

関数微分方程式の準周期解の近似解法

S.Yui¹, K.Hosono and M.Kurihara²

^{1,2}Department of Computer Science, Faculty of Engineering
Yamanashi University, Kofu 400, Japan

(油井誠志, 細野健司, 栗原光信)

1 準周期関数

関数 $f(t) \in C(R; R^d)$ が周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ で準周期であるとは,

$$f(t) = f_0(t, \dots, t), \quad (t \in R)$$

を満たす $f_0(u_1, \dots, u_m) \in C(R^m; R^d)$ が存在し, $f_0(u_1, \dots, u_m)$ がそれぞれの変数 u_i ($i = 1, \dots, m$) に対して, 周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ の周期的であるときである. ただし, $C(R^m; R^d)$ は定義域を R^m , 値域を R^d とする連続関数の集合とする. ここで, 関数 $f(t)$ が周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ準周期であるなら, $f(t)$ は概周期である.

2 exponential dichotomy

次の微分作用素 L を定義する.

$$Lz = \frac{dz}{dt} - A(t)z \quad (2.1)$$

$$Lz = 0 \quad (2.2)$$

ここで, z は R 上で連続微分可能な d 次元ベクトル値関数で, $A(t)$ は連続な $d \times d$ の正方行列値関数とする.

線形微分作用素 (2.1) は, $A(t)$ が準周期行列のとき準周期作用素と呼ばれる. また, 同様に $A(t)$ が概周期行列のとき概周期作用素と呼ばれる.

微分作用素 L が概周期作用素であるとき, 任意の概周期関数 $f(t)$ に対して,

$$Lz = f(t) \quad (2.3)$$

が, 少なくとも一つの有界な解を持つとき, 正則であると呼ぶ. また, 準周期は概周期であるから, 準周期作用素は, 概周期作用素として正則であるとき, 正則である.

定義 1.

(2.4) と (2.5) を満たす射影行列 P と正の定数 C_1, C_2 と σ が存在するとき, (2.2) は exponential dichotomy を満たすという.

$$|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)| \leq C_1 e^{-\sigma_1(t-s)} \quad (s \leq t) \quad (2.4)$$

$$|\Phi(t)(E - P)\Phi^{-1}(s)| \leq C_2 e^{-\sigma_2(s-t)} \quad (t \leq s) \quad (2.5)$$

ここで, $\Phi(t)$ は $\Phi(0) = E$ を持つ線形同次方程式 (2.2) の基本行列である.

この古典的定義を拡張して, 次の一般化された exponential dichotomy の概念を導入する.

定義 2.

線形同次方程式 $Lz = 0$ が, 次の条件 1, 2, 3 を満たす射影行列 P , 正の定数 σ_1, σ_2 非負の関数 $C_1(t, s), C_2(t, s)$, 非負の定数 M が存在するとき, L は一般化された exponential dichotomy を満たすという.

1. $|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)| \leq C_1(t, s)e^{-\sigma_1(t-s)} \quad (t \geq s)$
2. $|\Phi(t)(E - P)\Phi^{-1}(s)| \leq C_2(t, s)e^{-\sigma_2(t-s)} \quad (t < s)$
3. $\int_{-\infty}^t C_1(t, s)e^{-\sigma_1(t-s)}ds + \int_t^{\infty} C_2(t, s)e^{-\sigma_2(s-t)}ds \leq M \quad (t \in R)$

定理 1.

もし, (2.1) によって定義された周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ準周期作用素 L が一般化された exponential dichotomy を満たすならば, 周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ準周期関数 $f(t)$ に対して, 微分方程式 (2.3) は同じ周期を持つ準周期解 $z = z(t)$ を一意的に持つ. また, それは次式によって与えられる:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s)ds,$$

但し,

$$G(t, s) = \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) & (t \geq s) \\ -\Phi(t)(E - P)\Phi^{-1}(s) & (t < s) \end{cases}.$$

ここで, $G(t, s)$ は, L に対してグリーン関数と呼ばれる. また, 解 $z(t)$ は, 次の関係を満たす.

$$\|z\| \leq M\|f\|$$

ただし, 定義 2 における条件 3 の M を用いる. また, $\|f\| = \max_{t \in R} |f(t)|$ とする.

3 差分微分方程式

定理 2.

