

統計的多変量解析の適用面

シオノギ解析センター 浅 野 長一郎

後藤 昌司、藤元 春海、牡丹 義弘

町原 英、吉谷 直大

§ 0. はじめに

私達は、日常、自然科学や社会科学の領域で、現象の解析にしばしば統計的多変量解析を適用している。

本日は、この統計的多変量解析を実際に適用していく上での幾らかの問題点を、体験的な配慮や考察によってご報告したい。そして、おわりに、これらの解析の適用に際し、私達のところで独自に開発した電子計算機のプログラム・ライブラリーについてもご報告しておきたい。

したがって、本報の内容を次ぎの順に述べていく。

§ 1. 多変量解析の適用上の諸問題

§ 2. 因子分析法での問題点

§ 3. 因子分析法の一つの適用例

§ 4. 電子計算機のプログラム・ライブラリー

§ 5. 判別問題における種々の立場

§ 1. 多変量解析の適用上の諸問題

近年、電子計算機の急速な発達とともに、多変量解析は、医学・工学・農学・産業・経済・文学などと広範な分野でさかんに適用されてきている。

しかし、これらの現象解析に当り、多変量解析が全く無条件又は無批判で適用されるのではなく不都合な面もあり、そこには今後の数理的研究にまつ事項も少くはない。このような観点から、多変量解析の適用にどのようなことが問題点になっているのか、次ぎに列挙してみよう。

A. 多変量解析の立場

(1) principle

通常、実際の現象から問題意識をくみあげ、次いで多変量解析に既存のどの解法に当てはめるかを考えることが多い。しかし、この際、もっと問題の発想動機を尊重し、この動機に忠実な新しい原理的な多変量解析の方法はないであろうか。例えば、得られたサンプルによる層化を意図しているとき、判別関数法の適用は意をつくしていない。このように生の問題意識を安易に既存の解法にむすびつけないで、意図の gap を大事に解明せねばならない。

(2) 数学的模型と仮定

(1) 完全規定の模型

線型模型式が通常はとりあげられるが、線型変換出来ない非線型のモデルでの考察。

(ロ) 関数関係式の場合

確率対応法のような場合に相当し、例えば Keendall の *A course in multivariate analysis* (Chap. 4) に類する考察

(イ) 不完全規定の模型

模型の関数式の型は知れていても、どの程度までの近似であるか不明の場合。例えば、多次元反応曲面の次数決定の場合。

また、模型を一連の潜在因子や構造分析などによる *model building* の推測方式。

(ニ) パターン認識的立場

最近、しばしば云われるパターン認識は、多変量解析の立場から如何に処すべきか。例えば、平方板上のネズミの行動分析などの問題があり、現在は観念的に多変量ノンパラメトリックな立場でしか考えられない。

(3) 標本変動

(1) 分布型

多次元正規分布でない連続分布の場合の整理

(ロ) 標本数

多変量観測は、単一変量の際よりも労力的で、むしろ大標本がとれない場合がある。したがって、漸近性とは別に、精密小標本論として数値表などでの性格づけを必要とする。また、標本数に関する多段的推測の必要性。

(二) 資料の併合

上の(ロ)とも関連して、幾つかの標本群のごく小さいときには、多変量の統計資料を併合せねば有効な推測が出来ない場合がある。この際の利点と欠点による併合の可否問題。

(ホ) 数値表の必要性

多変量解析での数値表は少く、電算機による系統的な数値表の作成と吟味。

(4) 逐次解析法の開発

標本数の経済性を考慮した Wald, Anscombe ら流の逐次検定・逐次推定の必要性。

また、確率近似法の多次元的拡張。

(5) 数値解法上の考察

(1) 電算機の利用を前提とした理論式の再整理

- (ロ) 統計的多変量解析に適切な数値解法の吟味
- （イ）標準プログラム・ライブラリーの作成と管理
- (6) 多段推測の *rule* とその性質
 - (i) 観測資料の性質と現象分析

現象に関する種々の推測を行う前に、予め、観測資料が推測に役立てられる性質のものであるか否かの検討が必要となる。例えば、観測資料の *validity* $\rightarrow$ *reliability* $\rightarrow$ *sensitivity* $\rightarrow$ *inference* の順に検討される。また、異質標本の棄却検定法の推測も行われる。

