

4次元多様体の exotic PL automorphism とその応用

東大 福原 真二

§1. Introduction

$S^3 \times T^2$ 上には、互に相異なる PL structure が、丁度二つ入る。そのうち exotic な structure を一つ取り、考察するところがあり、その結果を述べる。

Theorem 1.

(S_1) 及び (S_2) をそれぞれ次の命題とする。

(S_1) : $S^3 \times T^2$ の self PL π -cobordism は product である。

(S_2) : $S^1 \times S^3$ と同じ homotopy type を持つ closed PL manifold は $S^1 \times S^3$ に PL homeomorphic である。

なお (S_1) 及び (S_2) のうち、少なくとも一方は誤りである。

この Theorem の証明は、Fukuhara [4] の

Theorem 5 の (H_2) と上の Theorem 1 の (S_2) とは同様な命

題であることはより明らかである。 $k=32$: Wall [8] の simply connected 5-dimensional s -cobordism に関する結果は, non-simply connected の場合にも拡張できる。次のことがわかる。

Theorem 2

M, N を互に h -cobordant な closed PL 4-manifold とする。このとき, 適当な $k \geq 0$ に決れば, $M \# k(S^2 \times S^2)$ は $N \# k(S^2 \times S^2)$ に PL homeomorphic である。

Theorem 1 と 2 を合せるとはより, われわれは, 次予想を立てることも可能だろう。

Conjecture

適当な k に決れば, $S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2)$ と同様に,

homotopy type を持つ, closed PL manifold である $S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2)$ と PL homeomorphic ではないものが存在する。

この論文で, われわれは, $S^3 \times T^2$ 上の exotic structure

を考えることにより、上の予想に(東)連したある結果をみちびく。

2. Exotic PL automorphism of 4-manifold

Definition

$M \in \text{PL manifold}$, f を M の PL automorphism
すなわち M から M 自身への PL homeomorphism とする。

このとき、 f が exotic であるとは、

- ① f は topologically pseudo-isotopic to the identity
- ② f は PL pseudo-isotopic to the identity ではない。

場合をいう。

Example 1

T^n ($n \geq 6$) 上には、exotic PL structure
が入る。さらに知られた。 T^n ($n \geq 5$) には、

exotic PL automorphism が存在する。

(Wall - Hsiang - Shaneson - Ceranawski)

Example 2

$S^2 \times T^{n-2}$ ($n \geq 5$) には, exotic PL automorphism が, 存在するとか. Fukuhara [4] と n -dimensional 1-cobordism theorem より容易にわかる。

$S^2 \times T^2$ には exotic PL automorphism が存在するかどうかは, 非常に興味のある問題. これは, 4次元 Poincaré 予想や, 4-2 unknotting problem が, 深くかかわっている. わかちの結果は, 次の通りである。

Theorem 3

- ① 適当な $k \geq 0$ に對して, $S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)$ の PL automorphism f ~~は~~^が, exotic なものが存在する。
- ② f の任意の covering は, $D^3 \times T^2 \subset k(D^3 \times S^2)$ の対応する covering manifold の PL automorphism に extend するとか. 2次元は。

Theorem 3 の証明は. 何れも (1) の Hudson [3] の
unknotting theorem moving the boundary を用いる。

Theorem 4 (Hudson)

M^m, Q^q を m, q -次元 PL manifold と
する。ただし M は compact。 $M, \partial M$ は connected。

$f, g: (M, \partial M) \rightarrow (Q, \partial Q)$ と。

$(M, \partial M) \rightarrow (Q, \partial Q)$ を pair map とし。

homotopic な proper PL embedding
とある。 以下に。

- ① $q-m \geq 3$ ② $(M, \partial M)$ は $2m-q+1$ -connected
③ $(Q, \partial Q)$ は $2m-q+2$ -connected
とある。

以上の仮定のもとに。 f と g は ambient
isotopic である。

Proof of Theorem 3.

$(S^3 \times T^2)_\beta \in S^3 \times T^2$ is exotic PL structure
 を与えるものがある。 $S^3 \times T^2$ を分解し。

$D_1^3 \times T^2 \cup S^2 \times T^2 \times I \cup D_2^3 \times T^2$ と考えよう。 $n \geq 2$ 。

"id" : $S^3 \times T^2 \longrightarrow (S^3 \times T^2)_\beta$ is isotopic

to homeomorphism h である。 $h|_{D_1^3 \times T^2 \cup D_2^3 \times T^2} = \text{PL}$

であるものか。 0, 1, 2-handle の straightening
 により存在する。 $H = h(S^2 \times T^2 \times I)$ とおく。

H は $S^2 \times T^2$ の self PL h -cobordism である。

handle-body の議論により。

$$H = (\partial_- H \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_n^2) \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I \\ \cup (\partial_+ H \cup k_1^2 \cup \dots \cup k_n^2)$$

