

乱流モデルの問題点

電通大 流体力学

大路通雄

鍋嶋秀喜

1. はじめに

ここにいう「乱流モデル」とは、乱流に対してナビエ・ストークス方程式（以下 NS 方程式）から導かれる逐次モーメント方程式に幾つかの現象論的なもしくは半経験的仮説を導入して閉じた形にする完結（closure）の手続きを指し、流れの場や乱流輸送の大きさ（壁面抵抗・熱伝達・物質拡散等）の予測を目的とするものである。もちろん、予測という以上それはできるだけ定量的に正確でなくてはならないが、同時に現実に計算によって答を出すことができればモデルとしての意味はない。すなわち、実用計算が可能な範囲内で最大の予測精度を追求する点に、純理論的な乱流研究とはおのずから違った問題の特色がある。

現行のさまざまな乱流モデルは、もとよりそれぞれに理論的根拠と実験事実に基づいているが、乱流力学の基礎理論が

まだ確立されていない現状では、導入された仮説の妥当性をあらかじめの判定することは原理的に不可能であり、モデルの当否は結局のところ実験データとの比較対照によらざるを得ない。Saffman¹⁾は、この事情を予測 (prediction) ではなくむしろ追認 (postdiction) に過ぎないと評した。一方、実地の要求に答える工学上の応用は、多くの場合おびただしい追認例の集積ではないか、という見方もできる。少なくとも対象の範囲や計算の目的をある程度限定すれば、ポストディクションではあっても十分に有用であるに違いない。その意味で、例えばChapmanら²⁾は「コンピュータは風洞に代り得るか」と問い、投資効率の観点から両者の効用曲線が交わる日も近いであろうと述べている。

どちらも乱流モデルをめぐって説得力をもつ見解といえるが、そこには原理家と実際家の立場のちがいを感じずにはいられない。にもかかわらず、この二つの立場は互いに対立したり排除し合ったりするものでなく、原理家と実際家が相補って乱流研究の意義を発展させている事実こそ特に注目に値する。これに対し、国内では従来ともすればその間の交流を欠き勝ちなまらしいがあった。近年、事態は大いに変化しつつあるけれども、なお相互理解の一助として、ここでは乱流研究におけるモデル化 (modeling) の位置づけと現行モデルが内

蔵する二、三の問題点とについて述べることにしたい。モデルの分類やその各論などは、筆者のひとりによる解説³⁾その他⁴⁾にゆずる。

2. NS方程式

乱流理論の困難はNS方程式の特異な性格に起因する——これは現在の乱流研究者に広く共通する認識であるが、約百数十年以前から基礎方程式が知られていりしかも未だに解の性質が見究のられていない事例は、数理科学の中でも特筆されるものではないかと思われる。NS方程式を導くには、基本的な「流れの保存則」と「線形粘性」（ニュートン流体）以外に特別な仮定を用いるわけがないから、*方程式自体を疑う余地は乏しめ乏しい。従って、問題はNS方程式が含む情報を充分に取出す手段が知られていないところにあるというべきであろう。

数学者の研究によれば、レイノルズ数 R が大きいときNS方程式系（非圧縮無次元形；速度 u_i ，圧力 p ）

$$\partial u_i / \partial t + u_j \partial u_i / \partial x_j = -\partial p / \partial x_i + R^{-1} \partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j ; \quad \partial u_i / \partial x_i = 0 \quad (1)$$

* 流体の圧縮性を考慮するときは、熱力学的関係や才2粘性率についての仮定が必要になるが、ここではもっぱら非圧縮流体を考えるものとする。

は、初期値・境界値問題として「適切でない」、という。つまり、初期時刻または境界上で与えられたデータに関して、解が一意連続に依存することを保証できなくなり、データの無限小のちがいに対しても解は決定的に大きく変わってしまう可能性をもっている。だとすると、解の予測が事実上不可能になることは避けられない。このような事情は、結局NS方程式(1)に非線形項と散逸項が共存していることに由来するもので、実際どちらかの項が欠ける場合(純粘着流または非粘性流)には見られない特質である。極言すれば、乱流はNS方程式に従うけれども、NS方程式そのものは乱流を記述するのに無力に近いのではなからうか。

