

波数依存性を持つ混合境界条件でのスタジアムビリヤード

埼玉大理、吉永尚孝 成蹊大工、富谷光良

§ 1 Abstract

波数依存性を持つ混合境界条件によるビリヤードに対し、半古典論を拡張し、準位密度のなめらかな部分と振動部分を導く。これをスタジアムビリヤードに数値的に適用し、bouncing ball 軌道と呼ばれる軌道を排除することにより、より直接的に準位密度における量子・古典対応を確かめる。

§ 2 2次元スタジアムビリヤードにおける混合境界条件

定常状態のシュレディンガー方程式は $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi$ で $2m=\hbar=1$, $E=k^2$ とすれば、ビリヤードでは Helmholtz 方程式 $(\Delta+k^2)\Psi=0$ となる。通常の境界条件 (Dirichlet 条件) では $\Psi=0$ $\bar{r}\in\Gamma$ (境界上) を用いるが、混合条件 $\lambda\Psi(\bar{r}) + \partial_n\Psi(\bar{r})=0$, $\bar{r}\in\Gamma$ を用いることも出来る。我々の今回の仕事では、図 1 のように直線部分は Dirichlet 条件、円周上では $\lambda\Psi(\bar{r}) + \partial_n\Psi(\bar{r})=0$ のように混合条件を用いた。さらに、 λ に対し波数依存性を持たせ $\lambda=k\cot\alpha$ とした。ここで、 α はパラメーターであり、 $\alpha=0$ のとき Dirichlet 条件に一致し、 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき Neumann 条件に一致する。

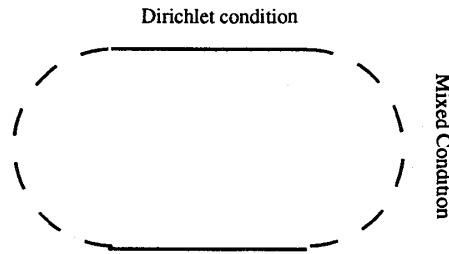


図 1

§ 3 2次元ビリヤードにおける平均準位密度

混合境界条件を用いた場合に導かれる平均準位密度は次の式で与えられる。

$$\bar{d}(E;\lambda) = \frac{A}{4\pi} - \frac{L_D}{8\pi k} - \frac{L_M}{8\pi k} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2}} - 2 \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{k}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2}} - 1 \right) \frac{d\lambda}{dk} \right] + \dots$$

ここで、 A はビリヤードの面積、 L_D は Dirichlet 条件をもつ周長、 L_M は混合条件をもつ周長である。境界条件に波数依存性がある場合は、 $\frac{d\lambda}{dk}$ に比例した部分が重要である。

§ 4 Bouncing Ball 軌道の準位密度への寄与

Stadium Billiard において、周期軌道はほとんどすべて不安定で孤立しているが唯一の例外がある。それは Bouncing Ball 軌道であり、これは準安定である。準位密度の振動部分に対する Gutzwiller のトレース公式は、一般の軌道に対して (Dirichlet 条件の場合)、

$$d_{gen}(k^2) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} a_{\gamma}^{(j)} \cos \left[j(k\ell_{\gamma} - \frac{\pi}{2}\alpha_{\gamma}) \right] , \quad a_{\gamma}^{(j)} = \frac{\ell_{\gamma}}{\sqrt{|2 - \text{tr } M_{\gamma}^{(j)}|}}$$

となるが、Bouncing Ball 軌道に対しては、長方形ビリヤードに対する Berry と Tabor の式で評

価すると、 $d_{bb}(k^2) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi k}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{bb}}{\sqrt{j\ell_{bb}}} \cos(jk\ell_{\gamma} - \frac{\pi}{4})$, $A_{bb} = 4ar$ $\ell_{bb} = 4r$ となる。この式の