なる分解が存在する。 以下、 $\partial_- H = h(\partial D_1^3 \times T^2)$

$\partial_+ H = h(\partial D_2^3 \times T^2)$ 。 h_i^2, k_i^2 は h と k である。

$\partial_- H, \partial_+ H$ は trivial かつ、互に disjoint に
 attach した 2-handle である。 以下。

$$h_i : (D^2 \times D^3, S^1 \times D^3) \longrightarrow (h_i^2, h_i^2 \cap \partial_- H)$$

$$k_i : (D^2 \times D^3, S^1 \times D^3) \longrightarrow (k_i^2, k_i^2 \cap \partial_+ H)$$

は PL homeomorphism である。

$$W_i = \partial_- H \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_n^2 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$W = W_n \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I$$

$$V_i = \partial_+ H \cup k_1^2 \cup \dots \cup k_n^2 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$V = V_n \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I$$

$$\partial_+ V = \partial_+ H \quad \partial_- V = \partial V - \partial_+ V$$

とある。

2-handle の straightening である。

$$h^{-1}: H \longrightarrow S^2 \times T^2 \times I \quad \text{と } \partial H \text{ を fix}$$

LT= isotopy $\approx$ isotopic $\approx$ homeomorphism

$$h': H \longrightarrow S^2 \times T^2 \times I \quad \approx.$$

$h'| W_n \cup V_n = PL$ なるものが存在する。

一方、 $S^2 \times T^2 \times I$ の handle-body 分解は次の通り。

$$(S^2 \times T^2 \times 0 \cup \overline{h_1^2} \cup \dots \cup \overline{h_n^2}) \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I \\ \cup (S^2 \times T^2 \times 1 \cup \overline{k_1^2} \cup \dots \cup \overline{k_n^2})$$

とある。ここで、 $\overline{h_i^2}$, $\overline{k_i^2}$ は、それぞれ、

$S^2 \times T^2 \times 0$, $S^2 \times T^2 \times 1$ に trivial $\approx$ disjoint $\approx$

attach した。2-handles $\approx$ $\overline{h_i^2}$ と $\overline{k_i^2}$ とは

Cancel する $\approx$ complementary pair $\approx$ である。

113 とある。 $\bar{h}_i, \bar{k}_i$ は h_i, k_i と同様に定まる。

$$\bar{W}_i = S^2 \times T^2 \times 0 \cup \bar{h}_i^2 \cup \dots \cup \bar{h}_i^2$$

$$\bar{W} = \bar{W}_n \cup \{ S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2) \} \times I.$$

$$\bar{V}_i = S^2 \times T^2 \times 1 \cup \bar{k}_i^2 \cup \dots \cup \bar{k}_i^2$$

$$V = V_n \cup \{ S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2) \} \times I$$

$$\partial_+ \bar{V} = S^2 \times T^2 \times 1, \quad \partial_- \bar{V} = \partial V - \partial_+ \bar{V}$$

とある。

$h' \circ h_1|_{D^2 \times 0}, \bar{h}_1|_{D^2 \times 0}$ は

$(D^2, S') \longrightarrow (S^2 \times T^2 \times I, S^2 \times T^2 \times 0)$ は

proper PL embedding 2- pair a map $\in L$

2 族 $\in L$ である。明らかに homotopic 2- である。

よって Theorem 4 と regular neighbourhood の uniqueness により h' と isotopic な

homeomorphism $h'' : H \longrightarrow S^2 \times T^2 \times I$ 2-

次の条件を満たすものが存在する。

- ① $h''(W_i) = \bar{W}_i$
- ② $h''|_{W_n \cup V_n} = PL$
- ③ $h''|_{\partial_- H}$ と $h'|_{\partial_- H}$ は PL isotopic
- ④ $h''|_{\partial_+ H} = h'|_{\partial_+ H}$

≈ 2 .

$$H_2 = H - \bigcup_{j=1}^i h_j (D^2 \times \text{int } D^3)$$

$$\partial H_2 = \partial H - \partial_+ H$$

$$\bar{H}_2 = S^2 \times T^2 \times I - \bigcup_{j=1}^i \bar{h}_j (D^2 \times \text{int } D^3)$$

$$\partial \bar{H}_2 = \partial \bar{H}_2 - S^2 \times T^2 \times 1$$

とある。

次に $h''|_{H_1} : H_1 \rightarrow \bar{H}_1$ にかゝる。

$h''|_{H_1}$ は isotopy 2- 動かした。 h_2^2 と $\bar{h}_2^2$ は -2π だけ異なることを考へる。

$h'' \circ h_2|_{D^2 \times 0}$, $\bar{h}_2|_{D^2 \times 0}$ は。

$(D^2, S') \rightarrow (\bar{H}_1, \partial \bar{H}_1)$ なる proper

PL embedding 2- pair of map として。

homotopic 2- ある。 2- である。

$$\pi_2(\bar{H}_1, \partial \bar{H}_1) = \pi_2(\partial \bar{H}_1 \cup 3\text{-handle}, \partial \bar{H}_1)$$

