

可展面を接続した自由曲面シェル構造の形状最適化

SHAPE OPTIMIZATION OF FREE-FORM SHELLS CONSISTING OF DEVELOPABLE SURFACES

崔 京 蘭*, 大崎 純**, 中村 奎 吾***
Jinglan CUI, Makoto OHSAKI and Keigo NAKAMURA

A method is presented for optimization of free-form shells consisting of developable surfaces. The surface is modelled as 2×1 or 3×1 tensor product Bézier surfaces. The developability conditions are assigned numerically as constraints for the optimization problem for minimizing the maximum principal stress under various static loading conditions as the mechanical performance. The control points of the boundary Bézier curves are considered as design variables. A continuity condition of normal vector of surface is proposed for connecting developable surfaces. Optimal solutions are found using a nonlinear programming approach, and a finite difference approximation is used for sensitivity analysis. Effectiveness of the proposed approach is confirmed through various examples and characteristics of the optimal shapes are discussed.

Keywords : Developable surface, Free-form shell, Shape optimization, Bézier surface

可展面, 自由曲面, 形状最適化, ベジエ曲面

1. はじめに

自由曲面シェルは、円筒や球形などの解析曲面とは異なる自由な建築形態を実現できるため、最近になって、建築家と構造技術者との協調により、力学性能の合理性が確保できる多様な形態が提案されている^{1,2)}。しかし、合理的な建築形態を創生するためには、施工性や経済性も同時に考慮することが不可欠である。

施工性も考慮に入れたシェル形状の最適化については、線織面を接合してひずみエネルギー最小化を目的とした關らの研究³⁾、線織面シェルの応力最小化を目的とした關らの研究⁴⁾、ラチスシェルの部材接合角の一様化を目的とした西森らの研究⁵⁾などが挙げられる。曲面を線織面で形成することにより、ラチスシェルでは1方向に直線材を配置することが可能で、コンクリートシェルの場合、曲面にねじりが存在するので、施工性を考えると線織面では不十分である。

可展面^{6,7)}は線織面の一種であり、伸縮することなしに平面に展開することができる曲面である。可展面は、直線(母線)を曲線(導線)に沿って移動させることによって生成される線織面に対して、母線方向に接平面が変化しない(曲面がねじれない)という条件を付加して生成することができる⁸⁾。可展面は平面に展開することができ、母線が直線であるため、連続体シェルにおいて型枠作成が容易にな

り、ねじり加工も必要としないなどの施工性の高い特徴を持っている。

可展面はガウス曲率が0となる条件を満たす必要があるため、筒面、錐面と接線曲面に限定されるが、これらの組み合わせにより、建築デザインで要求される多様な曲面が形成可能になる⁹⁾。これまでは、可展面は地図の作成や船舶の設計において活用されているが、可展自由曲面の幾何学特性¹⁰⁻¹²⁾を生かすとともに最適化手法を導入することで、施工し易い合理的な構造形状を創生することが可能である。

本論では、可展面あるいはいくつかの可展面を接合して形成されるシェルの曲面形状を表現する方法を提案し、可展条件を用いて最適化を行なうことで力学合理性や施工性を同時に考慮した連続体シェル構造の形態を創生できることを示す。また、最適化の過程において、可展条件を数値的に満たすための制約条件^{13,14)}と、接平面の法線の連続条件を定式化する。

数値解析例では、導線をモデル化するためのベジエ曲線^{15,16)}制御節点座標を設計変数とし、長期荷重を想定した鉛直荷重と地震荷重を想定した水平荷重を同時に作用させ、最大主応力を最小化する¹⁷⁾ことを通じて最適な形状を求め、その特性を考察する。

* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生・修士

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

*** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生

Grad. Student, Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University, M. Sc.

Prof., Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

Grad. Student, Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University

2. 可展面のモデル化

2.1 可展面の定義

可展面は、線織面に可展条件を与えることにより定義される。線織面の定義にはさまざまな方法があるが、直線（母線）を曲線（導線）に沿って移動させる定義が簡便である。導線の座標のベクトルを $\mathbf{f}(u)$ 、母線方向ベクトルを $\mathbf{g}(u)$ とすると、 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{g}(u)$ を用いて線織面は次式で与えられる。

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{f}(u) + v\mathbf{g}(u) \quad (1)$$

ここで、 u, v は 0 から 1 まで変化するパラメータである。

$v=0$ に対応する導線 $\mathbf{f}(u)$ とは反対側の $v=1$ に対応する曲線を $\mathbf{h}(u)$ とすると、 $\mathbf{h}(u) = \mathbf{f}(u) + \mathbf{g}(u)$ であることから、式(1)は次式のように表すことができる。

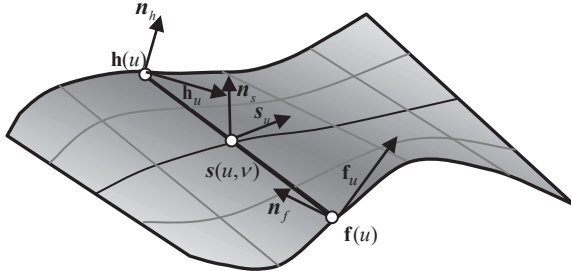
$$\mathbf{s}(u, v) = (1-v)\mathbf{f}(u) + v\mathbf{h}(u) \quad (2)$$