- (ii) *element-wise* に限定的な追求

1 回だけの統計量の検定では不十分で、さらにその中の核心的な *elements* に関する追求的な考察の必要性とその客観的性格。

- （イ）推測過程

多変量解析の諸法をプロセスとしてつなぎ、1つの推測システムを構成する。これをシステム解析の立場から性格づけたり、最適化を考察する。推測手順と *stopping rule* の設定基準の問題がある。

- (7) 多変量時系列解析への展開

例えば、植物の成長に関する多変量解析の問題があり、当然、時系列解析をも必要とし、また正準分析なども時系列の中で頻用される。

(8) 多変量ノンパラメトリック推測

nominal scale, ordinal scale, interval scale, ratio scale など *distribution free* な観測変量に関する一標本論や二標本論の開発。とくに、種々の観点からの仮説検定法とその *power*。
多段推測の *rule*。数値表の作成。

(9) 利用に便利な標準プログラム・ライブラリーの作成 日常の情報処理の一環として、電子計算機用の プログラム・パックの開発。

B. 観測変量での留意点

(1) 数量化の問題

(i) 計測特性の数理構造が実質科学上で既知の場合
例えば、色彩の明度を離散量でとらえても、それらの数量化は相対的には知られよう。

(ii) 同上の数理構造が知られていない場合

例えば、医学における症状別重篤度(±, +, ++, ...)など。

(2) 分布型の問題

多変量観測値が、すべて連続値のとき・すべて離散値のとき・連続値と離散値の混合しているとき、の正規化の方式。

(3) 欠測値の処理の問題

多変量の計測には、観測条件や労力などの上で、標本数を大きくとり難いことと同時に、欠測値を生じ易い。勿論、厳格な観測態度が必要であるが、やむをえず可成りの欠測値が含まれる場合がある。このとき、欠測値をふくむ標本を全部は捨てないで、何とかこれの救済法が必要となる。欠測部分の推定方式や欠測部分のみの除外に関する数理的配慮が望まれる。

(4) 多変量観測特性の選択問題

(i) すでに得られているすべての観測変量を直ちに用いる前に、問題の目的と各観測変量の性格や精度に応じた、より少数の観測特性の選択問題がある。

(ii) より少数の複合変量の選択方式

例えば、正準変量などに類する複合変量の作成法。

(5) 標本数

大標本論的にしか知られていない結果を有しているから、標本数は出来るだけ大きくとらねばならない。とかく、多変量の際の標本数は小さくなりがちで、欠測値の処理法や資料併合論も必要となる。

(6) 標本の等質性と異質性

- (a) 通常の推測問題における異質標本を棄却する問題。
- (b) ある種の現象の因子分析のように、むしろ、異質的な標本の混合が望ましい場合。例えば、知能検査方式の普遍的利用を目的とする場合。
- (c) 一群の多変量統計資料の層化を目的とする問題

§ 2. 因子分析法での問題点

多変量解析に共通した問題点を上で述べてきたので、ここでは、一つの具体例として因子分析法の場合の諸問題を考えてみる。

この因子分析法も、最近、いろいろな分野に適用され、内因する共通因子を探索して、現象の構造を説明するのに役立

てられている。しかし、数理論的に、なほ多くの問題をかかえていることは周知の通りで、次ぎに主だった事項をあげてみよう。

いま、記号の約束として、 x を p 次観測値ベクトル、 $A \equiv (a_{ij})$ を $p \times q$ 因子負荷行列、 f を q 次因子評点ベクトル、 e を p 次誤差ベクトルとして、 x を次式

$$x = Af + e$$

で示す。また、通常のように、 r_{ii} を x に関する標本相関行列 R の (i, i) 要素、母相関行列を $P = AA' + \Psi$ 、共有性を H^2 、因子構造を Q 、因子パターンを Φ とし、これらの推定量には、 $\hat{}$ を附しておく。

(1) internal factor analysis

(1) 一因子解法、二因子解法

これらの解は、一般的に $\hat{a}_k = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^p r_{ki} r_{ki}}{\sum_{i=1}^p r_{ii}} \right\}^{1/2}$

の形で与えられるが、このような統計量の妥当性及び性格については知れていない。

(2) 双因子解法

これについても、解として、 $\hat{a}_{i''} = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^p r_{ii} r_{ii}}{\sum_{i=1}^p r_{ii}} \right\}^{1/2}$

, $\hat{a}_{ik} = \left\{ 2 \sum (r_{ii} r_{ii} / r_{ii}) / (p-1)(p-2) \right\}^{1/2}$ 、こ

