f_i の第1成分と第2成分に、支通因子が属し、これに注意せよ.)

Q.E.D.

Theorem $\mathcal{F}_p$ は $\text{codim } 2$ の τ^i locally free τ^i 2つの generator
が explicit に与えられる.

proof $i, j \in \mathbb{F}_p$ ($i \neq j$) と $1 \leq i, j$. $H_{ij} = H_i \cap H_j$,

$$H_{ij}^0 = H_{ij} - \bigcup_{k \neq i, j} H_k \perp \tau^i \quad \mathcal{F}_p \text{ 上の local } 12 \text{ 2つの section}$$

τ^i generate する事を見る.

Lemma $s \in \mathcal{F}_p(U) \quad U \supset H_{ij}^0$ と可及.

$$\text{この時, } \exists \sigma_{ij} \in \mathcal{O}\left(\frac{p+3}{4}\right)|_{H_{ij}} \text{ s.t.}$$

$$\begin{aligned} s|_{H_{ij}} &= \varphi_{ij}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_i|_{H_{ij}} \\ &= \varphi_{ji}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_j|_{H_{ij}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} s|_{H_{ij}} &= \varphi_{ij}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_i|_{H_{ij}} \\ &= \varphi_{ji}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_j|_{H_{ij}} \end{aligned}} \right\} (*)$$

$$\therefore \tau^i. \quad s \in \mathcal{O}_p(p)^{\oplus 2}, \quad \sigma_{ij} \in \mathcal{O}_{H_{ij}}\left(\frac{p+3}{4}\right), \quad f_i \in \mathcal{O}_p\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\oplus 2}$$

と見れば, φ_{ij} は

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \prod_{\substack{k \sim i \\ k \neq j}} x^k & (\text{if } \alpha = \beta) \\ \prod_{\substack{k \neq i \\ k \sim j}} x^k & (\text{if } \alpha \neq \beta) \end{cases}$$

τ^i と τ^j による $\mathcal{O}_p\left(\frac{p-1}{4}\right)$ を与える.

proof. $\exists$... $\delta^1(\text{Im } \bar{\omega}^1)$ には ... 条件 ε . H_i°, H_j° まで考え.
 H_{ij}° での compatibility を見て ε として $\varphi_{ij}|_{H_{ij}^\circ} \cdot f_i|_{H_{ij}^\circ}$
 等 ... 因数分解 ... 計算は省略する.

この Lemma を認めて. 実際には H_{ij}° 上に local tor
 generator を書き下してあげる. 以下 Lemma に出る φ_{ij}
 φ_{ij} の様な単複式 ... 出て来ると. 次は同様の Notation を
 採用する. 例として

$$f_{ij}^{+-} = \prod_{\substack{k \sim i \\ k \neq j}} x_k, \quad f_{ij}^{++} = \prod_{k \sim j} x_k \quad \text{等} \text{ である}$$

以下簡単のため $\alpha \sim \beta$ としておく. $\alpha + \beta$ の時も同様の
 結果を得る

主張 ($\alpha \sim \beta$ とする) F には $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}_P(\frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2})^{\oplus 2}$
 と $e_2 = (0, f)$ から H_{ij}° 上に F_p の generator とする

$$f_{ij} = \left(\frac{f}{f_{ij}^{++} x_i x_j}, f_{ij}^{+-} f_i^{+} + f_{ji}^{+-} f_j^{+} \right)$$

主張の証明 ε の f_{ij} に対して. 次の等式が成り立つ.

$$f_{ij} - f_{ij}^{+-} (f_i^{+}, f_i^{+}) = (0, f_{ji}^{+-} f_j^{+}) \quad \text{---} (**)$$

$i \neq j$ の役割 ε 入れかえても同様の式を得る. 例として $(**)$ と
 H_{ii} を制限する

$$f_{ij}|_{H_i} = f_{ij}^{+-} (f_i^{+}, f_i^{+})|_{H_i} \text{ となる} \quad \text{---} (***)$$

以上. 今 $\exists \in F_p(U)$ の ε として. Lemma を適用して.

$\sigma_{ij} \in \mathcal{O}_{H_{ij}}(\frac{p+3}{4})$ の ε として得る. $(***)$ と $(*)$ を

使うと. $\hat{\sigma}_{ij}$ は $\mathcal{O}_P(\frac{p+3}{4})$ への σ_{ij} の lifting とする.

$(3 - \sigma_{ij} f_{ij})|_{H_{ij}} = 0$ と得る。再び $(***)$ を使って、必要ならば、 σ_{ij} を 0 とし、 $(3 - \sigma_{ij} f_{ij})|_{H_i} = 0$ とおき、同様に $i \leftrightarrow j$ (f_{ij} の係数 f_{ij}^+ は、 H_{ij} の open set 上 invertible である) として H_{ij} の open set 上、 $e_2 = (0, f)$ と、 f_{ij} と f_{ij}^+ が生成される。 e_2 と f_{ij} が H_{ij} 上 F_p で生成される。
Q.E.D.