$= 0$ である。 2. Theorem 4 は regular neighbourhood の uniqueness である。

$h''|_{H_1}$ は isotopic 2- $h''' : H_1 \rightarrow \bar{H}_1$ 2- である。

次の条件を満たすものが存在する。

- ① $h'''(\partial H_1 \cup h_2^2) = \partial \bar{H}_1 \cup \bar{h}_2^2$
- ② $h'''|_{\partial - H_1 \cup h_2^2 \cup \dots \cup h_n^2 \cup V_n} = PL$
- ③ $h'''|_{\partial - H_1}$ と $h''|_{\partial - H_1}$ とは PL isotopic
- ④ $h'''|_{\partial + H} = h'|_{\partial + H}$

以下、 $\pi_2(\bar{H}_i, \partial - \bar{H}_i) = \pi_2(\partial - \bar{H}_i \cup 3\text{-handles}, \partial - \bar{H}_i)$

$= 0$ に注意して、 h_{i+1}^2 と $\bar{h}_{i+1}^2$ と "1層だけ

重ねる" により、ccccは、

$g: V \longrightarrow \bar{V}$ なる homeomorphism 2-
次の条件を満たすものを選び。

- ① $g|_{\partial - V \cup V_n} = PL$
- ② $g|_{\partial + H} = h'|_{\partial + H}$
- ③ $g|_{\partial - V}: \partial - V \longrightarrow \partial - \bar{V}$ は、

$h(D_1^3 \times T^2) \cup W_n$ から、 $D_1^3 \times T^2 \cup \bar{W}_n$ への

PL homeomorphism に extend できる。

さらに、条件④ として、 $\partial + V$ の一葉と $\partial - V$ の一葉を

結ぶ。PL properly embedded arc l

2- l の regular neighbourhood $N(l)$ を

$\bigcup_{i=1}^n k_i^2$ と disjoint になるような ϕ と $\bar{\phi}$ 適当にとり、

$$g|_{N(\ell)} = \text{PL} \text{ かつ } g(N(\ell)) \cap \bigcup_{i=1}^n \bar{k}_i^2 = \emptyset$$

なる条件を追加しておく。

このように ℓ の存在は general position の議論

より明らかである。 $g|_{N(\ell)}$ が PL になるためには、

1-handle の straightening を行えばよい。

今までの議論より、 $(S^3 \times T^2)_\beta$ が、

$D^3 \times T^2 \hookrightarrow n(D^3 \times S^2)$ の $\Rightarrow$ の copy $\in$ Σ の boundary Σ 。 あるいは PL homeomorphism $\Sigma \rightarrow \Sigma$ により合せたものになることは確かである。

したがって、これは $g: V \rightarrow \bar{V}$ なる homeomorphism を isotopy Σ 適当に動かして、 V_n と $\bar{V}_n$ が重なるように Σ を動かして考える。 そのためには、 g を Σ 上で Σ として Σ と Σ のように、 k_i^2 と $\bar{k}_i^2$ とを isotopy Σ により一致させていくことは、 $g \circ k_i|_{D^2 \times 0}$ と $\bar{k}_i|_{D^2 \times 0}$ は、 $(D^2, S^1) \rightarrow (\bar{V}, \partial \bar{V})$ なる

pair of map とは一般には homotopic ではないが、
 g のときのように、 k_i^2 と $\bar{k}_i^2$ とは重なり合っていることは
 正しい。よって、 k_i^2 なる 2-handles を新しい
 handles と取りかき替へ、complementary な
 handle pair をつけ加えた。2. V の新しい
 handle-body 分解を考える。すなわち以下の
 通りである。

$\partial+V$ の一点 p と k_i^2 の一点 q を $\partial+V$ の中で arc として
 結ぶ。これを $\pi_2(V, \partial+V, p)$ の元と考へ、 a_i として
 表す。同様に $\partial+V$ の点 $g(p)$ と $\bar{k}_i^2$ の一点 r を
 $\partial+V$ の中の適当な arc として結ぶ。これを b_i として表す。

$\pi_2(V, \partial+V, g(p))$ の元と考へ b_i として表す。

$i_*: \pi_1(\partial+V) \rightarrow \pi_1(V)$ は isomorphism

である。 $\widehat{\partial+V}, \widehat{V}$ をそれぞれ $\partial+V, V$ の

universal covering とする。

$$\pi_2(V, \partial+V) \cong \pi_2(\widehat{V}, \widehat{\partial+V}) \cong H_2(\widehat{V}, \widehat{\partial+V})$$

$$\cong \underbrace{n\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus n\mathbb{Z} \oplus \cdots}_{\pi_1(\partial+V)} \quad \text{と表す。}$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ は