振幅の部分を見ると、より波数 k が大きいとき（すなわち、より古典極限で）、Bouncing Ball 軌道の寄与が一般の軌道に勝ることがわかる。

§ 5 混合境界条件下の準位密度

準位密度は一般の孤立周期軌道とBouncing Ball 軌道の和で表わされるとすると、半古典論で、

$$d(k^2, \alpha) = d_{bb}(k^2) + d_{gen}(k^2, \alpha), \text{ ただし, } d_{gen}(k^2, \alpha) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} a_{\gamma}^{(j)} \cos\left[j\left(k\ell_{\gamma} - \frac{\pi}{2}\alpha_{\gamma} + \phi_{\gamma}\right)\right]$$

$\phi_{\gamma} = \sum_{i=1}^{n_{\gamma}^c} 2 \tan^{-1}(\tan \alpha \cos \theta_{\gamma}^i)$ のように与えられる。したがって、Bouncing Ball 軌道の部分はパラメータ α によらないので、混合境界条件と Dirichlet 条件の差

$d(k^2, \alpha) - d(k^2, \alpha=0) = d_{gen}(k^2, \alpha) - d_{gen}(k^2, \alpha=0)$ を考えると、これによって、 $d_{bb}(k^2)$ の寄与を除ける。以上は、半古典論による推測であるが、量子力学的な準位密度に対しても同じ様に混合境界条件と Dirichlet 条件での準位密度の差を考えることによって、Bouncing Ball 軌道を排除できると仮定する。

§ 6 古典周期軌道の周期

実際に、以上のように、Bouncing Ball 軌道の排除が量子力学的にも起こりうるかを見るために、

量子力学的な準位密度の Fourier 変換 $f(\ell, \alpha) \equiv \int dk d(k, \alpha) \cos k\ell$ を調べる。これによって、古典周期軌道の周期について知ることができる。まず、Dirichlet 条件の場合

$$f(\ell, \alpha=0) = \int_0^{k_{\max}} dk d(k, \alpha=0) \cos k\ell \quad \text{の絶対値は図2のようになる。今度は、混合境界条件との}$$

$$\text{差 } f(\ell, \alpha) - f(\ell, \alpha=0) = \int_0^{k_{\max}} dk (d(k, \alpha) - d(k, \alpha=0)) \cos k\ell \text{ の絶対値を考えると、図3であらわされ}$$

るように、Bouncing Ball 軌道をうまく排除できていることがわかる。以上の計算では、量子力学的なエネルギー固有値は $k=151$ まで、合計約 3170×4 本（4種類の対称性より）を取った。また $\alpha=0.1$ とした。 $\ell=4$ での小さなピークは edge からの寄与と考えられる。

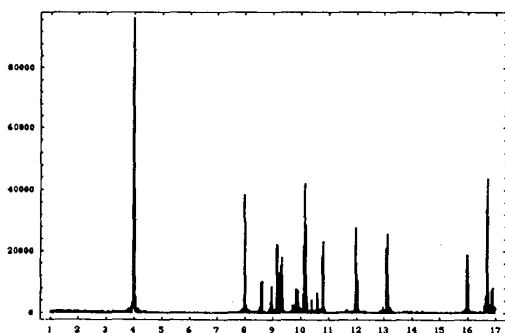


図2（横軸は、 ℓ ）

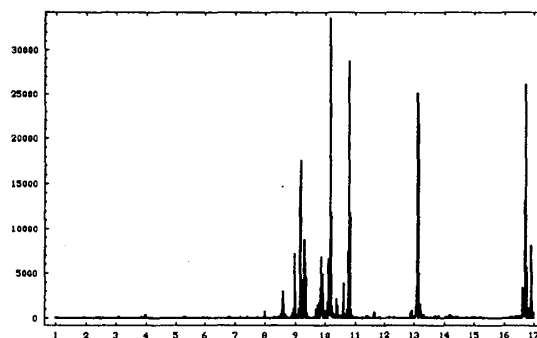


図3（横軸は、 ℓ ）

§ 7 量子準位密度と半古典準位密度の比較

ここでは、量子準位密度の振動部分と、半古典論による準位密度の振動部分

$$d_{gen}(E, \alpha) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} a_{\gamma}^{(j)} \cos \left[j \left(k\ell_{\gamma} - \frac{\pi}{2} \alpha_{\gamma} + \phi_{\gamma} \right) \right], \quad \phi_{\gamma} = \sum_{i=1}^{n_{\gamma}^c} 2 \tan^{-1} (\tan \alpha \cos \theta_{\gamma}^i)$$

