

化学反応に関して

— アブストラクト —

東大理 小西芳雄

§1. 序. 次のような連立偏微分方程式を考えよう:

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = AU + F(U).$$

ここに

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i = u_i(t, x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

また

$$AU = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(D_1 \operatorname{grad} u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{div}(D_n \operatorname{grad} u_n) \end{pmatrix}$$

D_i : 拡散係数 ≥ 0 . (1)に対する初期値(境界値混合)

問題の例が、生態学、化学反応論、物性論などに多く現われてくる(山口 [3], 138頁参照)。

筆者は次の二点に興味を持った：

- (i) 境界条件に非線型性が現われうる点；
- (ii) 拡散係数 D_i が濃度 u_i に依存しうる点。

§2. 一般の方針. (i), (ii) 各々の場合, A, F に然るべき定義域を持たせ, ある函数空間 X の非線型作用素 A, F を定める. すると (1) は Banach 空間での抽象的な非線型常微分方程式

$$(1)' \quad \frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + FU(t) \quad t > 0$$

と思えて, 初期条件

$$(3) \quad U(0) = U_0 \quad (U_0 \in D(A) \cap D(F))$$

の下で解くことになる. 「非線型半群の理論」を使い, 非線型作用素 $A+F$ の指数函数 $\{e^{t(A+F)}\}_{t \geq 0}$ を構成し

$$U(t) = e^{t(A+F)} U_0$$

とおけばよいことになる.

もう少し具体的に述べよう: (1)', (3) を抽象的な

陰的な差分方程式

$$\begin{cases} \frac{U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = A U_\varepsilon(t) + F U_\varepsilon(t) & t \geq \varepsilon \\ U_\varepsilon(t) = U_0 & \varepsilon > t \quad (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

でおきかえれば, 比較的容易に $U_\varepsilon(t)$ が求まる場合が多かろう. つまり

$$(\alpha) R(I - \varepsilon A - \varepsilon F) \supset D(A) \cap D(F)$$

を求めし

$$U_\varepsilon(t) = (I - \varepsilon A - \varepsilon F)^{-[t/\varepsilon]} U_0$$

とおく. $(I - \varepsilon A - \varepsilon F)^{-1}$ が意味をもち, $U_\varepsilon(t)$ が求める $U(t)$ に $[0, \infty)$ で広義一様収束するためには

(β) A の消散性

と

(γ) 差分解 $U_\varepsilon(t)$ に対する 先験的評価(安定性) が重要である. F は多くの場合 $U_\varepsilon(t)$ の「大きさ」に依存する Lipschitz 定数をもつ作用素であるから.

A は非線型とはいえ, Laplacian の抽象的性質の重要なものは備えているであろうから (α), (β), (γ) の検証は困難でないのである. しかし線型の場合の如くやたらに加えたり引いたり出来ないため, (γ) に際し多少

やっかいな点があることを付記しておく。

§3. 具体例. 三村 [2] で扱われた抗原抗体反応の方程式を有界な容器内で考え, (i) 及び (ii) の方向の研究をしてみた. 詳細は小西 [1] にゆずる.

[1] Y. Konishi: Sur un système ^{dégénéré} des équations paraboliques semi-linéaires avec les conditions aux limites non linéaires. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 19(1972), 353-361.

[2] M. Mimura: On the Cauchy problem for a simple degenerate diffusion system. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5(1969), 11-20.

[3] 山口昌哉: 非線型現象の数学. 朝倉書店.

附 録

(解の存在, 一意性, 正則性のみを考察する限り)

以上連立方程式を考えてきたが, 結局は F のない単独の場合に帰着されてしまうことがわかった. 単独の場合に結果を出しておけばよいことになる.

§4. $u_t = \operatorname{div}(D(u) \operatorname{grad} u)$ について. これは

$$g(u) = \int_0^u D(r) dr$$

とあければ

$$u_t = \Delta \varphi(u)$$

とかける. $\Delta \varphi(\cdot)$ は然るべき定義域をもたせれば
 $\Delta \varphi$ で dissipative. 「Crandall-Liggett の定理」を考
 慮に入れると,

$$(4) \quad u - \lambda \Delta \varphi(u) = f \quad \lambda > 0$$

なる楕円型方程式に問題が帰着されよう. 有界
 領域の場合にこのようなことをやってみた:

[4] Y. Konishi: On the nonlinear semi-groups associated with
 $u_t = \Delta \beta(u)$ and $\varphi(u_t) = \Delta u$ (J. Math. Soc. Japan に投稿).

§5. 非有界領域での (4). 同じことを一般の
 領域でやろうとすると困難にぶつかる. (4) が
 解きにくいから. $\varphi(u) = v$ なる変換をしてみると
 (4) は

$$(4)' \quad \varphi^{-1}(v) - \lambda \Delta v = f$$

なる「半線型 Poisson 方程式」となる. (4)' が
 解きにくいわけは

$$-\lambda \Delta v = f$$

が解けないためである. 但し 1:1 はでる. この
 辺の様子を 作用素論的に 調べてみた:

- [5] Y. Konishi: Note on potential operators on L^p (Proc. Japan Acad. に発表予定).

次の論文の定理 1.5 に示唆された:

- [6] T. Watanabe: Some recent results on processes with stationary independent increments. Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory, Kyoto, 2, 93-110 (1972).