この種の困難は単なる「近似」で克服できないように思われる。ここで、一般に近似と区別して「モデル化」の概念を想定してみよう。図1は両者の相異を図式的に示したもので

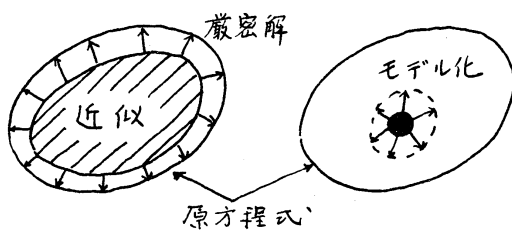


図 1

ある。すなわち、近似は原方程式が含む情報をできるだけ残し、精度を上げれば厳密解に近づくことが期待される。

一方、モデル化は原方程式が含む情報のごく一部だけを残してそれ以外の情報は捨てる。従って、厳密解を得ることは期待できない。つまり、後者は何らかの粗視化(coarse-graining)

の手続きを伴い、情報の取捨について大幅な自由度をもっている。情報の本質的な部分を有効に取上げるかどうかはその成否がかかっていることはいうまでもない。

この意味で、いわゆる Reynolds の分解

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p'; \quad \bar{u}'_i = \bar{p}' = 0 \quad (2)$$

(以下 $\bar{u}_i \equiv U_i$, $\bar{p} \equiv P$ と書く) における平均操作はモデル化の第一歩であり、レイノルズ方程式 (以下 R 方程式)

$$\left. \begin{aligned} \partial U_i / \partial t + U_j \partial U_i / \partial x_j &= -\partial P / \partial x_i - \partial \overline{u'_i u'_j} / \partial x_j + (1/R) \partial^2 U_i / \partial x_j \partial x_j \\ \partial U_i / \partial x_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

は、NS 方程式とは数学的に全く 違ったレベル の方程式である。そこでは、レイノルズ応力 (以下 R 応力) $-\overline{u'_i u'_j}$ の項が新しい困難を招いた反面、 u_i, p を平滑化した「たちの良い関数」を用いることによって、NS 方程式の御し難い数学的特異性を回避しようとしている。乱流の記述はこれによって初めて可能になったとさえいえるけれども、情報の低減 (及び R 方程式に始まる逐次モーメント方程式の完結後説) が方程式の性格にどのように影響するかは、なお基礎的な研究の余地がある。現に、平均 (R 方程式等) の解が (NS 方程式自身の) 解の平均に一致するかどうかは、自明の事柄でないと思われるのである。

3. 応力方程式モデルとその問題点

現行の乱流モデルは、およそ三つのグループに大別される。第一は「積分法」で、R方程式をさらに主流に直角的な断面内で積分して独立変数の数を減らし、定常乱流の場合は常微分方程式となる。第二の「微分法」は、R応力を適当にモデル化することによってR方程式を場の各点で解く。第三の「数値シミュレーション」では、NS方程式に局所的加重平均 (filtering) または直交関数展開を導入して差分方程式の形で数値積分を行い、単純平均よりも格段に情報量の多い個々の瞬間値をシミュレートする。このうち、積分法は最も簡便であるが適用範囲に限られ、数値法は原理的な長所にもかかわらず計算量がなお過大なためまだ実用化に至っていない。従って、微分法が現在では中心を占めており、中でもR応力に対する輸送方程式をモデル化する「応力方程式モデル」は本命と目される。

ここでの応力方程式は、 $\overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij}$ とおき次元形で書くと

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \tau_{ij} = G_{ij} + D_{ij} + T_{ij} + P_{ij}, \\ & \text{発生: } G_{ij} = -(\tau_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}), \quad \text{散逸: } D_{ij} = -2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}, \\ & \text{拡散: } T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{u'_i u'_j u'_k} + \pi'(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) - \nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k}], \\ & \text{再配分: } P_{ij} = \overline{\pi' (\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i})} \quad (\nu: \text{動粘性率}) \end{aligned} \right\} (4)$$

(ただし $\pi' \equiv p'/\rho$) のように表わされ、NS方程式の積平均が

ら導かれるもので、ここにはそれ以外の特別な仮定は含まれていない。上の各項と、物理的考察や実験事実に基づいて平均流 U_i 、エネルギー散逸とおよび ε_{ij} だけで表わし、 R 方程式、散逸方程式と組合わせて閉じた偏微分方程式系を得ようとするのが応力方程式モデルである。そのとき、未知数の数は一般には $U_i, \varepsilon, \varepsilon_{ij}$ に P を加えて計 11 個となる。

