

3 次元定常乱流に於ける圧力場の統計性

名工大 落合 利徳 (Toshinori Ochiai)

名工大 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 背景

圧力場は流体を非圧縮に保ち、乱流騒音の源になり、さらには乱流拡散にも大きな影響を与えるなど、重要な物理量である。これまでの非圧縮性乱流の圧力場について、様々な興味深い結果が報告されている。乱流エネルギーの散逸率 ϵ と動粘性率 ν で規格化された圧力勾配の分散が、およそテイラーのマイクロスケールレイノルズ数 $R_\lambda^{1/2}$ で増加することや、圧力 p の PDF (確率密度関数) が負の歪み度を持っていることなどである。これらは圧力場や圧力勾配場がかなり間欠的になっていることと密接に関連している。

さて、Navier-Stokes 方程式からわかるように圧力勾配は連続の式を満たすように流体を変形させ、流体を加速させる。圧力はポアソン方程式

$$\nabla^2 p(\vec{x}) = S(\vec{x}) \equiv -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1)$$

の形で与えられ、この時圧力は

$$p(\vec{x}) \propto \int_V \frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \quad (2)$$

のように、体積積分の形で表される。これは物理空間において局所的な効果のみでなく非局所的な効果が統計に対し影響を及ぼすことを表しており、非圧縮性流体における圧力場の大きな特徴の1つとなっている。このことから、スケール r での特性、すなわち r 離れた2点での圧力差 δp_r 、圧力勾配差 $\delta \nabla p_r$ の統計を調べることは、乱流理論における重要な問題である。ところで、速度の差 δu_r の PDF $P(\delta u_r)$ も調べられていて、 $P(\delta u_r)$ は r が十分大きいときにはガウス分布に近いが、 r が小さくなるとガウス分布からずれる。しかし、この $P(\delta u_r)$ の振る舞いが、乱流の動力学とどのように関連するのかはまだ何も知られていない。Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} \quad (3)$$

で与えられるが、ここから速度差の方程式を導出すると

$$\frac{D\delta u}{Dt} = -\delta(\nabla p) + \nu \delta \Delta u + \text{terms.} \quad (4)$$

となる。 terms は今の文脈では重要でない項である。ここで粘性の影響が無視できる領域を考えると、圧力勾配差が速度差の関数としてわかると乱流の動力学を議論しやすい。そしてそこから δu_r の分布関数の形を議論できる可能性が見えてくる。そこで本研究では、速度差 δu_r を与えた時の圧力勾配差 $\delta \nabla p_r$ の条件付平均を求め、圧力の力学的役割を考える。

2 数値計算

定常乱流の実現方法

三次元の乱流は Navier-Stokes 方程式を直接数値的に解くこと (DNS) により実現されるが、そのままではエネルギーは減衰してしまう。本研究では統計的に定常な乱流を実現するために外力の項を加えた次式を用いる。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (5)$$

$\vec{f}$: Gaussian force (white noise in time)

(5) 式の右辺第三項が外力を表しており、低波数領域でエネルギーを励起する。境界条件は周期境界条件である。数値計算は空間に対してスペクトル法を採用した。本研究では 1 次元方向の Aliasing error は許すが、2 次元、3 次元方向の Aliasing error は取り除く方法をとった。外力は時間に関してホワイトで、ある波数帯 ($1 \leq k \leq 2$ or $2 \leq k \leq 3$) でのみ 0 でないパワースペクトルを持ち、Gauss 分布に従う場を使用した。また、時間発展には Runge-Kutta-Gill 法を用いた。本研究では、 512^3 や 1024^3 というきわめて解像度の高い数値シミュレーションを実現するために、ベクトル並列型計算機 (Fujitsu VPP700E at RIKEN, VPP5000 at Nagoya University Computation Center) を用いた。

一様等方性乱流に於ける統計的物理量

一様等方性乱流を考えることにより、テンソルで表されていた統計量がスカラー量で表され、乱流の統計的扱いが簡単化される。以下に代表的な統計的物理量を示す。

- エネルギー

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle |\vec{u}(\vec{x}, t)|^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad (6)$$