を直接比較する。この際、無限個の古典周期軌道との比較はできないので、この準位密度をガウス関数 $f(E, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{E}{2\epsilon^2}\right)$ でなめらかにする。ここで、古典力学の周期軌道については、長さ $\ell = 16.0$ までの約 1000 本の軌道を用いた。図 4 は Dirichlet 条件の場合の比較をあらわし、Bouncing Ball 軌道の寄与がかなり大きいことがわかる。図 5 は Dirichlet 条件と混合境界条件との差をプロットしている。半古典論と量子論の一致がかなりよいことが確かめられる。

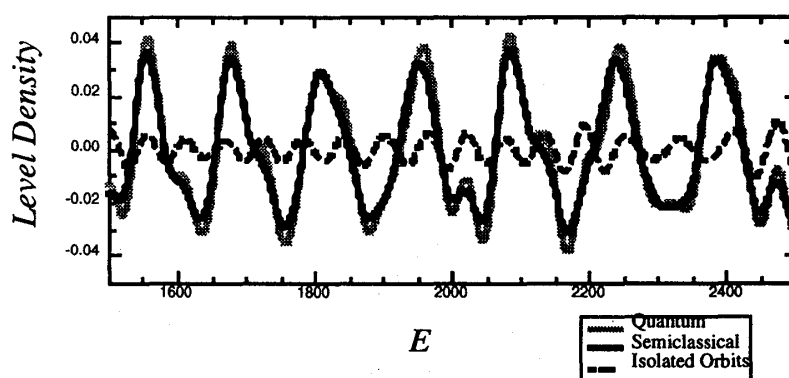


図 4

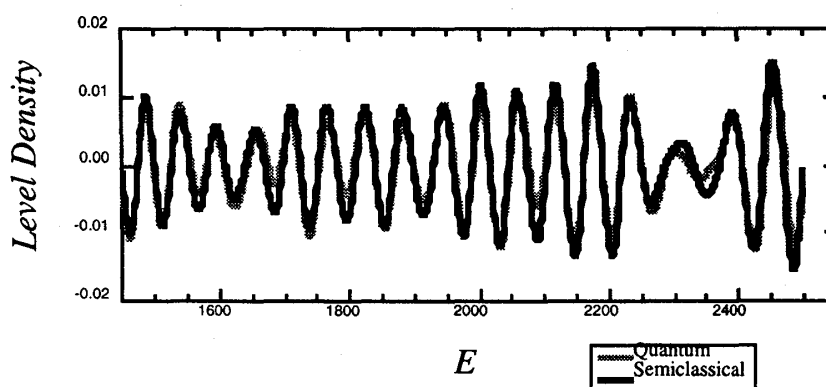


図 5

§ 8 まとめ

波数依存性をもつ境界条件をスタジアムビリヤードに課すことにより、量子論と半古典論の比較を行った。結果として、(1) 準位数に関するワイルの法則を波数依存のある境界条件の場合に導き、数値計算と非常によい結果の一致をみた。(2) 量子的な準位密度の Fourier 変換と古典周期軌道の周期との対応を調べた。波数依存のある境界条件と Dirichlet 条件の差の Fourier 変換から bouncing ball 軌道が排除されることが明確にわかった。(3) 混合境界条件を利用して、bouncing ball 軌道を排除することにより、半古典的な準位密度と量子力学的なものとの非常によい一致を得た。

なお参考文献として、Prog. Theor. Phys. 98('97)869pをご覧ください。