こに $\hat{r}_{ii} = r_{ii} - \hat{a}_i \hat{a}_{i''}$ が与えられているが、上の

(4)と同様のことが云える。さらに、この解法に関連して、観測変量の群分けに、所謂B係数法が提唱されている。観測変量の群分けは、屢々直面する興味ある問題であり、基準の異なる種々の方法があつてよいのであるが、B係数法の発想法にもとづく新たな基準や解法の研究が必要と思われ、現在のものでは満足出来ない。

(イ) 多群解法

この解法は斜交解及び直交解を与えるが、上の(1)と(4)と同様の吟味を必要とする。すなわち、先ず、 $v_j = \sum_{i \in G_j} x_i$, $w_{ij} = \sum_{i \in G_j} r_{ii}$, $w_{ij}' = \sum_{i \in G_j} w_{ij}'$ を求め、 $Q = (w_{ij} / \sqrt{w_{ij}'})$, $H = (r_{ij} r_{ij}')$ を定義する。このとき、斜交因子パターン $\hat{G} = Q H^{-1}$ であり、直交解は $\hat{G} T'$ で得られる。ここに T は $T T' = H$ なる三角行列。

(ロ) 成因分析法

相関行列の固有値と固有ベクトルの分布問題があり、漸近性でなく比較的小標本の場合が望まれる。そして、全般因子数 p の推測問題が主眼となる。

(ハ) 多因子解法

通常は、M. Lewley, K.G. Joreskog らの構造による最尤推定法が適用されるが、この際の $\hat{A}$ についての一意性の問題がある。 $\hat{A}$ の不定性の場合には、その後の直交又は斜交の回転手順を必要とし、各種回転基準の選択問題がある。また、因子数に関しては、Bartlett の χ^2 検定法があるが、この検出力にも可成りの問題を残している。

(2) external factor analysis

- (イ) 正準相関分析法
- (ロ) 正準分析法
- (ハ) 主因子分析法
- (ニ) 正準因子分析法
- (ホ) アルファ因子分析法

などが挙げられるが、これらは何れも固有値と固有ベクトルの分布問題と漸近的でない場合の推測理論の問題となる。

なほ、これらの他に *latent structure analysis* などの因子の抽出と解釈を目的とした解法があり、いずれも今後の統計数理的吟味を必要とするものが多い。

3.3. 因子分析法の一つの適用例

3種の色彩の配色感情を semantic differential により追求するため、性別と3種の背景を組合せた6群の統計資料について因子分析を行った。色彩サンプルは広範囲の配慮により100個を作成し、また評定尺度は38個を選定して、男女各60名に関し観測値を得た。解析手順は、性と背景別の各群ごとに、次ぎの順に行った。

1. 標本相関行列の計算と若干の検定
2. 主成分分析による因子数の吟味
3. M. Lawley の最尤推定法による因子負荷行列の推定と因子数に関する χ^2 検定
4. Quartimax 法及び Varimax 法による直交解
5. Oblimax 法及び Oblimin 法 (Covarimin 法, Biquartimin 法, Quartimin 法) による斜交解
6. 各斜交解による因子相関と交角の算出
7. 因子評点の推定

これらの結果、次ぎの知見が得られた。

- (a) 直交解。性と背景による6群に共通した感情因子として、「こころよさ (pleasantness)」, 「目立ち (contrast)」, 「はなやかさ (floridness)」, 「暖さ (warmth)」が見出され、共通しない感情因子とし

て、「若さ (youthfulness)」、「まとまり (balance)」が知れた。

- (ロ) 斜交解。斜交回転の結果は根元パターンにもとづく方が因子解釈に容易であり、「ところよさ」・「目立ち」・「はなやかさ」の感情因子はほぼ直交解に近く、その他の因子は「ところよさ」の因子軸に近く斜交していた。後者については、直交解よりも自然で適切な、ニュアンスに富む微妙な解釈をもたらすことが出来た。

- (ハ) 各因子別の因子評点の大きさ順の色彩サンプルの配列と因子解釈の吟味。
- (ニ) 色彩サンプルごとの因子評点による因子プロフィールの作成と層別の吟味。
- (ホ) 配色設計への展開。予め、各配色感情の因子評点を指定することによって、この感覚をめたす配色サンプルを示すことが出来た。

(以上の数表や色彩サンプルをスライドで示した)