この様に、生成元を n 個とすることができる。より高い codimension の解析も可能である。key となる点では、Lemma の様に、“係数” σ_{ij} を見つけると、適当な “base” (open set に含められたい) に関する関係式及び ω の係数の “invertibility” である次の定理が証明される。より複雑な考察を必要とする。

Theorem F_p は codimension 3 の strata として locally free

である。codimension 4 の strata として一般に ($p=5$ の時を除いて) locally free とおける。locally free との隔りがある。より詳しく $C_4(F_p)$ で計算される。

2. $C_4(F_p)$ の計算と Shioda elliptic surface $S(4)$

1. 同様に H_{ij} の ω に対する local section の generator となる。 $i \sim j$ の時と、 $i \neq j$ の時とで形が異なる。 ($i \sim j$ の時には 1 、 2 は取捨つかない。) したがって、 H_{ijk} (i, j, k は互いに異なる F_p の元) の ω に対する local generator となる。 i, j, k の ω の差は $F_p^{\times 2} = 1$ であるか否かに依る。

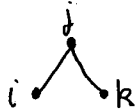
場合分けは構成する必要もある。以下記号は、

状況を表すために、3つの文字 i, j, k を用意して、これら

vertex とし、 $i \sim j$ なる場合を考えた時は、 i, j を edge

で結ぶ。 $i + j$ なる場合を考えた時は、edge で結ばない

様になる。例として、 $i \sim j, j \sim k, i + k$ に対応して、

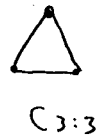
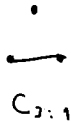


このグラフに対応する。さらに簡単 $a \vdash d$ には、Case 

という様に書く。同様に H_{ijkl} のおきで $\mathcal{F}_p^0$ の構造は、

4つの互いに異なる i, j, k, l の場合分けにより調べる。

3つの vertex の場合分け (以下 i, j, k を permutation を modulo して行う。) 以下の様に場合分けする。



4つの vertex の場合分け (同様に)



$\mathcal{F}_p^0$ の構造に關して次の定理を得る。

定理 $\mathcal{F}_p$ には $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^3 \subset \mathcal{F}^4 \subset \mathcal{F}_p$

なる filtration があって、次の性質を満たす。

17. $\mathbb{F}_p$ 内の 4 点集合 z : $C_4:4(b)$ type の数である。これは
 18 容易に、 $C_4:6$ type の 4 点集合の数 z を表すことができる。
 以下、 $C_4:6$ type の 4 点集合 z の Shioda elliptic
 surface の有理点と関係する。{41} の Group 和 $\frac{7}{12}$
 2.2 2 見てみよう。 (i, j, k, l) の type $C_4:6$ とする。
 $j-i=x^2$, $k-j=y^2$, $l-k=z^2$, $k-i=s^2$, $l-j=t^2$
 $l-i=u^2$, $(x, y, z, s, t, u \in \mathbb{F}_p)$ とおいて $z = (x, y, z, s, t, u)$
 18. 関係式

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= s^2, & y^2 + z^2 &= t^2, & x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 \\
 z \text{ 满足 } T &= q. & X &= x/y, & Z &= z/y, & S &= s/y, & T &= t/y, \\
 U &= u/y & \text{とおく。} & X, Z, S, T, U & \text{は} \\
 X^2 + 1 &= S^2, & 1 + Z^2 &= T^2, & X^2 + 1 + Z^2 &= U^2 & \text{--- (*)}
 \end{aligned}$$

z 满足 $T=1$ とする。Shioda elliptic surface $S(4)$ の定義方程式
 は他の方から。塩田 茂生 の "Algebraic cycles on certain K3
 surface in char p " の結果から、これは $E = (a, b) | a^2 = b^4 + 1$
 で定義される elliptic curve の z の直積から dominate
 する。見方は 18.17 以下の方から表すことができる。今 $E \times E$ の
 点 (a, b, c, d) ; $a^2 = b^4 + 1$, $c^2 = d^4 + 1$ と (2).

$$\alpha = bd, \beta = d/b, \gamma = acd/b \text{ とおく。}$$

$$\gamma^2 = (x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2) \text{ 满足 } T = q. \text{ 2 の時。}$$

$$X = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}, Z = \frac{1-\beta^2}{2\beta}, S = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}, T = \frac{1+\beta^2}{2\beta}, U = \frac{\gamma}{2\alpha\beta}$$