- 圧力勾配の分散 (乱流拡散に寄与)

$$F_{\nabla p}(R_\lambda) = \frac{\langle (\nabla p)^2 \rangle}{\bar{\epsilon}^{3/2} \nu^{-1/2}} \quad (7)$$

- エネルギー散逸率

$$\epsilon(t) = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \quad (8)$$

- 圧力スペクトル

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty E_p(k) dk \quad (9)$$

- 積分スケール

$$L = \left(\frac{3\pi}{4} \int_0^\infty k^{-1} E(k) dk \right) / E \quad (10)$$

- テイラーのマイクロスケール

$$\lambda = \left(5E / \int_0^\infty k^2 E(k) dk \right)^{1/2} \quad (11)$$

- マイクロスケールレイノルズ数

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{2E}{3}} \frac{\lambda}{\nu} \quad (12)$$

- エネルギー散逸スケール

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (13)$$

3 結果

DNS はこれまで、計算機能力によってレイノルズ数は比較的低いものに限られていた。しかし、近年の計算機の処理能力の飛躍的な向上により、今回は 1024^3 という高解像度で、 R_λ がおよそ 460 までの計算が実現でき、これらはともに世界最大である。

得られた乱流場の代表的な統計量を表 1 に示す。以後、各 run は R_λ で表すことにする。表 1 において、 $R_\lambda = 377$ の run の Eddy turnover time, T_{eddy}^{av} が 2.77 となっているが、ここまで計算するのにおよそ 500 時間を要した。

表 1: 乱流場の統計量

R_λ	E	ϵ	η	$k_{max}\eta$	λ	L	T_{eddy}^{av}
101	1.19	0.469	1.14×10^{-2}	1.38	2.26×10^{-1}	0.724	17.7
190	1.19	0.437	4.72×10^{-3}	1.14	1.28×10^{-1}	0.725	3.69
292	2.06	0.556	4.44×10^{-3}	1.07	1.49×10^{-1}	1.28	2.74
377	1.73	0.502	2.57×10^{-3}	1.24	9.83×10^{-2}	1.15	2.77
455	1.77	0.502	2.00×10^{-3}	0.965	8.39×10^{-2}	1.13	2.16

3.1 スペクトル

エネルギースペクトル

エネルギースペクトルについて、Kolmogorov の理論に従い次のようなスケーリングを行った。

$$E(k) = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} \phi(k\eta) \quad (14)$$

ここに ϕ は無次元関数である。このときのグラフを図 1 に示す。エネルギースペクトルは上のスケーリングにおいて、すべてのスペクトルがよく一致しているのがわかる。なお、この図は $(k\eta)^{5/3}$ をかけて $E(k) \propto k^{-5/3}$ でグラフが水平になるようにしてあり、 R_λ の増加とともに水平になる領域がある。ここが慣性領域であり、この値は 1.6 程度になるのがわかる。この水平になる位置の値が Kolmogorov 定数 K であり、 $R_\lambda = 377$ の run では $0.008 \leq k\eta \leq 0.04$ で 1.63 となった。Kolmogorov 定数 K の値はかなりばらつきがあるが、これまでの実験データを総合すると 1.62 ± 0.17 である (Sreenivasan 1995)。実験値と今回の DNS がかなり近い値をとることが確認できた。

圧力スペクトル

圧力スペクトルについて, Kolmogorov の理論に従い次のようなスケーリングを行った.

$$\begin{aligned} P(k) &= \epsilon^{3/4} \nu^{7/4} \phi(k\eta) \\ &= B_p \epsilon^{4/3} k^{-7/3}, \quad L^{-1} \ll k \ll \eta^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