$\mathbf{h}(u)$ は導線 $\mathbf{f}(u)$ と等しいパラメータを持つ曲線であり、 $\mathbf{f}(u)$ と $\mathbf{h}(u)$ の同一のパラメータ値の点を結んだ線分が母線になる。図 1 は、一般の線織面と可展条件を満足する線織面(可展面)を表している。

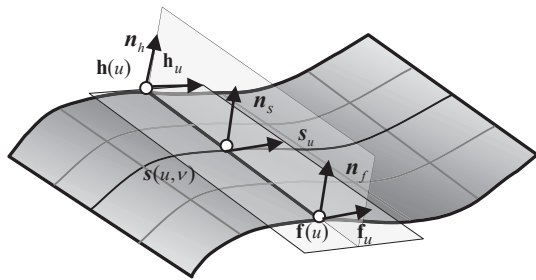
$\mathbf{s}(u, v)$ 、 $\mathbf{s}_u$ 、 $\mathbf{n}_s$ は、パラメータ u, v に対応する曲面上の点、その点での接線ベクトルと法線ベクトルである。また、 $\mathbf{n}_f$ 、 $\mathbf{n}_h$ はそれぞれの導線上の点での曲面の法線ベクトルを表しており、接線と母線で接平面が定義される。可展条件を満足しない線織面では、図 1(a)のように一つの母線上での法線の向きが異なり、法線は同一平面上に存在しない。一方、可展面では、図 1(b)のように母線上の任意の点の接線と母線、および法線と母線は、それぞれ一つの平面を構成する。

以上より、 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ の u に関する微分を $\mathbf{f}_u$ 、 $\mathbf{h}_u$ とすると、式(2)で定義される線織面が可展面となる条件(可展条件)は、 $v=0, 1$ での導線方向の接線と母線が同一平面にある条件として、スカラー三重積を用いて次式のように表すことができる。

$$\det(\mathbf{f}_u(u), \mathbf{h}(u) - \mathbf{f}(u), \mathbf{h}_u(u)) = 0 \quad (3)$$



(a) 一般の線織面



(b) 可展条件を満足する線織面

図1 一般の線織面と可展面

以上より、式(2)、(3)が任意の u, v で成立するように同一パラメータを持つ 2 つの曲線 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ を定めることにより、可展面の形状を表現することができる。

2.2 ベジエ曲線による可展面の表現

曲線 $\mathbf{f}(u)$ と $\mathbf{h}(u)$ をベジエ曲線で定義して、可展面の形状を表現する。 n 次ベジエ曲線 $\mathbf{P}^n(u)$ は次式で表すことができる。

$$\mathbf{P}^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i B_i^n(u) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{Q}_i = (q_x^i, q_y^i, q_z^i)^T$ 、 $B_i^n(u)$ はそれぞれ i 番目の制御点座標ベクトルと次式で定義される n 次のバーンスタイン基底関数である。

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (5)$$

曲線 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ の制御点をそれぞれ $\mathbf{Q}_i^f$ 、 $\mathbf{Q}_i^h$ とすると、 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ は次のように書ける。

$$\mathbf{f}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i^f B_i^n(u) \quad (6)$$

$$\mathbf{h}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i^h B_i^n(u) \quad (7)$$

式(6)、(7)を式(2)に代入することにより、ベジエ曲線を用いた可展面を以下のように定義することができる。

$$\mathbf{s}(u, v) = (1-v) \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i^f B_i^n(u) + v \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_i^h B_i^n(u) \quad (8)$$

3 次のベジエ曲線を用いた可展面を、ド・カステリヨのアルゴリズムによって生成する過程を図 2 に示す。図 2 では、簡単のため点の名称を位置ベクトルで表している。2 つの導線 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ は、以下のように再帰的に定義される。

$$\mathbf{D}_i^f = u\mathbf{Q}_i^f + (1-u)\mathbf{Q}_{i+1}^f, \quad \mathbf{D}_i^h = u\mathbf{Q}_i^h + (1-u)\mathbf{Q}_{i+1}^h \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_i^f = u\mathbf{D}_i^f + (1-u)\mathbf{D}_{i+1}^f, \quad \mathbf{E}_i^h = u\mathbf{D}_i^h + (1-u)\mathbf{D}_{i+1}^h \quad (10)$$

$$\mathbf{f}(u) = u\mathbf{E}_0^f + (1-u)\mathbf{E}_1^f, \quad \mathbf{h}(u) = u\mathbf{E}_0^h + (1-u)\mathbf{E}_1^h \quad (11)$$