§4. 電子計算機のプログラム・ライブラリーと応用システム

多変量解析を適用する際に電子計算機の利用は殆んど不可

に選択し適用するプログラム・システムについて紹介しよう。従来、実際問題の必要に応じ、個々のプログラムを毎回電子計算機に読み込ませ、諸解法のプロセスをオペレーターが操作していた。しかし、現在では予めライブラリーを納めた磁気テープから、必要なプログラムのプロセスをコントロール・カードで指示することによって、希望する一連の解法を自動的に継続実施し、最終の段階まで遂行してしまう。このような、プログラムの自動選択とプロセス遂行のシステムを、シオノギ応用プログラム・システム (SHI-AS) と呼び実用化している。

5. 判別問題における種々の立場

日常、頻度多く遭遇する多変量解析に、判別(診断・識別)や層別・分類の問題がある。これらは実質科学分野の人々に、最もわかり易くまた効用が期待されるからであろう。しかし、この種の問題は非常に多岐にわたり、幾つかの条件と仮定を考えると、適切な解法に迷うことも少なくない。しかも、結果の *performance* も直ちに検証される。また、このことは最近でも多種類の論文が発表されてきていることから伺うことが出来、生物統計の方でも *numerical taxonomy* として最近さかんである。

したがって、この種の問題を類型化し、性状を明らかにする目的で、私達の処で日頃収集して手許にある文献約100編をあげ、実際の現象の場における諸問題を提示する。

(文献表は附表Ⅱを参照)

§ 6. むすび

本日は、統計的多変量解析の適用について、非常に縦断的に急ぎ足で述べてきた。そして、統計的多変量解析の適用の立場からも、また現象解析や情報処理の立場からも、多変量解析の従来の諸法の理論的展開とさらに新しい方法論の開発が期待され、適用面では今後一層さかんになる気運にあると思われる。

なお、本日で紹介したライブラリーやシステム・プログラムなどは、他の何らかの機会に公開し、広範囲の方々のお役にたてば幸いと考えている。

(附表I) シオノギ精選ライブラリー・オ2巻

SHI-FACTAの目次

SHI-FACTA

No.

1. COMPONENT ANALYSIS

(Power method)

2. COMPONENT ANALYSIS

(Jacobi method)

3. CENTROID METHOD

(Optimizing diagonal elements)

4. CENTROID METHOD

(Iterative solution for diagonal)

5. CENTROID METHOD

(Unity in the diagonal)

6. MULTIPLE FACTOR SOLUTION

WITH TESTING NUMBER OF COMMON

FACTORS

(Maximum likelihood method and

Chi-square test)

7. ORTHOGONAL ROTATION BY QUARTIMAX

METHOD

8. ORTHOGONAL ROTATION BY KAISER'S VARIMAX

METHOD

9. ORTHOGONAL ROTATION BY MODIFIED VARIMAX
ROTATION

(Simultaneous factor varimax rotation)

10. ORTHOGONAL ROTATION BY MODIFIED VARIMAX
ROTATION

(Successive factor varimax rotation)

11. ORTHOGONAL ROTATION BY MODIFIED VARIMAX
METHOD

(Simultaneous factor general varimax)

12. ORTHOGONAL ROTATION BY MODIFIED VARIMAX
METHOD

(Successive factor general varimax rotation)

13. OBLIQUE ROTATION BY OBLIMAX METHOD

14. OBLIQUE ROTATION BY GENERALIZED OBLIMIN
METHOD

(Including BIQUARTIMIN method, COVARIMIN
method, QUARTIMIN method and Methods for
arbitrary values of oblimin criterion)

15. OBLIQUE ROTATION BY KAISER-DICKMAN
METHOD

16. PRIMARY FACTOR PATTERN, THE STRUCTURE,
THE REFERENCE FACTOR PATTERN, THE
STRUCTURE, THE FACTOR CORRELATION
MATRIX AND THE ANGLES AMONG AXES

(Starting from a primary factor pattern and the
transformation matrix)

17. FACTOR SCORES

(By an Immediate use of a coefficient matrix
on variables or by applying an Ideal-variables
method based on a primary factor pattern)

18. ESTIMATION OF FACTOR SCORES

(By the Method of regression (Shortened method)
or by the Method of minimizing residuals)

19. PROFILES FOR FACTOR SCORES

(Drawing a profile based on several kinds of
factor scores)

20. TWO-FACTOR SOLUTION

(By the Summation method or by the Method
of triads)

21. GROUPING OF VARIABLES

(By the Method of B-coefficients)

22. BI-FACTOR SOLUTION

(General - and group - factor coefficients
and the residual correlation matrix)