このときのグラフを図 2 に示す. なおこの図は $(k\eta)^{7/3}$ をかけてある. K41 のスケーリングでは,

$$\epsilon^{-3/4} \nu^{-7/4} (k\eta)^{7/3} P(k) \quad (16)$$

で水平になるはずだが, 完全に水平といえる領域はみられなかった. ところが図 2 をみればわかるように, レイノルズ数が大きくなるにつれて水平にかなり近づいていく様子がわかる. さらに $(k\eta)^{5/3}$ をかけた圧力スペクトルを図 3 に示す. 明らかに水平を超えて左上がりの図になっている. このことから, 圧力スペクトルは $-5/3$ 乗則ではなく, やはり Kolmogorov の $-7/3$ 乗則に従うとみられる. また, $R_\lambda = 455$ のときの圧力スペクトルについて, 式 (15) における定数 B_p を求めたところ, $B_p = 8.27$ という値を得た.

ところで, 圧力スペクトルはエネルギースペクトルに比べ, スケーリングがよくない. そこで規格化された圧力勾配の分散 $F_{\nabla p}$ の R_λ 依存性を考慮し,

$$P(k) = F_{\nabla p}(R_\lambda) \epsilon^{3/4} \nu^{7/4} \phi(k\eta) \quad (17)$$

のように $F_{\nabla p}$ をスケーリングに用いると, 図 4 のようにより広い領域で一致した.

3.2 圧力と圧力勾配の PDF

圧力の PDF

圧力の PDF を図 5 に示す. 正の裾はガウス分布にきわめて近いのに対し, 負の裾は広がっている. レイノルズ数によって若干の違いはあるが, 負の裾は直線というよりも, スカートのような曲線にみえ, R_λ が増加するにつれて広がっていく. ただ, $R_\lambda = 292$ の PDF が大きく曲がっているが, これは統計をとる時間が十分でないので非等方な影響が表れているのであろう.

負の裾について, X を確率変数として

$$P(X/\sigma_X) \propto \exp[-\beta(X/\sigma_X)^\alpha] \quad (18)$$

であると予想し, パラメータ α, β の R_λ 依存性を見る. α については $0.7 \sim 0.8$ 前後の値で, β については 2 前後の値となった. Cao, Chen & Doolen の DNS の結果では, R_λ が増加すると α の値が減少していくが, 本研究の DNS ではそのようなきれいな結果はみられなかった.

圧力勾配の PDF

圧力勾配の PDF を図 6 に示す. 圧力勾配の統計量は等方的なので, x 方向のみを示す. この図より圧力勾配の PDF は左右対称で, 裾が広く, R_λ が増加するにつれて裾の広がりが大きくなっている. これまでは, 指定した最大のレンジを超える場合は最大のレンジに属するものとしてカウントするというもので, $R_\lambda = 377, 455$ の PDF にみられるように, 大きなレイノル

ズ数では裾まで解像できていなかった。今回 $R_\lambda = 377$ という大きなレイノルズ数で, logscale の bin を用いて裾の端まで追求した結果, レンジで左右におよそ 140, 値で 10^{-11} のオーダーまで解像できた。

さて, この logscale の bin を用いた PDF で, 圧力のときと同様にして, 式 (18) を用いてパラメータ α, β の R_λ 依存性をみる。 x, y, z の正の側, 負の側別々に, $\ln(X/\sigma_X)$ の関数としてプロットしたものを図 7 に示す。これより裾の方では非常によく一致していて, PDF が左右対称であり, 等方的である様子がわかる。ただ $\ln(X/\sigma_X)$ が負のところ, つまりレンジが 1 より小さいところで若干ずれがあった。

圧力勾配を $\ln[-\ln\{P(X/\sigma_X)\}] \propto \ln(\beta) + \alpha \ln(X/\sigma_X)$ としてプロットし, そこから最小自乗法を用いてパラメータ α, β を求めた結果が図 8 である。 α の値は R_λ が増加するにつれて減少し, β は増加するという傾向がみられた。