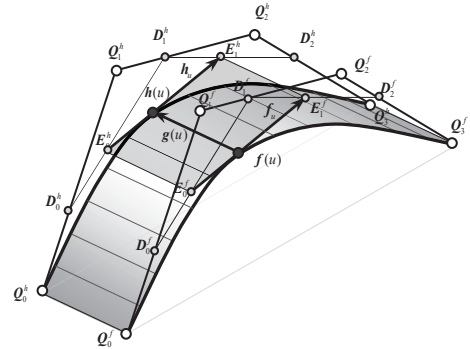


図2 ベジエ曲線で定義された可展面

u が与えられたとき、パラメータ v を変化させて得られる母線 $(1-v)\mathbf{f}(u) + v\mathbf{h}(u)$ は導線上の 2 つの点 $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ を結んだ線分であり、また、 $\mathbf{E}_1^f - \mathbf{E}_0^f$ 、 $\mathbf{E}_1^h - \mathbf{E}_0^h$ はそれぞれ $\mathbf{f}(u)$ 、 $\mathbf{h}(u)$ の接線ベクトル $\mathbf{f}_u$ 、 $\mathbf{h}_u$ と同じ方向のベクトルになる。可展条件である式(3)は母線方向ベクトル $\mathbf{g}(u)$ と接線ベクトル $\mathbf{E}_1^f - \mathbf{E}_0^f$ 、 $\mathbf{E}_1^h - \mathbf{E}_0^h$ が同一平面上にあることを示している。このことは、点 $\mathbf{E}_0^f$ 、 $\mathbf{E}_1^f$ 、 $\mathbf{E}_0^h$ 、 $\mathbf{E}_1^h$ が同一平面にあることと同値である。したがって、可展条件は、以下のように表現できる¹⁵⁾。

$$(\mathbf{E}_1^f - \mathbf{E}_1^h) \cdot [(\mathbf{E}_1^f - \mathbf{E}_0^f) \times (\mathbf{E}_1^h - \mathbf{E}_0^h)] = 0 \quad (12)$$

n 次のベジエ曲線では、 $\mathbf{E}_i^f, \mathbf{E}_i^h$ は u の $n-1$ 次多項式であり、式 (12) は u の $3(n-1)$ 次の多項式である。したがって、定数項も含めると $3n-2$ 個の係数がある。文献 15) では、 $n=2, 3$ の場合について、それぞれ 4 次と 7 次の可展条件式を導いている。

本論では、数値的な最適化手法により、可展面を求める。そのため、 $3n-2$ 個の異なる u の値に対して式 (12) の可展条件を制約条件として与える。

2.3 可展面の接合

可展条件は曲面形状を厳しく制限するため、ベジエ曲線を利用した可展面の形状はかなり限定されるが、複数の可展面を接合することにより、より複雑な曲面形状を表現することができる。導線方向の曲面の接合については、数学的な C^1 連続と、幾何学的な G^1 連続がある。 C^1 連続はパラメータ u に関する連続条件であり、 G^1 連続より厳しい条件である。例えば、 C^1 連続が成立しなくても、接線の連続条件である G^1 連続が成立する場合がある。

建築曲面では幾何学的な連続性が重要なので、以下の 2 種類の接合方法を考える。

- 1) 隣接する可展面の母線を一致させる接合方法 (G^0 連続接合)
- 2) 2 つの可展面が共有する母線上で、導線方向の接線あるいは曲面の法線を導線方向に連続させる方法 (G^1 連続接合)

上記以外にも、母線上で導線方向に $(n-1)$ 次の連続条件を満たさせることができるが、制約条件が複雑になるため現実的ではない。

G^0 連続接合と比べて、 G^1 連続接合は滑らかに接合できるのみならず、可展面の場合、曲面全体を折り曲げずに平面に展開することができる特徴を持っているが、 G^0 あるいは G^1 の選択は、建築意匠に依存するものと考えられる。

導線方向に G^1 連続で曲面を接合する際に、最も単純な方法は、導線を G^1 連続で接合する方法である。しかし、その場合、曲面の自由度が限定されるので、ここでは、曲面が G^1 連続である条件、すなわち法線の方向が連続である条件を与える。

図 3 に示したように、曲面と制御多角形を定義すると、 G^0 連続接合は、ベジエ曲線 $\mathbf{f}_1(u)$ と $\mathbf{h}_1(u)$ により定義された可展面の $u=1$ での境界 $\mathbf{Q}_3^f, \mathbf{Q}_3^h$ とベジエ曲線 $\mathbf{f}_2(u)$ と $\mathbf{h}_2(u)$ により定義された可展面の $u=0$ での境界 $\mathbf{Q}_0^f, \mathbf{Q}_0^h$ を一致させることで実現できる。

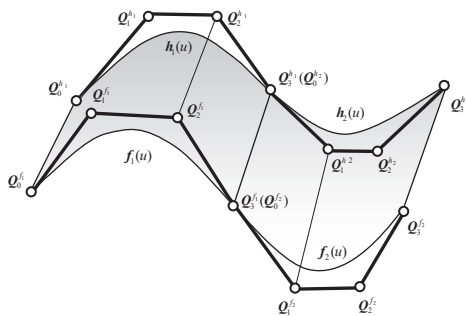


図 3 ベジエ曲線で定義された可展面の接合

一方、 G^1 連続接合は、 $\mathbf{Q}_2^f, \mathbf{Q}_2^h, \mathbf{Q}_3^f(\mathbf{Q}_0^f), \mathbf{Q}_3^h(\mathbf{Q}_0^h), \mathbf{Q}_1^f, \mathbf{Q}_1^h$ が同一平面にある条件により実現することができる。それぞれの曲面ですでに可展条件を満たしているため、この条件は、3 つのベクトル、 $\mathbf{Q}_3^f - \mathbf{Q}_2^h, \mathbf{Q}_3^f - \mathbf{Q}_3^h(\mathbf{Q}_0^f - \mathbf{Q}_0^h), \mathbf{Q}_3^f - \mathbf{Q}_1^h$ のスカラー三重積が