それぞれ $\pi_2(V, \partial V), \pi_2(\bar{V}, \partial \bar{V})$ の

$\mathbb{Z}[\pi_1]$ -module として free basis になっている。

また $\pi_1(\partial V)$ と $\pi_1(\partial \bar{V})$ は $\mathbb{Z}$ として同一視

し、これは π_1 と $\mathbb{Z} \subset \pi_1$ である。

$g: \pi_2(V, \partial V) \longrightarrow \pi_2(\bar{V}, \partial \bar{V})$ 及び

$\mathbb{Z}[\pi_1]$ -module isomorphism として basis

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$

を用いる。 $G = (g_{ij})$ は matrix として表される。

$g_{ij} \in \mathbb{Z}[\pi_1]$ である。

よく知られているように、 $\pi_1 \leq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ の Whitehead

group $Wh(\pi_1)$ は 0 である。また、 G の

$GL_n(\mathbb{Z}[\pi_1]) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[\pi_1]) \xrightarrow{\alpha} Wh(\pi_1)$

の image は 0 である。

また、 $\ker \alpha$ は elementary matrix として

$$\begin{pmatrix} \pm \sigma & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma \in \pi_1 \quad \text{及び matrix として}$$

generate $\pm$ the $GL(2[\pi_1])$ の subgroup である。

$\Rightarrow$ とは、適当な m に対し、

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = EU \quad \text{とかけると意味がある。}$$

ただし、 E は elementary matrix の finite product。 $U = \begin{pmatrix} \pm \sigma_1 & 0 \\ 0 & -1, -1 \end{pmatrix}$ $\sigma \in \pi_1$ である。

いま、 g が π_1 の元。 $g|N(l) = pl$ である。

$h_1 = \pi_1$ 。 $\text{int } N(l)$ の中。 h_1 は h_1 。 $N(l) \cap \partial V$

と。 $N(l) \cap \partial V$ は attach $\pm$ の 2-handles である。

complementary pair $\in m$ 組定まる。

これは $h_{n+1}^2, \dots, h_{n+m}^2$ 及び $h_{n+1}^2, \dots, h_{n+m}^2$ とする。 各 h_{n+i}^2 と

h_{n+i}^2 は complementary である。 各 h_{n+i}^2 と

h_{n+i}^2 は complementary である。 各 h_{n+i}^2 と

h_{n+i}^2 は h_{n+i}^2 である。 $(D^2 \times D^3, S^1 \times D^3)$ 及び

$(h_{n+i}^2, h_{n+i}^2 \cap \partial V)$ は PL homeomorphism

である。 また、

$$V_1 = V - \bigcup_{i=1}^m h_{n+i}^2 (D^2 \times \text{int } D^3)$$

$\bar{V}_1 = g(V_1)$ $\partial_+ V_1 = \partial_+ V$ $\partial_- V_1 = \partial V_1 - \partial_+ V_1$
 とする。

$g_1 = g|_{V_1} : V_1 \longrightarrow \bar{V}_1$ とおく。

k_{n+i}^2 の一変と $p \in \partial_+ V_1$ 中の arc ℓ_{n+i} を
 結ぶ。 $\pi_2(V_1, \partial_+ V_1)$ の元と考へ a_{n+i} を表わす。

$g_1(k_{n+i}^2) = \bar{k}_{n+i}^2$ とおく。 $\bar{k}_{n+i}^2 \in g(\ell_{n+i})$
 を結ぶ $\pi_2(\bar{V}_1, \partial_+ \bar{V}_1)$ の元と考へ b_{n+i} を表わす。

よって $(g_1)_* : \pi_2(V_1, \partial_+ V_1) \longrightarrow \pi_2(\bar{V}_1, \partial_+ \bar{V}_1)$

を basis $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m})$,

$(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m})$ を

matrix 表示すると $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$ とする。

一方 $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = E \cup$ とあった。

よって E と U に相当する命令だけ matrix

を修正するたため V_1 の 2-handlers.

k_i^2 を新しい handles と取りかき直すことを考へる。

よって 次のような 2 種類美区の手操作 (1), (2) を行う。

(イ) わかれかれは、 k_1^2 と k_2^2 とを arc $l_1 \cup l_2$ に Σ 上 connect したものを、 Σ 上 isotopy で動かしたものを新しい 2-handle $(k_1^2)'$ とし直す。= とか $\sim$ する。
 $(k_1^2)'$ は次の条件を満たすようにする。

① $(k_1^2)'$ は $\bigcup_{i=2}^{n+m} k_i^2$ と disjoint

② $\partial+V_1 \cup (k_1^2)' \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n+m} k_i^2 \right)$ の V_1 における regular neighbourhood は V_1 全体 $\sim$ する。