3.3 圧力勾配の条件付平均値

圧力は式 (2) のように体積積分の形で表され, これは物理空間において局所的な効果のみでなく非局所的な効果が統計に対し影響を及ぼすことを表している。このことからスケール r の特性, すなわち r 離れた 2 点での圧力差 δp_r , 圧力勾配差 $\delta \nabla p_r$ の統計を調べることは乱流理論における重要な問題であることは先に述べた。そこで条件付平均値というものを考えるが, その前に速度差の方程式を導いておく。

速度差の方程式

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ を $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ での速度とする。相対速度 $\vec{w}$ と平均速度 $\vec{V}$ を

$$\vec{w}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \vec{u}_2 - \vec{u}_1, \quad \vec{V} = \frac{\vec{u}_2 + \vec{u}_1}{2} \quad (19)$$

と定義する。 $\vec{w}$ についての方程式は, $\vec{x}_2$ と $\vec{x}_1$ での Navier-Stokes 方程式の差をとり

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \vec{w}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) + (\vec{u}_2 \cdot \nabla_2 + \vec{u}_1 \cdot \nabla_1) \vec{w}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \right) (p(\vec{x}_2) - p(\vec{x}_1)) + \nu (\nabla_2^2 + \nabla_1^2) \vec{w}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) + \vec{f}(\vec{x}_2) - \vec{f}(\vec{x}_1) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで ρ は簡単のために 1 とした。そして

$$\vec{X} = \frac{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}{2}, \quad \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad (21)$$

と変数変換を行うと

$$\nabla_1 = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{X}} - \nabla_{\vec{r}}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{X}} + \nabla_{\vec{r}} \quad (22)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 \cdot \nabla_2 + \vec{u}_1 \cdot \nabla_1 &= \vec{V}(\vec{X}, \vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{X}} + \vec{w}(\vec{X}, \vec{r}, t) \cdot \nabla_{\vec{r}} \\ \nabla_2 + \nabla_1 &= \nabla_{\vec{X}} \\ \nabla_2 - \nabla_1 &= 2 \nabla_{\vec{r}} \\ \nabla_2^2 + \nabla_1^2 &= \frac{1}{2} \nabla_{\vec{X}}^2 + 2 \nabla_{\vec{r}}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。この関係を (20) へ代入すると、速度差についての方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{X}} \right) \vec{w}(\vec{X}, \vec{r}, t) &= -\vec{w}(\vec{X}, \vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{r} \vec{w}(\vec{X}, \vec{r}, t) \\ -\nabla_{\vec{X}} \delta p(\vec{X}, \vec{r}, t) + \nu \left(\frac{1}{2} \nabla^2_{\vec{X}} + 2 \nabla^2_{\vec{r}} \right) \vec{w}(\vec{X}, \vec{r}, t) &+ \delta \vec{f}(\vec{X}, \vec{r}, t) \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \delta p(\vec{X}, \vec{r}, t) &= p(\vec{x}_2, t) - p(\vec{x}_1, t) \\ \delta \vec{f}(\vec{X}, \vec{r}, t) &= \vec{f}(\vec{x}_2, t) - \vec{f}(\vec{x}_1, t) \end{aligned} \quad (25)$$

である。 $\vec{r}$ は $\vec{X}$ に関する偏微分のときに固定されているから、次の非圧縮条件

$$\frac{\partial}{\partial \vec{X}} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{X}} \cdot (\vec{u}(\vec{x}_2) + \vec{u}(\vec{x}_1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \cdot \vec{u}(\vec{x}_2) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \cdot \vec{u}(\vec{x}_1) \right) = 0 \quad (26)$$

が成り立つ。同様に

$$\frac{\partial}{\partial \vec{X}} \cdot \vec{w} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{w} = 0 \quad (27)$$

である。

条件付平均値

さて、式 (24) を x_1 軸方向へ射影すると、

$$\frac{D \delta u}{Dt} + \delta u \frac{\partial \delta u}{\partial x} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \text{other terms} \quad (28)$$