0 になる条件として定式化できる。

3. 可展面の形状最適化手法

3.1 最適化問題

主応力の絶対値の最大値(以下、最大主応力)を最小化することにより、可展面で形成されるシェルの材料を最も効率的に利用することができる。ベジエ曲線で導線を表現し、その制御点座標を設計変数とする。また、可展条件と連続条件を制約条件とする。

最適化手法は、非線形計画法の一つである逐次 2 次計画法とする。シェル曲面を有限要素で分割し、その上下面で主応力を評価する。ただし、最大主応力を生じる要素は、最適化の過程で変化するため、目的関数の感度係数が不連続となる。そのため、 p -ノルム^{18,19)}を用いて目的関数をスムージングする。

以上より、 $\mathbf{Q}_i$ を並べたベクトルを $\mathbf{Q}$ とすると、最大主応力を最小化することを目的とした形状最適化問題は次のように定式化できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{Q}} H(\mathbf{Q}) = \left[\sum_{i=1}^m (\sigma_{\max,i}(\mathbf{Q}))^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ \text{s. t. } D_k(\mathbf{Q}, u_i) = 0, (k=1, \dots, q; i=1, \dots, 3n-2) \\ S_{1i}(\mathbf{Q}) = 0, (i=1, \dots, s_1) \\ S_{2i}(\mathbf{Q}) = 0, (i=1, \dots, s_2) \\ \mathbf{Q}^l \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{Q}^u \end{array} \right. \quad (13)$$

ここで、 $\sigma_{\max,i}(\mathbf{Q})$ は種々の荷重条件に対する各要素の最大主応力の絶対値の i 番目に大きい値である。目的関数 $H(\mathbf{Q})$ は $1 \sim m$ 番目に大きい主応力の p -ノルムである。 p は近似精度を定めるパラメータであり、 $\mathbf{Q}^u, \mathbf{Q}^l$ は制御点座標ベクトル $\mathbf{Q}$ の許容変化範囲を表す上・下限のベクトルである。 $D_k(\mathbf{Q}, u_i)$ は、 k 番目の可展面の $u=u_i$ で定義されたスカラー三重積(式(12)の左辺)の値であり、 q は接合される可展面の数である。 $S_{1i}(\mathbf{Q})=0$ と $S_{2i}(\mathbf{Q})=0$ はそれぞれ s_1 個の接合線での G^0 連続条件、 s_2 個の接合線での G^1 連続条件を表している。なお、 G^0 連続条件は、ベジエ曲面の制御点を接続線で共有することにより満たすことができる。

3.2 最適化手法

可展条件は非常に厳しい条件であるため、形状の変化を制限する $\mathbf{Q}^u$ と $\mathbf{Q}^l$ に厳しい値を与えると、許容解が存在しなくなる。さらに、式(13)の目的関数を求める際には構造解析が必要となり、多くの計算量を要する。したがって、許容解が存在しないような状況を防ぐため、まず、簡単に評価できる幾何学的な特性量 $G(\mathbf{Q})$ を目的関数として、以下のような最適化を実行し、許容解が存在することを確認できれば、 $H(\mathbf{Q})$ を目的関数として最適形状を求める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min G(\mathbf{Q}) \\ \text{s.t. 問題(13)の制約} \end{array} \right. \quad (14)$$

目的関数 $G(\mathbf{Q})$ にはさまざまな関数が考えられる。例えば、一つ制御点 $\mathbf{Q}$ の成分の最小化でも良い。しかし、その場合は最適解が不定になるので、 $\mathbf{Q}$ の全ての成分が関係する表面積を目的関数として最適化を行なうことにする。

弾性構造解析には OpenSees²⁰⁾ を利用し、最適化には Snoop²¹⁾ を

用いる。感度係数は、差分近似する。形状最適化のアルゴリズムは以下のとおりである。

Step 1 境界条件，材料定数などを決める。

Step 2 ベジエ曲面の連続条件の種類を定めて，制御点座標の初期値と上・下限値 Q^u ， Q^l を設定する。

Step 3 $G(Q)$ を目的関数として最適化を実行し，許容解が存在しなければ，Step 2 に戻って Q^u ， Q^l を変更する。

Step 4 $H(Q)$ を目的関数として最適形状を求める。

4. 数値計算例

4.1 最適化の概要

本節では，3 次ベジエ曲線を用いて表現した単純な可展面モデル，4 つの可展面を G^0 ， G^1 連続接合したモデル，導線方向により複雑な形状を持つ接合可展面モデルの形状を最適化する。これらの計算例を通じて，可展面を接合した自由曲面シェル構造の形状最適化手法の有効性を検証するとともに，最適解の特性を考察する。初期制御点は，建築計画と意匠の条件から決められるが，ここでは最適化例を示すために著者らの判断で定める。以下の計算例では，式(12)の可展条件を満たすために必要な 7 個のパラメータ値を，各部分曲面について $u = 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9$ とする。