差分微分方程式

$$\frac{dz(t)}{dt} = X(t, z(t), z(t + \tau)) \quad (3.6)$$

を考える. ここで与えられた関数 $X(t, z, w)$ は領域 $R \times D \times D$ で定義され, t について周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ準周期であり, (z, w) について連続微分可能であると仮定する. ただし, $D \subset R^d$ は有界領域とする. また, 差分微分方程式系 (3.6) は, 任意の t に対して D 内に位置し同じ周期を持つ準周期関数である近似解 $z = \bar{z}(t)$ を持ち, 全ての $t \in R$ に対して,

$$\left| \frac{d\bar{z}(t)}{dt} - X(t, \bar{z}(t), \bar{z}(t + \tau)) \right| \leq r$$

を満たすと仮定する. 更に, 次の条件を満たす正定数 δ , 非負の定数 κ と λ , 同じ周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ準周期的な正方行列 $A(t)$ が存在すると仮定する.

1. 線形系 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ は, 一般化された exponential dichotomy を満たす.
2. $D_\delta = \{z : |z - \bar{z}(t)| \leq \delta, \forall t \in R\} \subset D$.
3. $|\Phi(t, z(t), z(t + \tau)) - A(t)| \leq \frac{\kappa}{M}$, $|\Psi(t, z(t), z(t + \tau))| \leq \lambda$ が, 任意の $(t, x, y) \in R \times D_\delta \times D_\delta$ に対して成立する.
4. 不等式 $\kappa + M\lambda < 1$ と $\frac{Mr}{1 - \kappa - M\lambda} \leq \delta$ が成り立つ.

ここで, $\Phi(t, z, w)$ と $\Psi(t, z, w)$ のは, それぞれ z, w に関する関数 $X(t, z, w)$ のヤコビアン行列で, M は定義 2 の条件 3 に現われる定数である. そのとき与えられた系 (3.6) は, 任意の $t \in R$ に対して D_δ 内に位置する同じ周期 $\omega_1, \dots, \omega_m$ を持つ一意的な準周期解を持つ. さらに, 全ての $t \in R$ に対して, 次の関係を満たす:

$$|z(t) - \bar{z}(t)| \leq \frac{Mr}{(1 - \kappa - M\lambda)}.$$

4 数値解法

次の Duffing 型非線形差分微分方程式を考える。

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\mu \frac{dx(t)}{dt} + \nu_0^2 x(t) = \varepsilon x^3 + \sigma x(t + \tau) + a \cos \nu_1 t + b \cos \nu_2 t \quad (4.7)$$

(4.7) に対する, Galerkin 近似解として,

$$\begin{aligned} x &= x_m(t) \\ &= \alpha_{00} + \sum_{r=1}^m \sum_{|p|=(p,\nu)>0} (\alpha_p \cos(p,\nu)t + \beta_p \sin(p,\nu)t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

とおく. ここで, $p = (p_1, p_2), \nu = (\nu_1, \nu_2), p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, (p, \nu) = p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2, |p| = |p_1| + |p_2|$ とする. また, $\sum_{|p|=(p,\nu)>0}$ は, 条件 $|p| = r$ かつ $(p, \nu) > 0$ を満たす整数の組 $p = (p_1, p_2)$ の全について, 和をとることを表す.

このとき, 未定係数 $\{\alpha_{00}, \alpha_p, \beta_p : 1 \leq |p| \leq m, (p, \nu) > 0\}$ を次の手順で定める.

1. (4.8) を (4.7) に代入する.
2. 代入した両辺を, $\{1, \cos(p, \nu)t, \sin(p, \nu)t : 1 \leq |p| \leq m, (p, \nu) > 0\}$ の項に整理し, その係数を取り出す.
3. 未定係数 $\{\alpha_{00}, \alpha_p, \beta_p : 1 \leq |p| \leq m, (p, \nu) > 0\}$ に関する非線形連立方程式を得る.
4. 得られた非線形連立方程式に対し, Newton-Raphson 法で未定係数の値を定める.