とおく (2) の式が満足される。これは E の有理点の数の
 計算に帰着し、{41} の Group 和 $\frac{7}{12}$ を表すことができる。

3. $\mathbb{F}_p$ 上の群作用

12. $\mathbb{F}_p$ 上の群作用 ρ : Honocho-Mumford ρ vector bundle
 の時と同様に構成出来る $V = \text{Map}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C})$, V 上の Symetric
 polynomial $\text{Sym}(V)$, $\mathbb{A}^1$ $\text{Sym}(V)$ 上の rank 2 free module
 への作用を可定義出来る。今 $\psi: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}^\times$ $\mathbb{Z}/p$ の
 additive character として fix する。 $\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p x \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}}$
 $a \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_1 x + \dots + \mathbb{C}_{\frac{p-1}{2}} x^{\frac{p-1}{2}}$ に対して $h_c \in \text{Map}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$
 $\mathbb{Z}$ $h_c(x) = \psi(c(x))$ と定義出来る。値は $\mathbb{C}$ の加法群に属し
 $h_c \in \text{Aut}(V)$ のと定義出来る $a \in \mathbb{F}_p^\times$, $l \in \mathbb{F}_p$ に対して
 $\mathbb{F}_p$ 上の自己同型 $x \mapsto ax + l$ が定まる。これにより $\mathbb{Z}$ を動かす
 $\mathbb{Z}$, V 上の自己同型 $(ax + l)^*$ による。 $h(c)$ と $(ax + l)^*$
 が交換関係にある。

$$\begin{cases} h_c \circ (ax + l)^* = (ax + l)^* \circ h_c \\ c'(ax + l) = c(x) \end{cases}$$

とすると、 $\mathbb{Z}$ の作用 $\{ (ax + l)^* \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, l \in \mathbb{F}_p \}$ と $\mathbb{F}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}}$
 の半直積 $G_p = \{ (ax + l)^* \} \ltimes (\mathbb{F}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}})$ と
 $(ax + l)^* c(x) (ax + l)^{-1} = c(ax + l)$ と定義出来る

$\mathbb{P}(V)$ 上の sheaf $\mathcal{O}(p)$ は G_p linearizable である

χ_i (= i 番の characteristic function) に対して

$$(ax + l)^{-1} \chi_i = \chi_{a^{-1}l}, \quad h_c \chi_i = \psi(c(i)) \chi_i$$

とすると、 $f_i^+ = \prod_{j \neq i} \chi_j$ 上の action を見ると

$$(c(ax + l)^{-1} h_c) f_i^+ = \prod_{j \neq i} \psi(c(j)) \prod_{j \neq i} (ax + l)^{-1} \chi_j$$

$$= \prod_{j \neq i} \psi(c(j)) f_{a^{-1}l}$$

$$(\pm 12. a \in \mathbb{F}_p^{\times 2} \Rightarrow +, a \notin \mathbb{F}_p^{\times 2} \Rightarrow -)$$

Lemma 2.2. χ is a character of G .

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \chi(c_j) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} c_k j^k\right) = \chi\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_p^*} \frac{1}{k} c_k (i+u)^k\right) \\ &= \left\{ \chi\left(\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} c_k i^k\right) \chi\left(c \frac{1}{2}(p-1)\right) \right\}^{\frac{1}{2}(p-1)} \end{aligned}$$

Lemma 2.3. χ is a multiplicative cocycle $\chi: G_p \rightarrow \mathbb{F}_p^*$

$$\chi((ax+1)^{-1}h) = \chi\left(c \frac{1}{2}(p-1)\right) \chi(x) \chi(h)$$

$$\chi(gg') = \chi(g) \chi(g') \chi(g'), \quad \chi((ax+1)^{-1}h) = \begin{cases} 1 & a \in \mathbb{F}_p^{*2} \\ -1 & a \notin \mathbb{F}_p^{*2} \end{cases} \quad (*)$$

Lemma 2.4. $\chi(p) \otimes \chi(p) \sim G_p$ -linearization χ of $\chi(p)$

$\sim G_p$ -linearization $\chi: \chi \in \mathbb{F}_p^*$

$$g: \chi(p) \otimes \chi(p) \rightarrow \chi(p) \otimes \chi(p); (a, h) \mapsto$$

$$\begin{cases} (\chi(g)^{\frac{p-1}{2}} g^*(a), \chi(g)^{-\frac{p-1}{2}} g^*(h)) & (\chi(g)=1) \\ (\chi(g)^{-\frac{p-1}{2}} g^*(h), \chi(g)^{\frac{p-1}{2}} g^*(a)) & (\text{if } \chi(g)=-1) \end{cases}$$

χ is a character of G . χ is a $(*)$ G_p -linearization of χ .

Lemma 2.5. χ is a character of G . χ is a $(*)$ G_p -linearization of χ .

χ is a character of G . χ is a $(*)$ G_p -linearization of χ .

χ is a character of G . χ is a $(*)$ G_p -linearization of χ .