設計外力は，鉛直方向には自重を， x, y 軸で定められる水平方向には地震荷重を想定して自重の 0.3 倍の荷重を作用させる。曲面の非対称性を考慮すると，荷重条件は，自重，自重 $\pm x$ 方向地震荷重，自重 $\pm y$ 方向地震荷重の 5 ケースである。曲面シェル構造は厚さ 0.2 m のコンクリートを採用し，そのヤング係数，ポアソン比および比重はそれぞれ 24 GPa, 0.2, 24.5 kN/m³ とする。また，式(13)において， $m = 10$ ， $p = 10$ とし，仮の目的関数 $G(Q)$ はシェルの表面積とする。各部分曲面のパラメータ u と v を 4.2 節のモデルではそれぞれ 10 等分，4.3 節，4.4 節ではそれぞれ 20 等分して 4 辺形シェル要素を生成する。

4.2 単純可展面モデル

60.0×40.0m の矩形平面を持つシェルを図 4 に示す。シェルは図 4(a) に示す 4 つの隅点 A, B, C, D でピン支持されている。図 4(b) は，初期制御点 A_0, A_1, A_2, A_3 と B_0, B_1, B_2, B_3 による 3 次ベジエ曲線 $f(u)$ ， $h(u)$ を導線とした初期曲面構造の斜投影図である。また，本モデルでは 4 つの支持点の位置を固定して形状最適化を行なう。

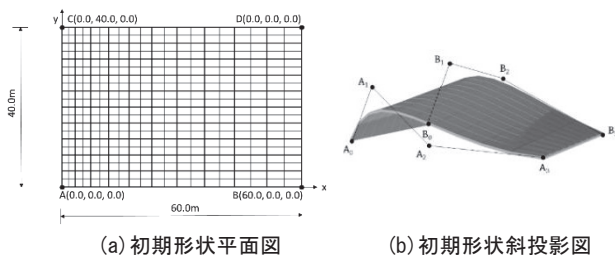


図 4 単純可展面の初期形状

図 5(a), (b) はそれぞれ最適形状の平面図と斜投影図である。図から分かるように，最適形状は初期形状と比べて前面の導線が低くなり，背面の導線が高くなっている。一方，表 1 からわかるように初期形状の最大主応力は 10.741 MPa であるのに対し，最適形状の最

大主応力は 1.784 MPa であり，初期形状の 16.6% まで減少している。図 6(a), (b) は各荷重ケースにおける各要素最大主応力の等応力線図である。応力は四辺形要素中央位置で評価し，パラメータ u, v を座標軸とする。線の見盛りは省略するが，線の密度から応力分布が均等化に向かってかなり改善されていることが確認できる。

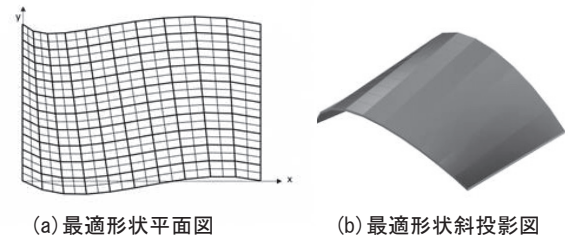


図 5 単純可展面の最適形状

表 1 単純可展面の最大主応力の最大，最小，平均値 (Mpa)

	最大値	最小値	平均値
初期形状	10.741	0.681	2.525
最適形状	1.78	0.184	0.787

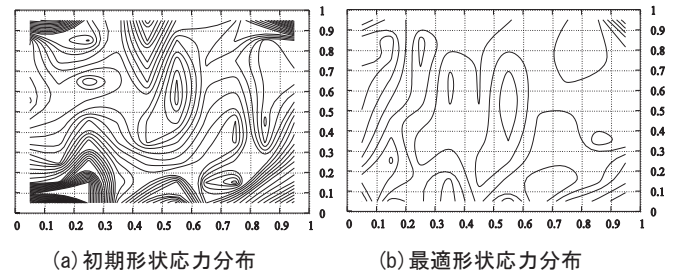


図 6 単純可展面の応力分布

4.3 G^0 ， G^1 連続接合の可展面モデル

60.0×40.0m の矩形設計領域に図 7(a) のように平面を決定し，8 つの点 A, B, C, D, E, F, G, H で支持する。4 隅以外の支持点の位置を固定しないことにより可展条件の満足化を容易にする。図 7(b) は初期形状の斜投影図であり，曲面は 4 つの可展面から構成されている。

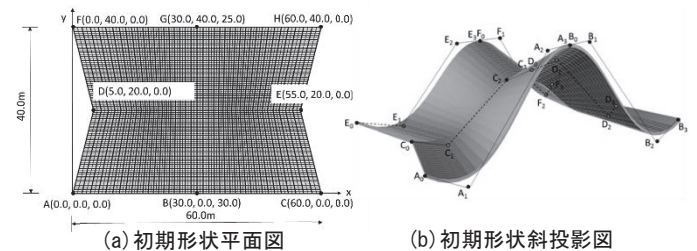


図 7 接合可展面の初期形状

母線方向には G^0 連続接合とし，導線方向には G^0 ， G^1 接合を連結条件とした 2 つのケースを検討する。平面図において左側の曲面の導線の終点と右側の曲面の始点を重複させ，さらに，上側と下側のベジエ曲面は中央の導線を共有するように設定する。