③ $(k_1^2)' \in \partial+V_1$ の中の適当な arc l_1' をとって $\pi_2(V_1, \partial+V_1)$ の元と見て a_1' と表わす。= のとき、 $a_1' = a_1 + a_2$ $\sim$ する。

(ロ) わかれかれは、 k_1^2 の -1 と p とを結ぶ l_1 のかわりに適当な arc l_1' をとって k_1^2 の -1 と p とを l_1' で結ぶ $\sim$ する。

$\pi_2(V_1, \partial+V_1)$ の中で、 a_1 は π_2 の元 σ を act させた $\sigma \cdot a_1$ となるように $\sim$ する。

以上の (1), (2) に代表する操作を有限回行うことは
 あり、これにより、次のように V_1 の部分となる handle-
 body 分解が存在する。

$$\textcircled{1} \quad V_1 = \partial + V_1 \cup (k_1^2)' \cup \dots \cup (k_{n+m}^2)'$$

$$\cup \{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times S^2)\} \times I$$

と表わす。 $k \in \mathbb{Z}$. $(k_i^2)'$ は $\partial + V_1$ に
 trivial かつ disjoint に attach する 2 -
 handles を表わす。

$$\textcircled{2} \quad (k_i^2)' \text{ の一葉を } p \in \partial + V_1 \text{ の中を適当に}$$

arc ℓ_i' を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ として $\pi_2(V_1, \partial + V_1)$

の π とし、 $a_i' (1 \leq i \leq n+m)$ と表わすとき、

$$(q_1)_* : \pi_2(V_1, \partial + V_1) \rightarrow \pi_2(\bar{V}_1, \partial \bar{V}_1) \text{ の}$$

basis $(a_1', \dots, a_n', a_{n+1}', \dots, a_{n+m}')$

$(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m})$ に対する

matrix を与える。 $1_{n+m} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ となる。

$$(k_1^2)' \in (D^2 \times D^3, S^1 \times D^3) \rightarrow ((k_1^2)', (k_1^2)' \cap \partial + V)$$

that PL homeomorphism exists. By the above discussion

$$g_1 \circ (k_1)' \mid D^2 \times 0, \quad \bar{k}_1 \mid D^2 \times 0 \text{ is.}$$

$(D^2, S') \rightarrow (V_1, \partial+V_1)$ is a pair map

which is homotopic to $\bar{k}_1$. By Theorem 4

regular neighbourhood and uniqueness

we have g_1 is isotopic to $g_2: V_1 \rightarrow \bar{V}_1$

such that the following conditions are satisfied.

$$(1) \quad g_2((k_1^2)') = \bar{k}_1^2$$

$$(2) \quad g_2 \mid \partial+V_1 \text{ is } g_1 \mid \partial+V_1 \text{ and PL isotopic}$$

$$(3) \quad g_2 \mid \partial V_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n+m} (k_i^2)' \right) = \text{PL}$$

$$(4) \quad g_2 \mid \partial-V_1 = g_1 \mid \partial-V_1$$

is.

$$V_{1,1} = V_1 - (k_1)'(D^2 \times \text{int } D^3)$$

$$\bar{V}_{1,1} = \bar{V}_1 - \bar{k}_1(D^2 \times \text{int } D^3)$$

$$\partial-V_{1,1} = \partial-V_1, \quad \partial+V_{1,1} = \partial V_{1,1} - \partial-V_{1,1}$$

$$\partial-\bar{V}_{1,1} = \partial-\bar{V}_1, \quad \partial+\bar{V}_{1,1} = \partial \bar{V}_{1,1} - \partial-\bar{V}_{1,1}$$

$$g_3 = g_2 \mid V_{1,1}: V_{1,1} \rightarrow \bar{V}_{1,1} \quad \text{is a.c.}$$

a_i', b_i ($2 \leq i \leq n+m$) に對應する

$\pi_2(V_{11}, \partial+V_{11})$, $\pi_2(\bar{V}_{11}, \partial+\bar{V}_{11})$ の元 $\in$

a_i'', b_i'' ($2 \leq i \leq n+m$) とする。このとき、

basis $(a_2'', \dots, a_{n+m}'')$, $(b_2'', \dots, b_{n+m}'')$

なる。 $(g_3)_\# : \pi_2(V_{11}, \partial+V_{11}) \longrightarrow \pi_2(\bar{V}_{11}, \partial+\bar{V}_{11})$