となる。*other terms* にはいろいろな項が含まれるが、今は無視することにする。すると、式 (28) は圧力の項がもしなければ、バーガース方程式と似た形となる。バーガース方程式についてはよく知られているので、 δp が δu の関数としてわかると圧力の力学的役割を知ることができるだろう。

速度差 δu_r の条件付の、圧力勾配差 $\delta(\partial p / \partial x)_r$ の平均 $\langle \delta(\partial p / \partial x)_r | \delta u_r \rangle$ を図 9 に示す。これは二次関数に近いと思われるので、

$$\langle \delta(\partial p / \partial x)_r | U, r \rangle = c_0(r) + c_1(r)U + c_2(r)U^2 \quad (29)$$

として、 $c(r)$ が $\delta u = U$ のどのような関数であるかを調べてみた。 $\langle \delta(\partial p / \partial x)_r | U, r \rangle$ の結果を図 10 に示す。fitting range は $[-2 : 2]$ であり、 $c_0 = |c_2|$ となっている。この関係は fitting range を広くとるとあまりみられなくなる。

二次の係数 $c_2(r)$ に注目すると、 $r = 20 \sim 200$ の慣性領域のあたりで直線的にみえるところがある。 $R_\lambda = 377$ のデータについて、ここが r のどのような関数であるか調べたところ、 $\langle \delta(\partial p / \partial x)_r | U, r \rangle$ は $|c_2(r)| = br^a$ 、 $a = -0.35$ という r の減少関数であった。これは図 9 の凸が、 r の増加とともにゆるくなる傾向と一致する。

さて詳細は省略するが、この図から圧力が流体を非圧縮に保つよう作用することがわかる。

3.4 Pressure head の統計

実験でピトー管を用いて圧力を測定する際に、もし動圧の影響が入ってしまったら圧力の PDF やスペクトルはどのくらい乱されてしまうのかを DNS で検証してみる。

Pressure head, h_c を次のように定義する。

$$h_c(\vec{x}) = p(\vec{x}) + c e(\vec{x}) \quad (30)$$

ただし, $e(\vec{x}) = \bar{u}^2/2$ で, c は定数とする。また, $p(\vec{k}) = F[p(\vec{x})]$, $e(\vec{k}) = F[e(\vec{x})]$ なので, $h_c(k)$ は,

$$\begin{aligned} h_c(k) &= \langle \{p(\vec{k}) + p(\vec{k})\} \{p(\vec{k}) + p(\vec{k})\}^* \rangle \\ &= \langle p(\vec{k})p(\vec{k})^* \rangle + 2c\langle p(\vec{k})e(\vec{k})^* \rangle + c^2\langle e(\vec{k})e(\vec{k})^* \rangle \\ &= h_1(k) + 2ch_2(k) + c^2h_3(k) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。* は複素共役, $F[\]$ はフーリエ変換を表す。

$h_c(\vec{x})$ の PDF を図 11 に示す。 $c=0$ のときは圧力そのもので, c の値が大きくなると, つまり動圧の影響が大きくなると正の側へ歪んでいく。しかし, ガウス分布からはずれている。これは $\bar{u}^2/2$ の PDF と深く関係がある。

図 12 に, $h_c(k)$ のスペクトルを示す。 $c=0$ のときは圧力スペクトルそのもので, c の値が大きくなると, つまり動圧の影響を受けると圧力スペクトルの傾きが大きく乱されてしまう。

4 まとめ

結果を以下にまとめる。

・エネルギースペクトルについて

- Kolmogorov の理論によるスケーリングでよく一致する。
- DNS により得られた Kolmogorov 定数 K は実験値とよく一致する。

・圧力スペクトルについて

- Kolmogorov の $-7/3$ 乗則がみえてきた。これは高レイノルズ数で現れてくる。
- 圧力勾配の分散をスケーリングに用いると広い領域で一致する。

・PDF について

- 圧力の PDF は負に歪められている。負の裾について, 関数 $\exp(-\beta X^\alpha)$ にあてはめると, $R_\lambda = 377$ で $\alpha = 0.77$, $\beta = 1.85$ を得る。
- 圧力勾配の PDF は R_λ が増加するにつれ裾が広がる。これは関数 $\exp(-\beta X^\alpha)$ にあてはめるとき, α は減少し, β は増加する結果と矛盾がない。
 $\Rightarrow R_\lambda$ が増加すると, 間欠性が増加