図 8(a), (b) はそれぞれ G^0 連続接合の最適形状の平面図と斜投影図を表し，図 9(a), (b) はそれぞれ G^1 連続接合の最適形状の平面図と斜投影図である。図から分かるように，初期構造は同じであるが，連

結条件が異なることで全く異なる最適形状が得られている。 G^1 連続接合の場合、曲面が滑らかに連結されている。

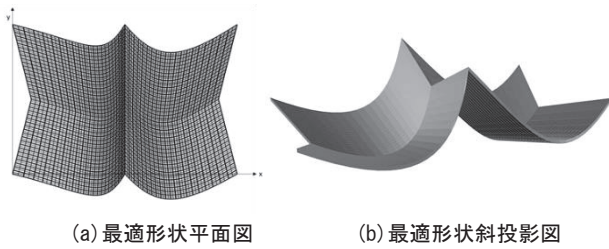


図 8 G^0 接合可展面の最適形状

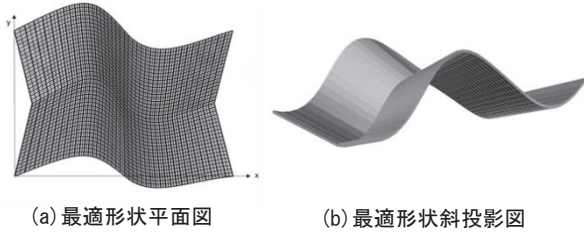
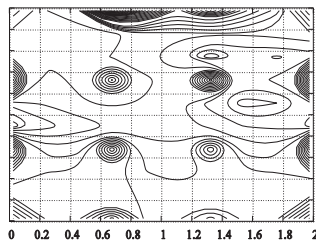
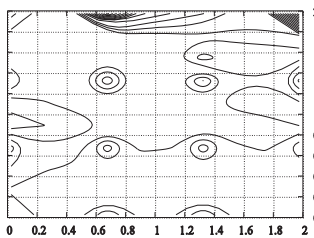


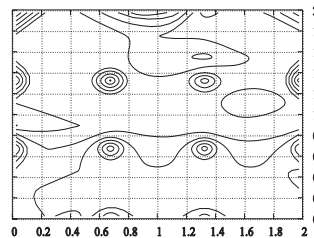
図 9 G^1 接合可展面の最適形状



(a) 初期形状応力分布



(b) G^0 接合最適形状応力分布



(c) G^1 接合最適形状応力分布

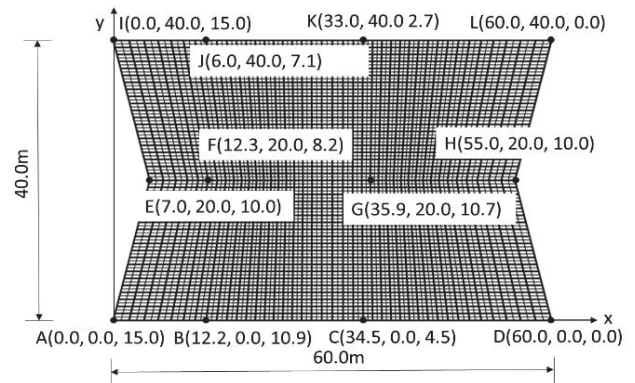
図 10 接合可展面の応力分布

初期形状の最大主応力は 21.032MPa であるのに対し、 G^0 連続接合の最適形状の最大主応力は 3.817MPa、 G^1 連続接合の場合は 4.807MPa であり、それぞれ初期形状の 18.2%、22.9%まで減少している。 G^1 連続接合は G^0 連続接合より連続条件が厳しいため、最大応力の減少が小さいと考えられる。各荷重ケースにおける応力最大値の分布を図 10 に示す。図(a), (b), (c)は、それぞれ設計領域をパラメータで表した初期形状、 G^0 接合最適形状、 G^1 接合最適形状の等応力線図であるが、4 つ可展面の接合により構成された曲面であることから、 x, y 方向のパラメータ値はいずれも 0~2 になる。図から分かるように、 G^0 接合と G^1 接合ともに、応力分布の均等化に向かって改善されている。

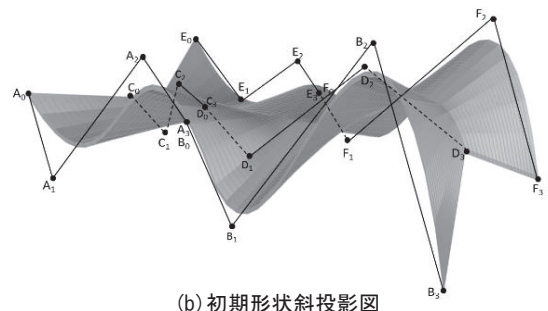
4.4 複雑な形状の導線で構成された可展面モデル

複数の波を持っている導線で作成される可展面のモデルを考える。

60.0×40.0mの矩形設計領域に図 11(a)のように平面を決定し、12 個の点 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ で支持し、 A, D, I, L の 4 つの支持点の位置を固定した。