の matrix を示す。 $1_{n+m-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる

ありとわかる。次の diagram より容易にわかる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \pi_2(V_{11}, \partial+V_{11}) & & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 0 \rightarrow & \pi_2(\partial+V_1 \cup (k_1^2)', \partial+V_1) & \rightarrow & \pi_2(V_1, \partial+V_1) & \rightarrow & \pi_2(V_1, \partial+V_1 \cup (k_1^2)') & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow (g_2)_\# = (1) & & \downarrow (g_2)_\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow (g_2)_\# & \\
 0 \rightarrow & \pi_2(\partial+\bar{V}_1 \cup \bar{k}_1^2, \partial+V_1) & \rightarrow & \pi_2(\bar{V}_1, \partial+\bar{V}_1) & \rightarrow & \pi_2(\bar{V}_1, \partial+\bar{V}_1 \cup \bar{k}_1^2) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow (g_3)_\# & & \nearrow & & & \\
 & \pi_2(\bar{V}_{11}, \partial+\bar{V}_{11}) & & & & &
 \end{array}$$

以上により、わかることは $g_3 : V_{11} \longrightarrow \bar{V}_{11}$ は isotopy

で動かした、 $(k_1^2)'$ と $\bar{k}_1^2$ と一致させることができる

である。以下同様に $(k_i^2)'$ と $\bar{k}_i^2$ とを重なる

isotopy を inductive に構成していき、

最終的に、次のような homeomorphism であることがわかる。

$\bar{g}: \{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times S^2)\} \times I \hookrightarrow T^2$
 homeomorphism 2°. $\bar{g}|_{\partial} = p_L$.

$$= a \in \mathbb{Z}. \quad f = \left(\bar{g}|_{\{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times S^2)\} \times 1} \right)^{-1} \circ \\
\left(\bar{g}|_{\{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times S^2)\} \times 0} \right)$$

$\varepsilon. \{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times T^2)\} \times I$ a PL
 automorphism $\varepsilon \neq 1$ is not. $(S^3 \times T^2)_\beta$ is
 $S^3 \times T^2$ is PL homeomorphic to $T^2 \times T^2$ is not
 2°. f is. $D^3 \times T^2 \hookrightarrow (n+m)(D^3 \times S^2)$ a PL
 automorphism is extend 2° to $T^2 \times T^2$ is not
 1°. f is obvious topologically pseudo-
 isotopic to the identity 2° is not. $\bar{g}$ is not
 in π_1 is not. f is exotic 2° is not.

Theorem 3 of §2 is. $(S^3 \times T^2)_\beta$ is 17 kinds of covering
 is not exotic structure is not 2° is not. obvious.

g. e. d.

3.3. Non-trivial homotopy triangulation of 4-manifold.

2.2.7 の代わりに. Theorem 3 の exotic PL auto-morphism を使う. 4-dimensional homotopy triangulation の nontrivial element を構成する。

Definition

M は compact PL manifold とする. M の homotopy triangulation を次のように定義する。

(f, N) は次のような pair とする。

① N は compact PL manifold. ② $f: (N, \partial N)$

$\rightarrow (M, \partial M)$ は $f|_{\partial N} = \text{PL homeomorphism}$ かつ.

f は boundary を $f \cdot x$ に homotopy 2-homotopy equivalent.

すなわち. (f, N) と (f', N') かつ ①. ② を満たす pair と

しなす. 2.4.5 の (1) のように. 適当な PL homeomorphism

$g: N \rightarrow N'$ s.t. $f' \circ (g|_{\partial N}) = f$ なる. 次の diagram が

boundary を $f \cdot x$ に homotopy commute する ことをする。

$f: N \xrightarrow{\quad} N'$ 以上により定まる pair の同値類を

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N' \\ \downarrow f & \searrow f' & \\ M & & \end{array}$$

M の homotopy triangulation と定義し. $hT(M, \partial M)$ と記す。

Theorem 5

適当な $k \geq 0$ に対し, $\pi_1(T(S^2 \times S^1 \times I \# k(S^2 \times S^2)), \partial)$
 は非自明. $\pi_1(T(S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2)))$ は non-trivial
 element である。

この証明に, 我々は, Shaneson [6] の次の Theorem を
 使う。

Theorem (Shaneson)

M は closed PL 4-manifold として, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ とする。
 $\alpha \in \pi_1(M)$ による PL homeomorphism は, homotopic
 to the identity ならば, PL pseudo-isotopic
 to the identity である。

Proof of Theorem 5

f は Theorem 3 の証明で, construct したような,
 $S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)$ の exotic PL ^{auto}homeomorphism である。
 その任意の covering から, $D^3 \times T^2 \# k(D^3 \times S^2)$ の対応する
 covering の PL homeomorphism に extend できることを
 示さなければならない。finite covering をとることは容易で
 我々は, f は最初から次のような仮定をもうけることにする。