23. MULTIPLE - GROUP SOLUTION
(The Oblique solution)
24. MULTIPLE - GROUP SOLUTION
(The Orthogonal solution)
25. TETRACHORIC CORRELATION COEFFICIENT
MATRIX WITH COMBINATORIAL CONTINGENCY
TABLES.
26. GAUSS DOOLITTLE SOLUTION
27. SQUARE ROOT METHOD
28. CANONICAL CORRELATION ANALYSIS
29. TESTING THE SIGNIFICANCE OF CANONICAL
CORRELATIONS
30. TEST OF CANONICAL COEFFICIENTS AND THE
REMAINDER CANONICAL COEFFICIENTS
31. CANONICAL ANALYSIS
32. PRINCIPAL FACTOR ANALYSIS
33. CANONICAL FACTOR ANALYSIS
34. ALPHA FACTOR ANALYSIS

(附表Ⅱ) 判別問題に関する参考文献(当方所持のもの)

1. Noel Wallace and R. M. W. Travers, "A psychometric sociological study of a group of speciality salesmen", *Ann. Eugenics*, (1938), pp. 266-302.
2. R. M. W. Travers, "The use of a discriminant function in the treatment of psychological group differences", *Psychometrika* (1939), pp. 25-32.
3. R. A. Fisher, "The precision of discriminant functions", *Ann. Eugenics*, Vol. 10 (1940), pp. 422-429.
4. Henry E. Garrett, "The discriminant function and its use in psychology", *Psychometrika*, Vol. 8, No. 2 (1943), pp. 65-79.
5. Geoffery Beall, "Approximate methods in calculating discriminant function", *Psychometrika*, Vol. 10, No. 3, (1945), pp. 205-217.
6. R. V. Mises, "On the classification of observation data into distinct groups", *A.M.S.*, Vol. 16 (1945), pp. 68-79.
7. Cedric A. B. Smity, "Some examples of discrimination", *Ann. Eugenics*, (1947), pp. 272-283.
8. George W. Brown, "Discriminant function", *A.M.S.*, 18 (1947), pp. 514-528.
9. L. S. Penrose, "Some notes on discrimination", *Ann. Eugenics*, (1947), pp. 228-237.
10. Paul G. Hoel, "Discriminating between binomial distributions", *A.M.S.*, Vol. 18 (1947), pp. 556-564.
11. Robert J. Wherry, "Multiple Bi-Serial and Multiple point Bi-Serial Correlation", *Psychometrika*, Vol. 12, No. 3 (1947) pp. 189-195.
12. Cochran, W. G. and Bliss, C. I., "Discriminant functions with covariance", *A.M.S.*, Vol. 19 (1948), pp. 151.
13. A. Lubin, "Linear and Non-Linear Discriminating Functions", *The British Journal of Statistical Psychology*, Vol. 3 (1950), pp. 90-103.
14. Palmer O. Johnson, "The quantification of quantitative data in discriminant analysis", *J.A.S.A.* Vol. 45(1950), pp. 65-76.
15. Paul Horst and Stevenson Smith, "The discriminant of two racial samples", *Psychometrika* Vol. 15, No. 3 (1950), pp. 271-289.
16. David V. Tied, "The utility of the discriminant function in psychological guidance investigations", No. 2, Vol. 21 (1951), pp. 71-79.

17. J. L. Hodges, Jr., "Nonparametric discrimination: Small sample performance", *Discriminatory Analysis USAF School of aviation medicine, Randolph Field, Texas* Vol. 16 No. 1 (1951), pp. 1-50.
18. T. W. Anderson, "Classification by multivariate analysis", *Psychometrika*, Vol. 16 No. 1 (1951) pp. 31-50.
19. Rulon, P. J., "Distinction between discriminant and regression analysis and a geometric interpretation of the discriminant function.", *Harvard Educ. Review*, Vol. 21 (1951), pp. 80-90.
20. Bryan, J. G., "The generalized discriminant function: Mathematical foundation and computational routine", *Harvard Educ. Review*, Vol. 21 (1951), pp. 90-95.
21. C. Radhakrishna Rao, "Tests of Significance in Multivariate Analysis", *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*, John Wiley & Sons, chapter. 7 (1952), pp. 236-272.
22. Rao, C. R., "Advanced Statistical Methods In Biometric Research", John Wiley & Sons (1952)
23. C. Radhakrishna Rao, "A General theory of discrimination when the information about alternative population distributions is based on samples", *A.M.S.*, Vol. 25 (1954), pp. 651-670.
24. M. Tatsuoka and V. Tiedeman, "Discriminant analysis", *Rev. Educ. Res.*, Vol. 24 (1954), pp. 402-420.
25. B. Opsahl, "The discrimination of interactions and linkage in continuous variation", *Biometrics*, Vol. 12 (1956), No. 3, pp. 415-432.
26. Fairfield, Smith, M.S.A., "A discriminant function for plant selection", *Ann. Eugenics*, (1956), pp. 240-250.
27. Kendall, M.G., "A Course In Multivariate Analysis", Charles Griffin and Co. (1957).
28. G. E. P. Box and W. J. Hill, "Discrimination among mechanistic models", *Technometrics*, Vol. 9, No. 1, (1967), pp. 57-72.
29. A. G. Constantine and A. T. James, "On the general canonical correlation distribution", *A.M.S.*, Vol. 30 (1958), pp. 1146-1166.
30. R. E. Beshhofer, "A sequential multiple-decision procedure for selecting the best one of several normal populations with a common unknown variance, and its use with various experimental designs", *Biometrics*, Vol. 14 (1958), No. 3, pp. 408-429.