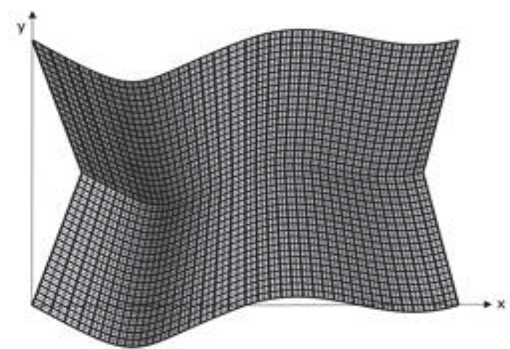


(a) 初期形状平面図

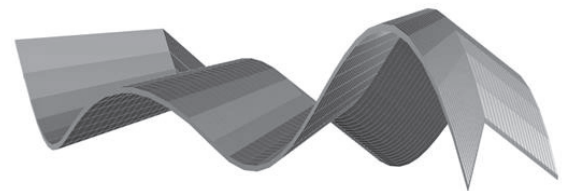


(b) 初期形状斜投影図

図 11 複雑な形状の導線で構成された可展面の初期形状



(a) 最適形状平面



(b) 最適形状斜投影図

図 12 複雑な形状の導線で構成された可展面の最適形状

図 11(b)は初期形状の斜投影図である。接合可展面モデルと同様に 4 つの可展面から構成されているが、3 つの導線は複数の波を持

っている。母線方向は G^0 連続接合、導線方向には G^1 連続を接合条件として検討する。他の条件は接合可展面の G^1 接合と同じである。

図 12(a), (b)は最適化後の平面図と斜投影図を表している。図から分かるように、初期形状で複数の波を持っている導線を導入することで、最終的にも複数の波を持つ複雑な可展面を生成することができる。また、初期構造とは異なり、中央の導線が両辺の導線より高くなって力学的にも合理的な方向に向かって変化したことも確認できる。一方、初期形状の最大主応力は 8.1MPa であるのに対し、最適形状の最大主応力は 2.947MPa になり、36.4%まで減少している。

図 13(a), (b)は、4.3 節の例と同じように設計領域をパラメータで表した初期形状、最適形状の等応力線図である。図から分かるように、応力分布が均等化に向かって改善されていることも確認できる。

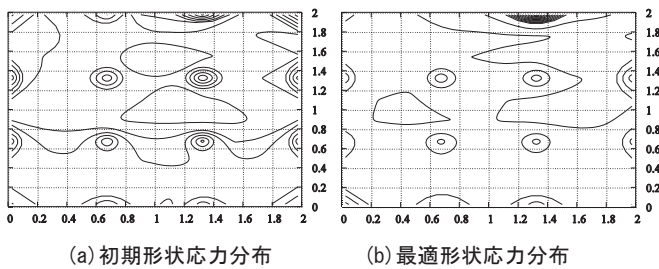


図 13 複雑な形状の導線で構成された可展面の応力分布

5. まとめ

本論では、力学性能のみではなく施工性も視野に入れた可展自由曲面構造の生成方法を提案し、いくつかの計算例を通じて最大主応力の最小化を目的とした最適化手法の有効性を検討した。本論で得られた知見を以下にまとめる。

- 1) 曲面形状を定める 2 個の導線をベジエ曲線で表現し、可展条件を制約条件として与えることにより、ベジエ曲線の制御点座標を変化させて多様な可展面形状を得ることができる。また、最適化過程でベジエ曲線の制御点を設計変数とすることにより、少ない計算量で形状を最適化できる。
- 2) 鉛直荷重のみではなく水平荷重との組み合わせに対する最大主応力を最小化することにより、耐震性も考慮した自由曲面シェルの合理的な形状を求めることができる。主応力が最大となる要素は、形状変化にともなって変化するため、最大主応力感度係数は不連続になる。このような問題に対しても、最大主応力を p -ノルムを用いてスムージングすることにより、非線形計画法を用いて最適解を求めることができる。
- 3) 複数のベジエ曲面を接合して可展面を形成する際に、 G^0 , G^1 連続の異なる接合条件を与えることにより、力学合理性を保持して、さまざまな形状の可展面を創生することが可能である。 G^1 接合に関しては、境界曲線の接線の連続性ではなく、曲面の法線の連続性を満たすことにより、形状の制約を緩和できる。
- 4) シェル曲面を有限要素分割して、複数の荷重に対する応力を考慮して最適化するためには、多くの計算量を必要とする。また、可展条件は、形状の自由度を厳しく限定するため、制御点座標の上・下限値の設定が困難である。このような場合、構造解析を必要とする目的関数を最小化する前に、構造解析を必要としない仮の目的関数を与えて、許容解が存在することを確認すること