この方法は、直接 ε_{ij} そのものをモデル化して R 方程式を単独に解くよりも数等合理的であり、一貫した方式でさまざまな形態の乱流に適用できることを期待して「不変モデル」(*invariant modeling*)とも呼ばれている。^{*5)} 年ごとに向上強化される高速計算の能力に伴い、応力方程式モデルの著しい発展と普及は当然であるが、現時点ではまだ満足すべき段階には遠く、技術的にも理論的にも残された問題が少なくない。

まず、モデル化される項の数が非常に多く、これに伴っておびただしい経験定数を含むことが挙げられる。最も簡単な場合(平均流が定常2次元、境界層型近似、粘性効果無視)に退化した Hanjalic-Launder⁶⁾ の簡略化モデルでさえ7個の定数の必要である。理想的にはこれらはすべて普遍定数のはずであるが、現状では試行錯誤の形で個々に値を定めることが避けられない。まさに Saffman のいう「追認」の段階であっ

* 日本語では、たまたま「普遍モデル」と同音となる。

て、大量の経験定数は曾つての「水力学的状況」を思わせるものがある。これらを最適化する方針は未確立で、係数値と解の性質との関係もまた明らかでない。

次に、方程式系の計算を実行するために必要な初期値または境界値の問題がある。いうまでもなく計算では各未知量についてそれらをデータとして入力しなければならないが、乱れの構造に関係する ε や $\mathcal{D}_{ij}$ に対してもそのための情報を得ることは、現実には必ずしも容易でない。良い結果を得るためには充分に良質な実験データが要求され、それかなければここでも試行錯誤を重ねる必要があろう。閉じた方程式系さえ用意すれば、実験の助けなしに乱流の計算が実行できると速断するわけにいかないのである。

さて、応力方程式(4)は、およそ次のようにモデル化される： (i) 発生項 G_{ij} は特別にモデル化する必要がない。(ii) 散逸項 D_{ij} に対しては、乱れのレイノルズ数が充分大きい限り対角成分だけが重要で、向折等方性から ν に無関係な等方的散逸

$$D_{ij} = -(2/3)\varepsilon\delta_{ij} \quad (5)$$

を仮定する。(iii) 拡散項 T_{ij} に対しては、通常 π' と ν の寄与を無視し、勾配型拡散の形で、例えば

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[K \left(\frac{\partial \mathcal{C}_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{C}_{kj}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial x_k} \right) \right] ; \quad K = \frac{\tau_{ii}^2}{\sigma\varepsilon} \quad (6)$$

(σ : 定数, K : 輸送係数) のようにおく。仮定(5), (6)にも幾

つかの問題はあるが、(iv)再配分項 P_{ij} はモデル化が最も難しい部分と考えられるので、その点を少し詳しく述べる。⁷⁾

再配分 (redistribution) の名は、それが全エネルギー $\tau_{ii}/2$ に影響しない ($P_{ii} = 0$)、方向成分間のやりとりだけを支配することに由来し、圧力-ひずみ相関の作用を意味する。これにはエネルギー等分配に向かう等方化と逆向きの非等方化の両面があるが、問題は圧力変動 π' が場の全体に関係した非局所的性格をもつ点にある。すなわち、変動速度 u_i' の方程式の div をとって、 u_i' のみの寄与[1]と U_i の効果[2]とに分けると、

$$-\Delta \pi' = Q^{[1]} + Q^{[2]}; \quad Q^{[1]} = \frac{\partial^2 (u'_l u'_m - \tau_{lm})}{\partial x_l \partial x_m}, \quad Q^{[2]} = 2 \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial u'_m}{\partial x_l} \quad (7)$$

となり、これを解いて

$$\pi' = -\Delta^{-1} (Q^{[1]} + Q^{[2]}); \quad \Delta^{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_y (\dots)_y \frac{d^3 y}{|x-y|} + \text{境界効果} \quad (8)$$