31. Alan T. James', "The distribution of the latent roots of the covariance matrix", A.M.S., Vol. 31 (1959), pp. 151-158.
32. H. Linhart, Johannesburg. "Techniques for discriminant analysis with discrete variables", *Metrika* (1959), pp. 138-149.
33. Slater, "Canonical Analysis of Discriminance", chapter. 7, *Experiments In Personality*, Vol. 2 (1960) pp. 256-270.
34. A. P. Dempster, "A significance test for the separation of two highly multivariate small samples", *Biometrics*, Vol. 16 (1960), No. 1, pp. 41-50 also p.492 partially corrected.
35. Robert G. Miller, "An application of multiple discriminant analysis to the probabilistic prediction of meteorological conditions effecting operational decisions", Technical memorandum No. 4, (1961) Travelers Research Center Inc., Harvard, Conn.
36. S. John, "Errors in discrimination", A.M.S., Vol. 32, No. 4 (1961), pp. 1125-1144.
37. W. G. Cochran and C. E. Hopkins, "Some classification problems with multivariate qualitative data", *Biometrics*, Vol. 17 (1961), pp. 10-32.
38. N. E. Day and D. F. Kerridge, "A general maximum likelihood discriminant", *Biometrics*, Vol. 23 (1967), No. 2, pp. 313-323.
39. Cooley, W. W. and Lohnes, P. R., "Multivariate Procedures For The Behavioral Sciences, John Wiley & Sons (1962).
40. H. Smith, R. Gnanadesikan and J. B. Hughes, "Multivariate analysis of variance", *Biometrics*, Vol. 18 (1962), No. 1, pp. 22-41.
41. A. A. Lubishew, "On the use of discriminant functions in taxonomy", *Biometrics*, Vol. 18 (1962), No. 3, pp. 455-477.
42. Robert R. Sokal, "Distance as a measure of taxonomic similarity", *Systematic zoology*, Vol. 10, (1964), pp. 70-79.
43. William G. Cochran, "On the performance of the linear discriminant function", *Technometrics*, Vol. 6 No. 2 (1964), pp. 179-190.
44. Seal, H. L., "Multivariate Statistical Analysis For Biologists", Methuen & Co. (1964)
45. M. J. R. Healy, "Computing a discriminant function from within-sample dispersions", *Biometrics*, Vol. 21 (1965), No. 4, pp. 1011-1012.
46. O. J. Dunn and P. D. Varady, "Probabilities of correct classification in discriminant analysis", *Biometrics*, Vol. 22 (1966), No. 4, pp. 908-924.