が有効である。

本論の研究を通じて可展面は実用性が高いものであること、特に本論で提案した方法を用いて建築計画段階で有効な情報が得られることが期待できる。また、本論は手法の提案を目的としており、実際に使用するときには、意匠設計者が初期解と制御点の範囲を決めて、初期解に近い最適可展面を求めることになる。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 16K14338 の助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 佐々木睦朗: RC 自由曲面シェルの構造デザイン, 力学・素材・構造デザイン-4 章, 建築技術, 2012.1
- 2) S. Adriaenssens, P. Block. and D. Veenendaal: Shell Structures for Architecture, Routledge, 2014.
- 3) 關 和也, 大崎 純, 藤田慎之輔: 線織面を接合した自由曲面シェルの形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 情報システム技術, pp. 23-26, 2014.
- 4) 關 和也, 大崎 純, 藤田慎之輔: 応力最小化を目的とした線織面シェルの形状最適化, 第 37 回情報システム・利用・技術シンポジウム, 日本建築学会情報システム技術委員会, H59, pp. 316-318, 2014.12
- 5) 西森裕人, 本間俊雄, 横須賀洋平: 自由曲面グリッドシェル構造の部材長一様化と接合角を考慮した形態創生, 日本建築学会構造系論文集, No. 721, pp. 565-562, 2016.3
- 6) G. Aumann: A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces, Computer-Aided Geometric Design, Vol. 20, pp. 601-619, 2003.
- 7) W. Shuxun and Y. E. Zhengli: Design of developable Bézier surfaces by de Casteljau algorithm, Computer Engineering and Application, Vol. 43(23), pp. 21-23, 2007.
- 8) G. Aumann: Degree elevation and developable Bézier surface, Computer-Aided Geometric Design, Vol. 21, pp. 661-670, 2004.
- 9) M. Zhou, J. Yang, H. Zheng and W. Song: Design and shape adjustment of developable surfaces, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 3789-3801, 2013.
- 10) D. F. Rogers and J. A. Adams: Mathematical Elements for Computer Graphics Second Edition, 日刊工業新聞社, 1993.
- 11) G. Frain: CAGD のための曲線・曲面理論, 共立出版, 1991.
- 12) 安達忠次: 微分幾何学概説, 培風館, 1976.
- 13) 中村奎吾, 大崎 純: 可展面を接合した自由曲面シェルの形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp. 1077-1078, 2016.
- 14) C. Dongren and W. Guojin: Developable Bézier parametric surfaces, J. Computer Aided Design & Computer Graphics, Vol. 15(5), pp. 570-575, 2003.
- 15) C.-H. Chu and C. H. Sequin: Developable Bézier patches: properties and design, Computer-Aided Design, Vol. 34, pp. 511-527, 2002.
- 16) C.-H. Chu, C. L. Wang and C.-R. Tsai: Computer aided geometric design of strip using developable Bézier patches, Computers in Industry, Vol. 59, pp. 601-611, 2008.
- 17) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明: 形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法, 日本機械学会論文集 A, Vol. 63, pp. 610-617, 1997.
- 18) P. Duysinx and M. P. Bendsoe: Topology optimization of continuum structures with local stress constraints, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 43(8), pp. 1453-1478, 1998.
- 19) M. Ohsaki, Optimization of Finite Dimensional Structures, CRC Press, 2010.
- 20) Open System for Earthquake Engineering Simulation (OpenSees), PEERC, UC Berkeley. <http://opensees.berkeley.edu/>, Nov. 1, (accessed 2016. 11. 1)
- 21) P. E. Gill, W. Murray and M. A. Saunders: SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization, SIAM J. Opt., Vol. 12, pp. 979-1006, 2002.

SHAPE OPTIMIZATION OF FREE-FORM SHELLS CONSISTING OF DEVELOPABLE SURFACES

Jinglan CUI^{*}, *Makoto OHSAKI*^{**} and *Keigo NAKAMURA*^{***}

^{*} Grad. Student, Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University, M. Sc.

^{**} Prof., Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr. Eng.

^{***} Grad. Student, Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Recently, a number of designers have focused on free-form surface shell to realize a free architectural form that is different from the analytical curved surface such as cylindrical or spherical surfaces. However, in order to create rational architectural forms, constructability and cost are also essential factors to be considered.

Developable surface is a special form of ruled surface generated by continuous movement of the straight line. It can be obtained by adding the condition that the normal vector of the surface does not change along the generating line (generatrix). Because the generatrix is a straight line without torsion, the formwork of continuum shell is easily created. Since the twisting process is not required, it has a high workability characteristics.

In this study, several developable surfaces are combined to form a curved roof structure. The $(n,1)$ Bézier surface is used for modeling the surface. Optimization problem is formulated for minimizing the maximum principal stress under several static loading conditions including vertical and horizontal loads. The coordinates of control points of the Bézier surface are chosen as design variables. The developability condition is numerically assigned so that the tangent vectors at the same parameter value of the two Bézier curves along the boundary exist in the same plane as the directing line. The G^0 and G^1 continuity conditions are assigned for connecting the Bézier surfaces. Optimal solutions are found using nonlinear programming approach, where the sensitivity coefficients are computed by the finite difference approximation.

As the result of optimization, a variety of developable surfaces are obtained by connecting Bézier surfaces. Since the control points of the curves are chosen as design variables, the calculation efficiency is high. The stress distribution also greatly improved by using the maximum stress as the objective function.

(2016 年 11 月 10 日原稿受理, 2017 年 4 月 7 日採用決定)