が得られる。 Δ^{-1} は逆ラプラシアンで、 x は着目点、 y は影響点である。この結果に対応して P_{ij} を分解すると

$$P_{ij} = P_{ij}^{[1]} + P_{ij}^{[2]} \quad (9)$$

と書かれるが、右辺は共に未知の積分で表わされ、これらが局所的な量によってモデル化される根拠に乏しい。ふつう実用の目的には直観的考察と次元解析に基づいて、とりあえず

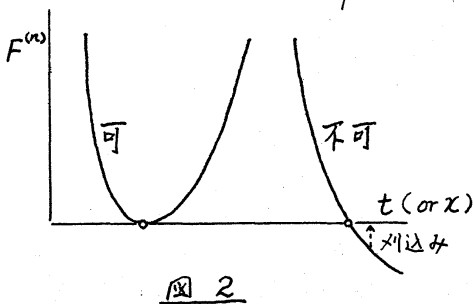
$$\left. \begin{aligned} P_{ij}^{[1]} &= -C_1 \left(\frac{\varepsilon}{\tau_{ii}} \right) \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{ii}}{3} \delta_{ij} \right), & \text{等方化による応力緩和} \\ P_{ij}^{[2]} &= C_2 \left(G_{ij} - \frac{G_{ii}}{3} \delta_{ij} \right) + \dots, & \text{非等方化による応力増強} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(C_1, C_2 は正の定数) などのようにおくけれども、上記のこと

からみてこれがどの程度まで妥当であるかは疑問である。緩和に対しては軸対称乱流，増強に関しては一様剪断乱流の基礎的研究が重要なことを筆者のひとりはずきに強調した。仮定(6)で無視された圧力拡散についてもなお検討が必要と思われるが，圧力を含む相関の直接測定は適当な実験法がなく，この種の問題の解明に大きなネックとなっている。

いずれにしても，以上のような項別モデル化に当たっては各式の「良さ」が量的に明らかでなく，結局全体としては最も「わるいモデル」の部分で左右されることが避けられない。さらに，関連して解の実現性 (realizability) の問題が残されている。等方性乱流理論での負エネルギー背理⁸⁾はその一例であるが，今のようにさまざまな仮説を導入する場合には事態はいっそう厳しいであろう。Schumann⁹⁾によれば， $\tau_{\alpha\beta}$ に対し次の実現性条件がある (ギリシャ添字では和をとらない)：

$$\left. \begin{aligned} F^{(1)}(\tau) &\equiv \tau_{\alpha\alpha} \geq 0, \\ F^{(2)}(\tau) &\equiv \tau_{\alpha\alpha}\tau_{\beta\beta} - \tau_{\alpha\beta}^2 \geq 0, \\ F^{(3)}(\tau) &\equiv \det(\tau_{\alpha\beta}) \geq 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{また} \\ &F^{(n)}(\tau) \geq 0 \quad (n=1,2,3) \end{aligned} \quad (11)$$



ただし，実際には $F^{(1)}$ の代りに τ_{11} ， $F^{(2)}$ の代りに $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2$ を用いれば充分であることが示される。問題は $F^{(n)} = 0$ となったときの $F^{(n)}$ の挙動

であるが、図2の左のように $F^{(n)}$ がそこで座標軸に接すれば実現性条件に触れないけれども、右のように軸を切れば以後解は破綻する。従って、 $n=1, 2, 3$ のおのおのにつき任意の U_k に対して $F^{(n)}=0$ と $(\partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k) F^{(n)}=0$ とが常に両立しなければならない。厳密な応力方程式(4)はもちろんこの性質を保証するが、項別のモデル化したとき一概にそうでないことを Schumann は指摘した。また、この立場では(6)で π' や ν の寄与を無条件に無視できない点も注意を要する。一方、計算途中に $F^{(n)} < 0$ となると直ちに $F^{(n)}=0$ に修正する刈込み (clipping) の原理も提案されているが、⁽¹⁰⁾ 理論的にはすっきりしない。

要約すれば、応力方程式モデルは構成の合理性と演算の現実性が適当に調和した計算方式として実用的にも最大の期待がもたれる反面、信頼性の高い汎用手段に定着するためには今後克服すべき課題も随所に見られる。さらに多くの系統的な実験データといわゆる追認例の積重ねが待たれるばかりでなく、理論的研究の側面からも興味深い対象であると思う。