5 数値実験例

定数項を, $\mu = 1/8, \nu = \sqrt{2}, \varepsilon = 1/64, a = 1/8, b = 1/2, \nu_1 = 1, \nu_2 = \sqrt{5}, \sigma = 1/64, \tau = 1/2$ として数値実験を行った. このとき, 粗い手計算によって得られる近似解

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.000260713459 + 0.1177606996 \cos \nu_1 t + 0.02945137459 \sin \nu_1(t) \\ &\quad - 0.1616632261 \cos \nu_2 t + 0.02985984173 \sin \nu_2 t \end{aligned}$$

を Newton-Raphson 法の初期値として用いる. 最終的に, 近似解 $x_4(t)$ を次のように得る:

$$\begin{aligned} x_4(t) &= -0.0000933 + 0.11741931 \cos t \\ &\quad - 0.0000532 \cos 2t - 0.1607751 \cos \sqrt{5}t \\ &\quad - 0.0000105 \cos 2\sqrt{5}t + 0.0000202 \cos(-2 + \sqrt{5})t \\ &\quad + 0.00514645 \cos(-1 + \sqrt{5})t + 0.0000363 \cos(1 + \sqrt{5})t \\ &\quad + 0.0000382 \cos(-2 + 2\sqrt{5})t + 0.0294152 \sin t \\ &\quad - 0.0000129 \sin 2t + 0.0306886 \sin \sqrt{5}t \\ &\quad - 0.0001386 \sin(-2 + \sqrt{5})t - 0.0012598 \sin(-1 + \sqrt{5})t \\ &\quad + 0.0000191 \sin(-2 + 2\sqrt{5})t - 0.00003 \sin(-1 + 2\sqrt{5})t. \end{aligned}$$

ここで, 定理 2 を用いて, 誤差評価を与える. (4.7) を, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\nu^2 x(t) - 2\mu y(t) + \varepsilon x^3(t) + \delta x(t + \tau) + a \cos \nu_1 t + b \cos \nu_2 t \end{cases}$$

に書き換えると, 右辺のヤコビアン行列 $\Phi(t, z, w)$ と $\Psi(t, z, w)$ は,

$$\Phi(t, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 + 3\varepsilon x^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad \Psi(t, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

となるので, 定理 2 の仮定で選択する行列を $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\mu \end{pmatrix}$ とする. このとき, 全ての $(t, z, w) \in R \times D_\delta \times D_\delta$ に対して,

$$|\Phi(t, z, w) - A(t)| = 3|\varepsilon||x|^2 \leq 3|\varepsilon|(\Omega + \delta)^2$$

かつ, $|\Psi(t, z, w)| = |\sigma|$ が成立する. ただし, $\Omega = \max\{|x_4(t)| : t \in R\}$ とする. ここで, $r = 2.07582 \times 10^{-6}$, $\Omega = 0.146928$ となり, $M = \frac{\nu+1}{\mu\sqrt{\nu^2-\mu^2}} \max\{1, \nu\} = 19.974$ を得る. 定理 2 を用いて, 以上より, 2 つの不等式

$$3|\varepsilon|(\Omega + \delta)^2 \leq \frac{\kappa}{M}$$

$$Mr < (1 - \kappa - M\lambda)\delta$$

を満たすように, $\kappa = 0.38$, $\lambda = |\sigma| = 1/64 = 0.015625$, $\delta =$ を選択すると, 定理 2 の仮定が全て満たされる. このとき,

$$\begin{aligned} \frac{Mr}{1 - \kappa - M\lambda} &= \frac{19.974112 \times 2.07582 \times 10^{-6}}{1 - 0.38 - 19.947112 \times 0.015625} \\ &< 0.000134295 < 0.14 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

を得る. その結果, 正確な準周期解 $x(t)$ と $\bar{x}_4(t)$ の誤差評価を得る.

$$|x(t) - \bar{x}_4(t)| < 0.14 \times 10^{-3}. \quad (t \in R)$$

References

- [1] A.M.Fink, "Almost periodic differential equations", Lecture Notes in Mathematics, vol.377, Springer-Verlag, 1974.
- [2] A.Kohda, "Mathematical Analysis of the Quasiperiodic Solutions to Nonlinear Differential Equation", 1995.
- [3] W.A.Coppel, "Dicotomy in stability theory", Lecture Notes in Mathematics, vol.629, Springer-Verlag, 1978.
- [4] M.Kurihara, "Quasiperiodic solutions of Quasiperiodic Differential Difference Equations", Reports of the Faculty of Engineering Yamanashi Univ., vol.37, 1986.
- [5] M.Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic System", Arch,Rational Mech,Anal, vol.20,1965.
- [6] 細野健司, "関数微分方程式の準周期解の近似解法", 山梨大学大学院修士論文, 1996.