47. T. P. Burnaby, "Growth-invariant discriminant functions and generalized distances", *Biometrics*, Vol. 22 (1966), No. 1, pp. 96-110.
48. J. M. Weiner and O. J. Dunn, "Elimination of variates in linear discrimination problems," *Biometrics*, Vol. 22 (1966), No. 2, pp. 268-275.
49. Kendall, M. G. and Stuart, A., "The Advanced Theory Of Statistics", Vol. I, II, III, Ch. Griffin (1966)
50. E. M. Cramer and R. D. Bock, "Multivariate analysis", *Review of Educational Research*, Vol. 36, No. 5, (1966), pp. 604-613.
51. D. J. Clyde, E. M. Cramer and R. J. Sherin, "Multivariate Statistical Programs", (1966), Univ. of Miami Press.
52. P. K. Krishniah (ed.), "Multivariate Analysis", Academic Press (1966)
53. D. F. Morrison, "Multivariate Statistical Methods", McGraw Hill (1967)
54. C. Spearman and K. Holzinger, "The sampling error in the theory of two factors", *Brit. J. of Psychology*, vol. 15 (1924), pp. 17-19.
55. M. M. Barnard, M. A., B. Sc., "The secular variations, of skull characters in four Series of Egyptian skulls", *Ann. Eugenics*, (1935) pp. 352-371.
56. R. A. Fisher, Sc.D., F. R. S., "The use of multiple measurements in taxonomic problems.", *Ann. Eugenics*, (1936) pp. 179-188.
57. G. F. Kuder and M. W. Richardson, "The theory of the estimation of test reliability", *Psychometrika*, vol. 2 (1937) No. 3, pp. 151-160.
58. M. S. Bartlett, "The statistical significance of canonical correlations", *Biometrika* vol. 32 (1941) pp. 29-38.
59. Louis Guttman, "A Basis for analyzing test-retest reliability", *Psychometrika*, vol. 10 No. 4, (1945), pp. 255-282.
60. M. S. Bartlett, "Internal and External Factor Analysis", *The British Journal of Statistical Psychology*, vol. 1 (1948), pp. 77-87.
61. Paul F. Lazarsfeld, "The Logical and Mathematical foundation of Latent Structure Analysis", "Measurement and Prediction", Chap. 10, Princeton U. Press, (1950) pp. 362-412.
62. Bert F. Green, Jr., "A general solution for the latent class model of latent structure analysis", *Psychometrika* Vol. 16 No. 2 (1951) pp. 151-166.

63. L. J. Cronbach, "Coefficient alpha and the internal structure of tests", *Psychometrika*, Vol. 16 (1951) No. 3, pp. 297-334.
64. J. P. Guilford and M. C. Perry, "Estimation of other coefficients of correlation from the phi coefficient", *Psychometrika*, vol. 16 (1951) No. 3, pp. 149-150.
65. Bert F. Green, Jr., "Latent Structure analysis and its Relation to Factor Analysis", *J.A.S.A.*, Vol. 47 (1952), pp. 71-76.
66. Paul F. Lazarsfeld, "A conceptual introduction to latent structure analysis", Chap. 7, *Mathematical Thinking In The Social Sciences*, (1954) pp. 349-387.
67. T. W. Anderson, "On estimation of parameters in latent structure analysis", *Psychometrika*, Vol. 19, No. 1 (1954) pp. 1-10.
68. T. W. Anderson, "Probability models for analyzing time changes in attitudes", Chap. 1, *Mathematical Thinking In The Social Sciences*, Free Press, (1954), pp. 17-66.
69. L. J. Cronbach and W. Hartmann, "A note on negative reliabilities", *Educ. Psychol. Measurement*, vol. 14 (1954), pp. 342-346.
70. W. A. Gibson, "An extension of Anderson's solution for the latent structure equations", *Psychometrika*, Vol. 20 No. 1 (1955), pp. 69-73.
71. C. Rao Radhakrishna, "Estimation and tests of significance in factor analysis", *Psychometrika*, Vol. 20, No. 2, (1955), pp. 93-111.
72. T. W. Anderson and Herman Rubin, "Statistical inference in factor analysis", *Proceedings of the 3-rd Berkley symposium*, Vol. 5 (1956) pp. 111-150.
73. Paul F. Lazarsfeld, "Recent Developments in Latent Structure Analysis", *Sociometry And The Science Of Men*, (1956), Beacon House, pp. 647-659.
74. Richard B. McHugh, "Efficient estimation and local identification in latent class analysis", *Psychometrika*, Vol. 21 No. 4 (1956) pp. 331-347.
75. W. A. Gibson, "Proportional profiles and latent structure", *Psychometrika*, Vol. 21 No. 2 (1956), pp. 135-144.
76. James J. McKeon, "Canonical Analysis: Some relations between canonical correlation, factor analysis, discriminant function analysis and scaling theory", *Psychometrika Monographs* (1957) pp. 1-43.
77. A. G. Constantine and Alan T. James, "On the General canonical Correlation Distribution", *A.M.S.* (1958) pp. 1146-1166.
78. H. R. Beech and A. E. Maxwell, "Differentiation of clinical groups using canonical variates", *Journal of Consulting Psychology*, Vol. 22 No. 2, (1958), pp. 113-121.