4. レイノルズ数効果

乱流は流れのレイノルズ数 R が十分に小さくないことから生じる予測困難な不規則過程であることはさきにも述べたが、逆に R の値が十分に大きいと事柄はある意味でかえって

単純化される。平均量についていえば境界層型の近似が許されるし、乱流構造に関しても境界の形や性質など外的条件のパラメータは大きな渦に影響を与えるだけで、乱れの大部分は R によらない普遍的な機構で支配されるものと考えられるからである。事実、粘性を考慮しない前節のようなモデル化が多くの場合有効に用いられることは、その具体的な証左とてよい。従って、応力方程式モデルに限らずさまざまな計算方式は、まず R が非常に大きい場合について開発されるのが通例であった。

しかし、それだけではどうしても適用範囲が限られる。実際の流れには R または Re に依存する領域を含むものも少なくないからである。残念ながら、この方向への拡張はあまりたやすくはない。例えば、 $R \rightarrow \infty$ のときにはKolmogorovの理論から散逸 ε の大きさは Re と独立でかつ等方的とみなされるが、 R がそれほど大きくなければ、 ε の値は Re にも依存し散逸機構も非等方に止まるので、 D_{ij} に対して(5)のような簡単な仮定は成立しなくなるであろう。その他の項についても単に粘性補正を加えるだけでよいとは限らない。しかも、手がかりとなる実験データが現状では充分でないため、この問題は現行モデルの盲点の一つに数えられている。

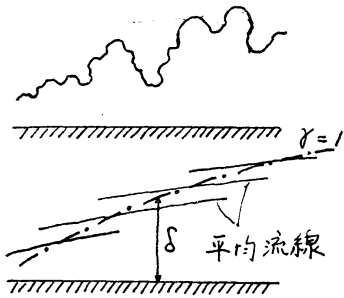
レイノルズ数効果が重要となる場合は、尤一に壁面近くの

流れである。管流や境界層流などの壁面乱流では、壁面に接して直線的な平均速度分布をもつ「線形底層」から「移行層」(buffer layer)を経て対数速度分布の成立つ「完全乱流層」に達するが、そこまでの壁面性領域(内層)における代表長さは ν/u^* (u^* は壁面応力)であって、現象は明らかに ν の影響をうける。このスケールは剪断層のグローバルな厚さ δ の 10^{-3} 程度以下に小さいから、内層は一般にきわめて薄い。ところが、実験によれば乱れの発生や散逸は内層に集中し、諸量の変化もそこで最も大きいので、壁面から正直に積分を行うには内層で差分の刻みを著しく小さくした上に粘性の効果と考慮しなければならない。これは技術的にもやっかいな問題である。格子平均法[†]などの数値シミュレーションでも事情は本質的に同じであるが、この困難を避けるために境界条件を壁面上でなく内層の外縁で与え、別個に相似性解析で求めた「壁面法則」に接続する方法もしばしば用いられる。その場合は、内層内部の詳細はわからないけれども計算時間を著しく短縮することができる。さらに、応用として内層から放出されるいわゆる「バースト現象」⁽¹⁾の効果と境界条件の形である程度取り入れることができるかも知れない。

一方、剪断層が外部のポテンシャル流と接する境界(イン

[†] Large eddy simulation (LES) のことである。

ダフェイス)でも ν は重要になる。ここは、粘性の作用によ



ってポテンシャル域から層内に流体を巻込みながら移動する不規則な屈曲面であって(図3上), 実験的に知られた間欠性(intermittency)をもたらず。図3下は

図 3

長時間平均のスケッチで, この現象は一

種の組織的運動¹⁾(ordered motion)とも考えられるが, 乱流モデルでは現象論的な間欠因子で代表され, 従来まで計算で評価された例を知らない。あるいはLESによって取扱えるのではなからうか。

さらに, 遷移や逆遷移(層流化)を含む流れ, 剥離流, 循環流なども明らかにレイノルズ数効果が本質的な場合に属しており, しかも実用上の関心も深い。そこでは幾つかの成功例と同時に不満足な結果も多く, 普遍的なモデル化は無理なように思われるが, ここでは特に立入らないこととしよう。