・圧力勾配の条件付平均値

- $\langle \delta(\partial p / \partial x)_r | \delta u_r \rangle$ は二次関数的な傾向がみられた.
- 二次関数 $c_0 + c_1 U + c_2 U^2$ にあてはめたとき, ある領域では $c_0 = |c_2|$ の関係がみられ, $|c_2|$ は慣性領域において r の減少関数となる.

・ Pressure head の統計

- Pressure head の PDF は 動圧の影響が大きくなると正の側へ歪められる.
- 動圧の影響が加わると, 圧力スペクトルは傾きが変わるほど乱される.

参考文献

- [1] Toshiyuki Gotoh and Daigen Fukayama 2000 “*Pressure spectrum in homogeneous turbulence*” Submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [2] Nianzheng Cao, Shiyi Chen and Gary D. Doolen. 1999 “*Statistics and structures of pressure in isotropic turbulence,*” *Phys. Fluids.* 11 2235
- [3] 深山大元 2001 “3次元乱流の間欠性-構造関数の解析-” 中央大学博士論文
- [4] 和田聡 2000 “3次元乱流における乱流の構造と圧力場の統計” 名古屋工業大学生産システム工学科修士論文
- [5] 永谷公学 1999 “3次元定常乱流場における圧力場の統計性” 名古屋工業大学生産システム工学科修士論文
- [6] 後藤俊幸 1998 「乱流理論の基礎」: 朝倉書店

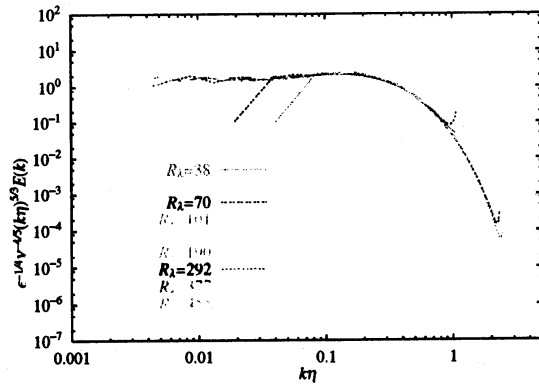
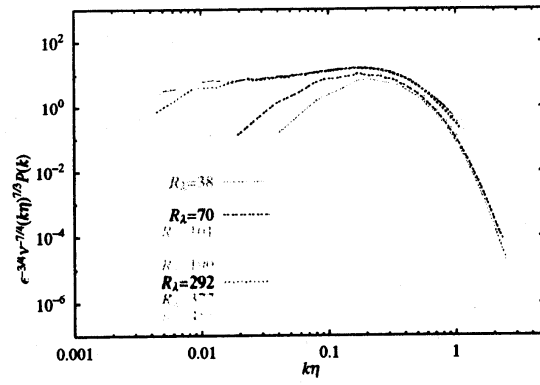
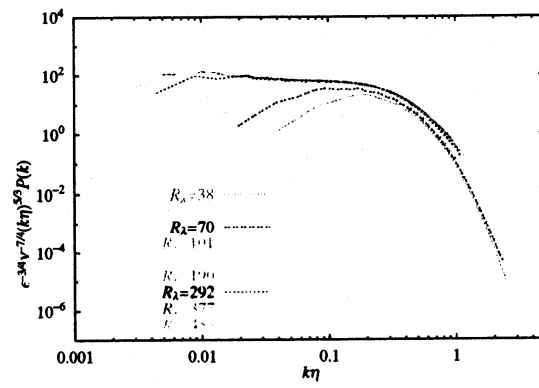
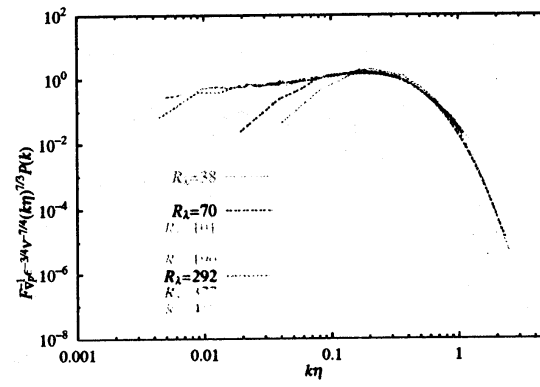
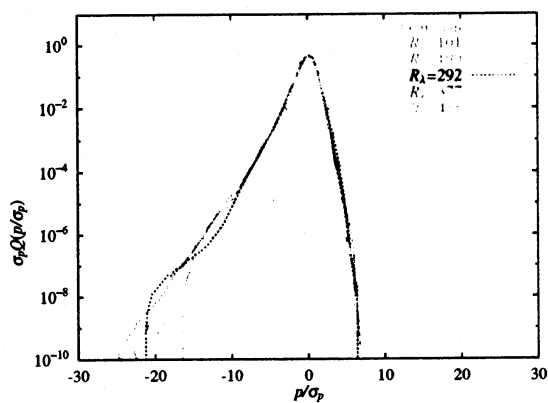
図 1: $-5/3$ 乗則に従うエネルギースペクトル図 2: $k^{7/3}$ をかけた圧カスペクトル図 3: $k^{5/3}$ をかけた圧カスペクトル図 4: 圧力勾配の分散をスケーリングに用い, $k^{7/3}$ をかけた圧カスペクトル