79. P. J. Cloringbold, "Multivariate Quantal Analysis", J.R.S.S., Vol. 20 No. 2 (1958). pp. 398-405.
80. W. S. Torgerson, "Multidimensional Scaling", Theory and Methods of Scaling, (1958) pp. 247-297.
81. W. A. Gibson, "Three multivariate models: Factor analysis, latent structure analysis, and latent profile analysis", Psychometrika, Vol. 24 No. 3 (1959) pp. 229-52.
82. T. W. Anderson, "Some stochastic process models for intelligence test scores", Chap. 14, Mathematical Methods In The Social Science Symposium (1959), pp. 205-220.
83. T. W. Anderson, "Some scaling models and estimation procedures in the latent class model", Probability and Statistics, Almqvist and Wicksell, (1959) pp. 9-38.
84. P. Slater, "Factor Analysis and some Allied Procedures", Chapter 6, Experiments In Parsonality, Vol. 2 (1960) pp. 247-255.
85. Albert Madansky, "Determinantal methods in latent class analysis", Psychometrika, Vol. 25 No. 2 (1960), pp. 183-198.
86. A. E. Maxwell, "Canonical variate analysis when the variables are dichotomous", Educational and Psychological Measurement, Vol. 21 No. 2 (1961), pp. 259-271.
87. Curtis R. Miller, Richard K. Eyman, Harvey F. Dingman, "Factor analysis, latent structure analysis and mental typology", The British Journal of statistical Psychology, Vol. 14 (1961), pp. 29-34.
88. Paul F. Lazarsfeld, "The Algebra of dichotomous systems", Chap. 8, Studies In Item Analysis And Prediction, (1961), Stanford U. Press, pp. 111-157.
89. O. R. Miller, G. Sabagh, and H. F. Dingman, "Latent class analysis and differential mortality", J.A.S.A., (1962), pp. 430-438.
90. W. A. Gibson, "Latent structure and positive manifold", The British Journal of Statistical Psychology, Vol. 15 Part 2 (1962), pp. 149-160.
91. J. S. Williams, "The evaluation of a selection index", Biometrics, Vol. 18 (1962), No. 3, pp. 375-393.
92. L. J. Cronbach, N. Rajaratnam and G. C. Gleser, "Theory of generalizability: A liberalization of reliability theory", The British Journal of Statistical Psychology, Vol. 16 (1963) Part 2, pp. 137-163.
93. T. W. Anderson, "The use of factor analysis in the statistical analysis of multiple time series", Psychometrika, Vol. 28 No. 1, (1963), pp. 1-25.

94. A. P. Dempster, "Stepwise multivariate analysis of variance based on principal variables", *Biometrics*, Vol. 19 (1963) No. 3, pp. 478-490.
95. R. B. Cattell, "Factor analysis: An introduction to essentials (I)", *Biometrics*, Vol. 21 (1965) No. 1, pp. 190-215.
96. A. W. F. Edwards and L. L. Cavalli-Sforza, "A method for cluster analysis", *Biometrics*, Vol. 21 (1965) No. 3, pp. 362-375.
97. R. B. Cattell, "Factor analysis: An introduction to essentials (II)", *Biometrics*, Vol. 21, (1965), No. 3, pp. 405-435.
98. S. R. Searle, "The value of indirect selection: (I) Mass selection", *Biometrics*, Vol. 21, (1965), No. 3, pp. 682-707.
99. J. R. Ashford and C. S. Smith, "An alternative system for the classification of mathematical models for quantal responses to mixtures of drugs in biological assay", *Biometrics*, Vol. 21 (1965), No. 1, pp. 181-188.
100. H. F. Kaiser, "Alpha factor analysis", *Psychometrika*, Vol. 30 (1965), No. 1, pp. 1-14.
101. R. Rouvier, "L'analyse en composantes principales: Son utilisation en genetique et ses rapports avec l'analyse discriminatoire", *biometrics*, Vol. 22 (1966), No. 2, pp. 343-357.
102. Fortier, J. J. and Solomon, H., "Clustering Procedures", *Proc. Symp. Multiv. Analysis*, Dayton, Ohio (1966)
103. B. Fruchter, "Introduction To Factor Analysis", D. Van Nostrand Company, Inc. (1967).
104. R.R. Sokal and P.H.A. Sneath, "Poinciples of Numerical Taxonomy", W.H. Freeman & Co. (1963). with many references.

(おわり)