5. おわりに

以上挙げたほかにもいろいろな問題点があるが, それらは他の機会にゆずり, 参考の Re の近年国内で行われた乱流モデルによる代表的な計算例をあげておく。

図4は, 長さ12mmの小突起によっていったん剥離した平板

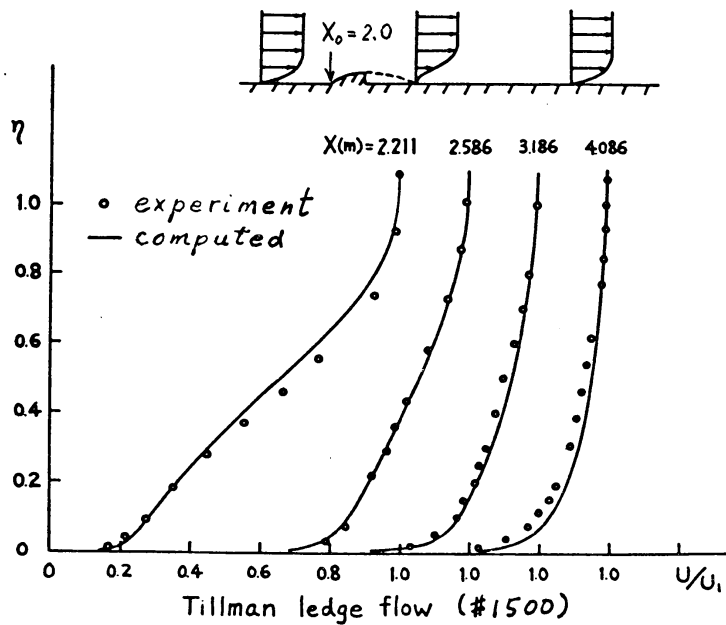
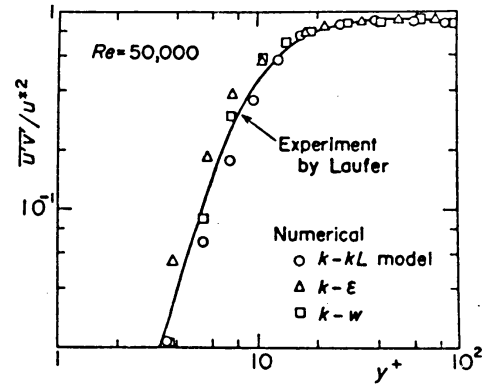
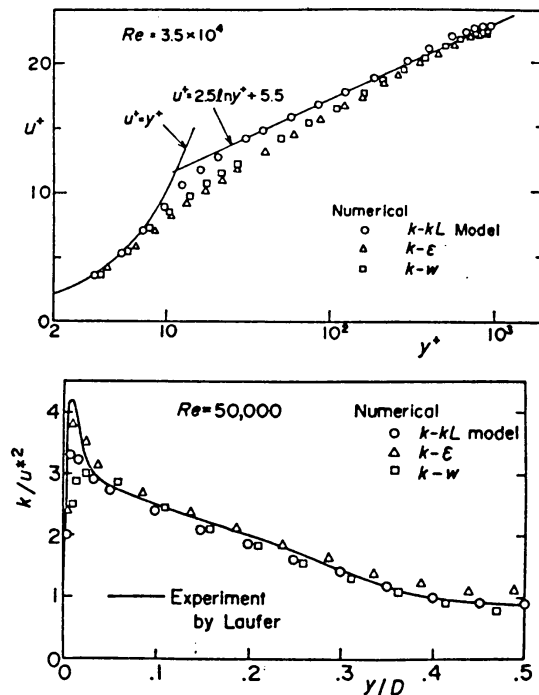


図4 積分法の実用例¹²⁾
(回復境界層の平均速度分布)

境界層流が再付着の後、平衡速度分布に回復して行く過程を積分法で計算したもので、石田洋治氏(航技研)による。¹²⁾

図5は、円管流に対して2方程式モデルによる微分法を適用した河村洋氏(原研)の計算



$$k \equiv \tau_{ii}/2, \\ u^+ \equiv U/u^*, \quad y^+ \equiv y u^*/\nu$$

図5 2方程式モデルによる微分法の実用例¹³⁾
(円管流)