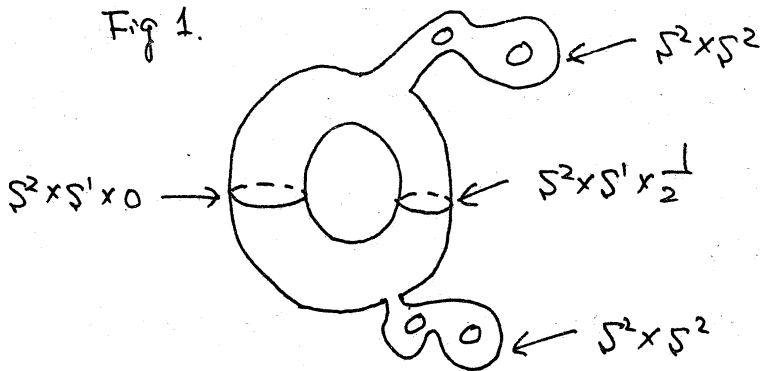
± 子。

(仮定: f is identity is a topological pseudo-isotopy $F: (S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times I \rightarrow \mathbb{Z}^n$.

$F(S^2 \times S' \times 0 \times I) \cap S^2 \times S' \times \frac{1}{2} \times I = \emptyset$ 仮定から存在
はない。 $F^{-1} \subset S^2 \times T^2 = S^2 \times S' \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と考えよう。

k 個の $S^2 \times S^2$ は $S^2 \times S' \times 0$ から出る。 $S^2 \times S' \times \frac{1}{2}$ には k 個の
 $\pm 3 \mathbb{Z}$ connected sum したものが存在する。(Fig 1)

Fig 1.



$= a \pm 3$. Siebenmann [7] の weak pseudo-isotopy
theorem により、

$F \times id_{S^1}: (S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times I \times S^1 \rightarrow \mathbb{Z}^n$ pseudo-isotopy
is, isotopy = deform する = $\pm 3 \mathbb{Z}$ である。 したがって、

$G: S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2) \times I \times S^1 \rightarrow \mathbb{Z}^n$ isotopy
(i.e. I -preserving homeomorphism) $\mathbb{Z}^n$.

$G|_{(S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times 1 \times S^1} = f \times id_{S^1}$

$G|_{(S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times 0 \times S^1} = id$

た子もなければ。 いる。

$$G(S^2 \times S' \times 0 \times I \times S') \cap S^2 \times S' \times \frac{1}{2} \times I \times S' = \emptyset \quad (= 2 \times 2).$$

次々。

$$G|_{S^2 \times S' \times 0 \times I \times S'} : S^2 \times S' \times 0 \times I \times S' \longrightarrow (S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times I \times S'$$

た子 isotopy と Edward - Kirby [1] の corening isotopy (= 24) . cover だ子。 だ子 45 .

$$G' : (S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)) \times I \times S' \supseteq \text{た子 isotopy } 2.$$

$$G'|_{S^2 \times S' \times 0 \times I \times S'} = G|_{S^2 \times S' \times 0 \times I \times S'}$$

$$G'|_{S^2 \times S' \times \frac{1}{2} \times I \times S'} = \text{id}$$

とた子もなければ存在する。

$S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)$ の中 24. $f(S^2 \times S' \times 0) \in S^2 \times S' \times 0 =$
bound する manifold と。 H_1, H_2 とする。 (Fig. 2)

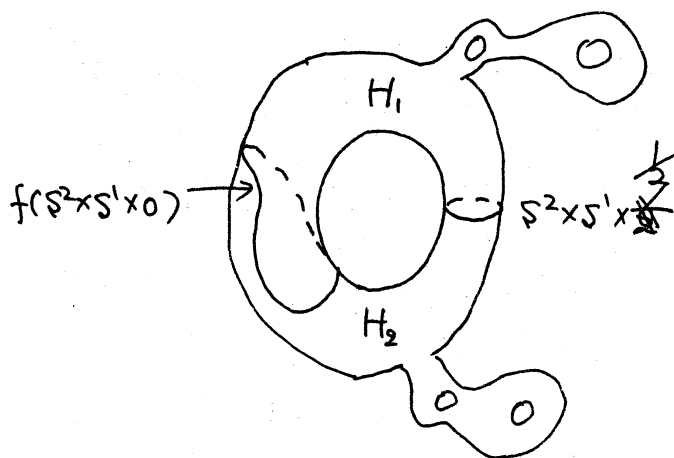


Fig. 2

$$g_i = (G' | H_i \times 1 \times S')^{-1}, \quad H_i \times S' \longrightarrow (S^2 \times S' \times I \# K(S^2 \times S^2)) \times S'$$