図 5: 圧力の PDF

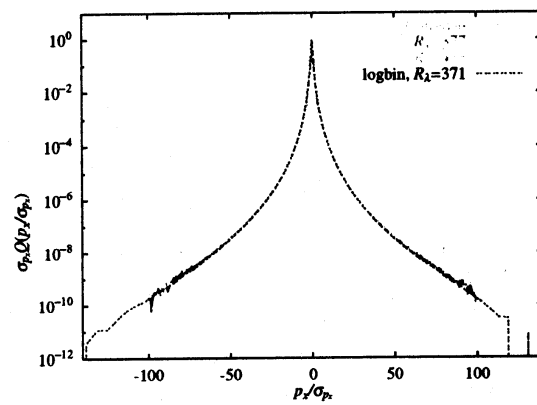
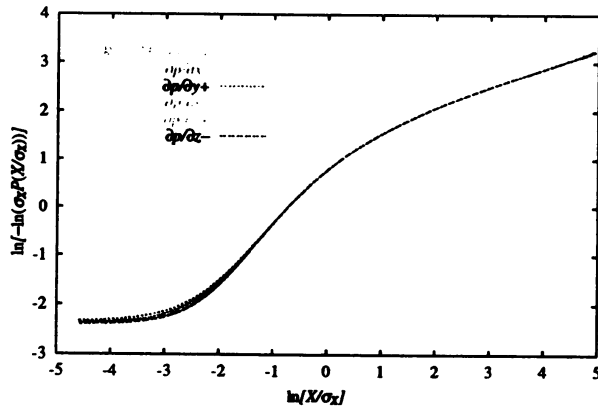
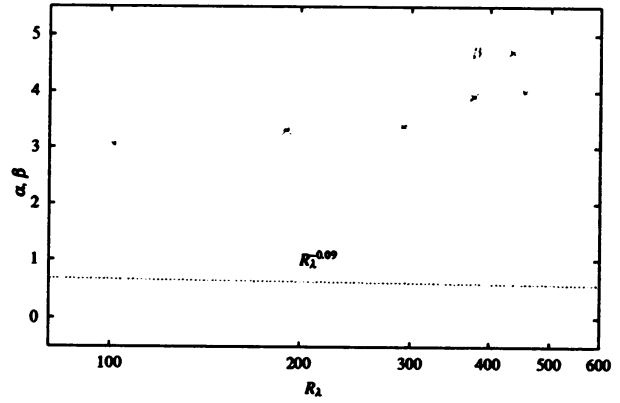
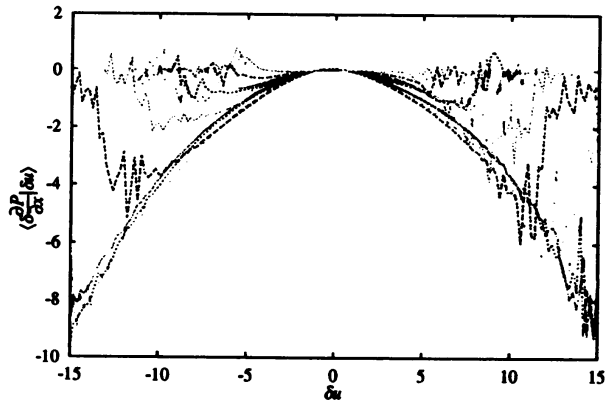
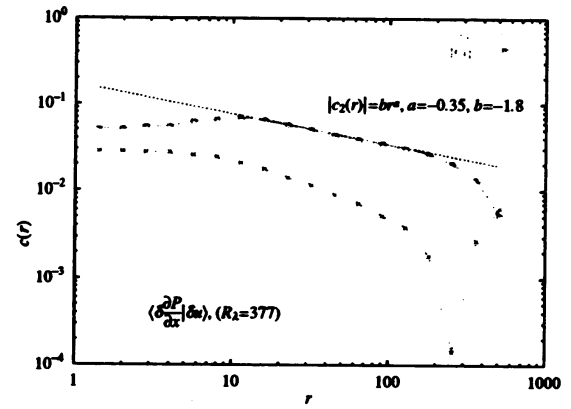
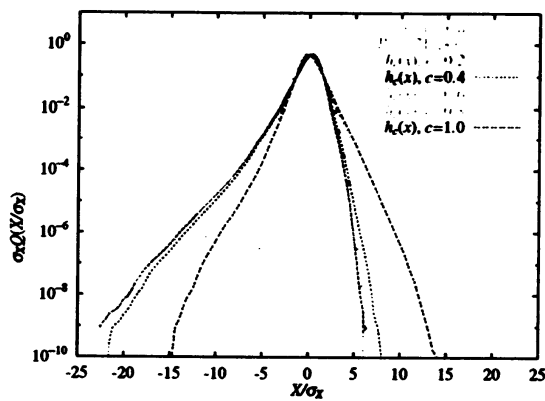
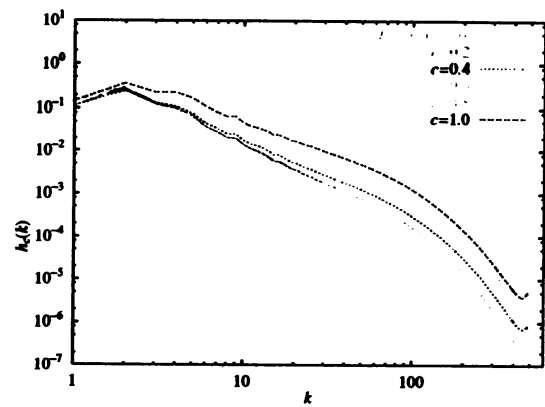


図 6: 圧力勾配の PDF

図 7: 圧力勾配の PDF の裾 ($R_\lambda = 371$)図 8: 圧力勾配の裾の α, β のレイノルズ数依存図 9: 条件付平均値 $\langle \delta p / \delta x | \delta u \rangle$ ($R_\lambda = 377$)図 10: $\langle \delta p / \delta x | \delta u \rangle$ を 2 次関数にあてはめたときの係数 ($R_\lambda = 377$)図 11: Pressure head の PDF ($R_\lambda = 371$)図 12: Pressure head のスペクトル ($R_\lambda = 371$)