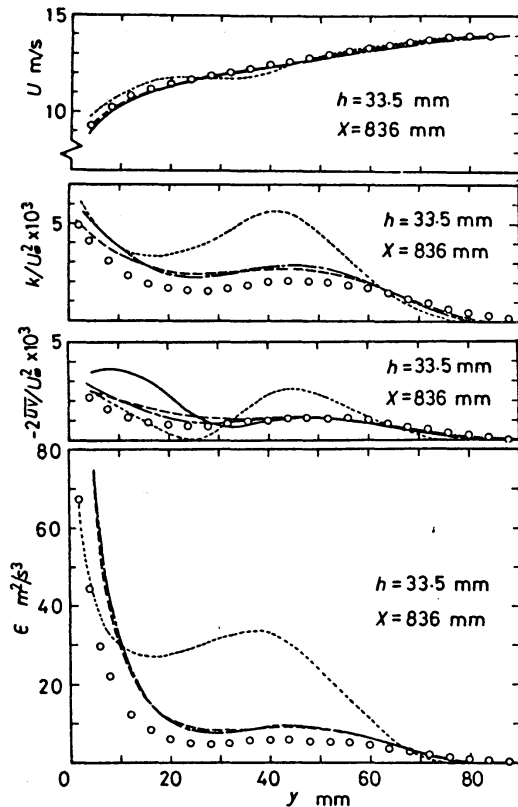
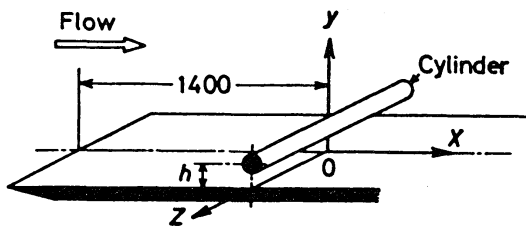


図6 微分法の応用例¹⁴⁾

(攪乱境界層流れ)

- 実験値 $x=0$ の出発値
- 混合距離モデル
- 2方程式($k-\epsilon$)モデル
- · - 応力方程式(3方程式)モデル⁶⁾

例。¹³⁾ 3種類のモデルを用いて壁面速度分布則や有名なLauferの実験と比較している。(J. Laufer 1954, NACA TR 1174)

粘性補正を加えた定式化により、壁面から内層を含めて計算されていることに留意されたい。同氏はこの方法で加熱円管流の層流化現象の評価に成功された。

図6は、平板境界層を図示のように細い円柱で攪乱した場合の例で、鈴木健二郎氏ほか(京大・工・機械)によるもの。¹⁴⁾ 各次の完結モデルを用いた結果が対比されている。この計算では粘性項を省略して内層を除外し、壁面法則に接続する方法が採用された。

もちろん、これらは一例にすぎない。すでに工学的な各分

野で複雑な流れに対する乱流モデルの応用が一般化していることはあらためて多言を要しないところである。

参考文献

- 1) P. G. Saffman : Proc. Symp. Structure and Mechanisms of Turbulence, II. H.-H. Fiedler ed. (1978) 273.
- 2) D. R. Chapman et al. : Astronaut. and Aeronaut. (Apr. 1975) 22.
- 3) 大路 : 日本物理学会誌 32 (1977) 721 ; 日本航空宇宙学会誌 28 (1980) 48 ; 流体力学の進歩乱流. 谷一郎編 (1980) 129.
- 4) 例えば, W. C. Reynolds : Ann. Rev. Fluid Mechanics 8 (1976) 183.
- 5) W. S. Lewellen : Handbook of Turbulence I. W. Frost and T. H. Moulden ed. (1977) 237.
- 6) K. Hanjalic and B. E. Launder : J. Fluid Mech. (1972) 609
- 7) 大路 : 第11回乱流シンポジウム (1979) 29.
- 8) Y. Ogura : Phys. Fluids 5 (1962) 395 ; J. Fluid Mech. 16 (1963) 33.
- 9) U. Schumann : Phys. Fluids 20 (1977) 721.
- 10) J. C. André et al. : J. Atmos. Sci. 33 (1976) 476.
- 11) 小橋 : 流体力学の進歩乱流. 谷一郎編 (1980) 85.
- 12) 石田 : 航技研報告 TR-524 (1978)
- 13) 河村 : 機械学会論文集 45 (1979) 1038.
- 14) 鈴木ほか : 機械学会論文集 46 (1980) 1447.