($i=1, 2$) とおく。

$$g_1|_{\partial H_1 \times S^1} = (f|_{S^2 \times S^1 \times 0})^{-1} \times \text{id}_{S^1} \cup \text{id}_{S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2} \times S^1}$$
$$\overline{g}_i: H_i \times \mathbb{R} \longrightarrow (S^2 \times S^1 \times I \# k'(CS^2 \times S^2)) \times \mathbb{R} \quad z_e$$

g_i a infinite cyclic covering $\exists \exists_0$

$\pi_i = p \circ \overline{g}_i \circ \iota \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, ι is the diagram $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{P}$ canonical projection & inclusion $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ccc} H_n \times R & \xrightarrow{\overline{g}_i} & (S^2 \times S^1 \times I \# K'(S^2 \times S^2)) \times R \\ i \uparrow & & p \downarrow \\ H_i & \xrightarrow{h_i} & S^2 \times S^1 \times I \# K'(S^2 \times S^2) \end{array}$$

$$h_i | \partial H_i = (f | S^2 \times S^1 \times 0)^{-1} \cup \text{id}_{S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2}} \quad \{ \tau_i \geq 2 \}$$

$= a(H_i, h_i) \in \pi_1(S^2 \times S^1 \times I \# p'(S^2 \times S^2), \partial)$ の
element である。 $= a$ と π による (H_i, h_i) の π による
trivial element である。 π による π である。

$k: S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2) \hookrightarrow T^2 \times PL$ homeomorphism

$$\bar{h}|_{f(S^2 \times S^1 \times 0)} = f^{-1}|_{f(S^2 \times S^1 \times 0)}$$

$$\bar{h}|_{S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2}} = \text{id}$$

• $\bar{h}$ は f^{-1} に homotopic

と仮定するものがある。

次の lemma を使うと、 f が $D^3 \times T^2 \hookrightarrow K(D^3 \times S^2)$ の PL homeomorphism に extend できず、矛盾が生じる。おなじく (H_i, h_i) ($i=1,2$) のうち、 $\neq 0$ である一方は、non-trivial element であることがわかる。

lemma.

$h, h \circ f$ は共に $D^3 \times T^2 \hookrightarrow K(D^3 \times S^2)$ の PL homeomorphism に extend できない。

proof of lemma

$h \in S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2}$ の $\varepsilon = 3/2$, $\text{tp}(1/\varepsilon) \parallel \bar{h}$ homeomorphism $\bar{h}$

$\bar{h}: S^2 \times S^1 \times I \# K(S^2 \times S^2) \hookrightarrow$ とする。

$\bar{h}|_{\partial} = \text{id}$ である。 $S^1 \times S^3 \# K(S^2 \times S^2) \in$

$S^1 \times D^3 \cup S^2 \times S^1 \times I \# K(S^2 \times S^2) \cup S^1 \times D^3$ は分解可能。

である。 $\bar{h}: S^3 \times S^1 \# K(S^2 \times S^2) \hookrightarrow$ は PL

homeomorphism $\bar{h} = \text{id}_{S^1 \times D^3} \cup \bar{h}|_{S^2 \times S^1 \times I \# K(S^2 \times S^2)} \cup \text{id}_{S^1 \times D^3}$

を定義する。 $\bar{h}$ は homotopic to id である。 Theorem 6 により、 $D^4 \times S^1 \# k(D^3 \times S^2)$ の PL homeomorphism に extend できる。 この PL homeomorphism を使って、 $\bar{h}$ の PL extension がある。
 $D^3 \times T^2 \hookrightarrow K(D^3 \times S^2)$ の PL homeomorphism を構成できる。 $h \circ f$ に同じように同様にできる。 lemma qed.

Theorem 5 の後半に関しては、

$h(T(S^2 \times S^1 \times I \# k(S^2 \times S^2), \partial))$ の non-trivial element (H_i, h_i) の $\partial H_i = S^1 \times S^2 \cup S^1 \times S^2 = S^1 \times D^3$ を作りつけよう。 Gluck [2] により、 $S^1 \times S^2$ の PL homeomorphism は homotopic to the identity であり、 isotopic to the identity であることに注意する。 この element は non-trivial であることがわかる。
 Theorem 5 qed.

references

1. Edwards, R.H. and Kirby, R. C.
 "Deformations of Spaces of Embeddings"
 Notes, U. C. L. A. 1969.
2. Gluck, H.
 "The embedding of 2-spheres in 4-sphere"
 Trans. Am. Math. Soc. 104 (1964) 303-333
3. Hudson, J.F.D.
 "Piecewise Linear Topology"
 Benjamin.
4. Fukuhara, S
 "On the Hauptvermutung of 5-dimensional
 manifolds and 5-cobordisms"
 (to appear)

5. Kirby, R.C.
"Lectures on triangulation of manifolds"
Notes, U.C. L.A. 1969
6. Shaneson, J.L.
"Non-Simply-connected surgery and
Some result in low dimensional topology"
7. Siebenman, L.C.
"Disruption of low dimensional handle
body theory by Rochlin's theorem"
Notes
8. Wall, C.T.C.
"On simply connected 4-manifold"
Proc. London. Math. Soc. 39 (1964) 141-149.