

## 擾乱を含んだ流れの数値解析的研究

### 一 平行ポアズユ流における 複合した 擾乱の安定問題

東大 宇宙研 池田元美

#### 概 要

2次元ポアズユ流において、有限擾乱が存在し、さらに微小擾乱が重なっている場合の解析方法を示した。微小擾乱が単独で存在する時とは異なる不安定領域をもつことがわかった。フーリエ展開、及び、有限擾乱の振幅による展開によって得られた、非線形効果をあらわす最初の項の数値を数値計算で求めた。

#### 1. まえがき

円管ポアズユ流、平行ポアズユ流、平板境界層の遷移、および不安定問題については、理論的、実験的に数多くの研究がなされている。一般に、これら境界をもつ流れでは、線形安定理論の結果は、物理現象を説明するのに充分ではない。円管ポアズユ流は、線形理論によれば、すべての領域で安定

であるにもかかわらず、実際にはあるレイノルズ数以上で不安定になり、乱流に遷移する。平行ポアズユ流においては、線形理論が示すよりずっと低いレイノルズ数で遷移がおこる。また、平板境界層の場合は、遷移する付近で、線形理論が示す不安定領域より数倍高い波数の擾乱があらわれる。

遷移の実験は、上流の条件、すなわち一様流中の乱れの状態が一樣ではないので、それぞれの実験で別々の結果が得られている。自然遷移を対称として研究することは難しい。

理論的研究は、線形安定理論に始まり、非線形性を考慮にいれたもの、あるいは数値実験的なものに致るまで、いろいろな手法を用いたものがある。LIN (1955) は、平行流中の波動伝播型の微小擾乱を決定する線形方程式を解き、不安定領域があることを明らかにした。しかし、その領域はレイノルズ数無限大で消滅してしまうなど、実際の現象とあうものではなかった。平行ポアズユ流について述べれば、その後、STUART (1960), WATSON (1960, 1962) が有限振幅をもつ2次元擾乱を、フーリエ展開、及び振幅による展開を用いて解く手法を示した。PEKERIS & SHKOLLER (1967, 1969) は、この計算を実際に行ない、有限擾乱は微小擾乱に比べ、レイノルズ数小、波数大の方へずれた不安定領域をもつことを明らかにした。

数値実験的研究としては、GEORGE & HELLUMS (1972) が有限擾乱をフーリエ展開してその数項までとり、時間的に積分する方法で不安定領域を求めた。DONALDSON (1969) は、3次の速度相関を適当な形で置き換え、空間的に拡大する領域を求めた。

この論文では、平行ポアズエ流中に、有限振幅( $\varepsilon$ )をもつ2次元擾乱が存在し、さらに2次元微小擾乱が重なった場合、微小擾乱が有限擾乱のどのような影響を受けるかを調べている。有限擾乱を基礎擾乱、微小擾乱を付加擾乱と名づける。基礎擾乱、付加擾乱ともフーリエ展開し、さらに $\varepsilon$ で展開する。基礎擾乱はWATSON (1960)の方法を用いて決定できる。付加擾乱の方程式は、線形方程式であるが、基礎擾乱と同様の手法を用いて解くことができる。計算結果としては、有限擾乱のない単独の微小擾乱にくらべ、付加擾乱の不安定領域はレイノルズ数小、波数大の方へずれることが得られた。

従来、乱流に遷移していく状態、あるいは充分に発達した乱流は、複雑な非線形現象であるといわれてきた。その中で、定常流中の微小擾乱が拡大して、乱流に遷移する場合を考えれば、線形安定理論の拡張としての非線形安定理論を用いて、その現象を説明することが可能であると思われる。

しかしこれまでの非線形理論では、有限擾乱は、微小擾乱の

不安定領域からずれた不安定領域をもつことしか述べられていない。この論文では、ある有限擾乱が存在すると、その影響で異なる波長の微小擾乱が成長することが示された。

これは非線形安定理論の拡張であり、一般化であるといえるだろう。さらにこのような作用を連鎖的におこすならば、乱流（充分に発達したものではないにしても）を表現する方程式系が確立される。

乱流が3次元性をもつ事実から考えると、3次元擾乱として取扱わなくてはならない。2次元擾乱と3次元擾乱との違いを明らかにすることが今後の課題であろう。

## 2 基礎方程式

運動を2次元に限定し、非圧縮性、非粘性流体を取扱い、渦度の拡散の式を基礎方程式とする。平行ポアズユ流の主流方向に $x$ 軸、それに垂直に $y$ 軸をとる。 $x, y$ は $D$ （平行平板間の距離）、速度は $U$ （平均流速）、時間は $D/U$ でそれぞれ無次元化する。 $Re \equiv UD/\nu$ （ $\nu$ : 動粘性係数）

定常基礎流に関する量を suffix B, 基礎擾乱のを A1, 付加擾乱のを A2 で示し、諸量をこれらの和として表わす。

$$\psi = \psi_B + \psi_{A1} + \psi_{A2} \quad (2.1)$$

平行ポアズユ流の速度分布は次のようになる。

$$\begin{cases} u_B = \frac{3}{2} (1 - 4y^2) \\ v_B = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

基礎擾乱は、付加擾乱がなくても基礎方程式を満足しているものとする。 (2.1) で  $\psi_{A2} = 0$  とおいて基礎方程式に代入すれば、基礎擾乱の方程式ができる。

$$\frac{\partial \omega_{A1}}{\partial t} + (u_B + u_{A1}) \frac{\partial \omega_{A1}}{\partial x} + v_{A1} \left( \frac{\partial \omega_B}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{A1}}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_{A1} \quad (2.3)$$

付加擾乱は微小量であると仮定し、 (2.1) を基礎方程式に代入し、 (2.3) を同時に用いて、さらに付加擾乱の2次の項を無視すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{A2}}{\partial t} + (u_B + u_{A1}) \frac{\partial \omega_{A2}}{\partial x} + u_{A2} \frac{\partial \omega_{A1}}{\partial x} \\ + v_{A2} \left( \frac{\partial \omega_B}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{A1}}{\partial y} \right) + v_{A1} \frac{\partial \omega_{A2}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_{A2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし 流れ関数  $\psi$ 、渦度  $\omega$ 、 $x$ 、 $y$  方向の流速  $u$ 、 $v$  の間の関係は次のとおりである。

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_{Ai} = \omega_{Ai} \\ u_{Ai} = \partial \psi_{Ai} / \partial y, \quad v_{Ai} = - \partial \psi_{Ai} / \partial x \end{cases} \quad (2.5)$$

$$(\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

$$i = 1, 2$$

### 3. 基礎擾乱

基礎擾乱の解法は、WATSON (1960) に詳しく述べてある。  
また、次節「付加擾乱」の項で同様の解法を示すので、そちらを参照されたい。

基礎擾乱の諸量をフーリエ展開し、次のようにおく。

$$\Psi_{A1} = \Psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \Psi_m e^{miA_1 x} + \bar{\Psi}_m e^{-miA_1 x} \right) \quad (3.1)$$

ただし  $\bar{\Psi}_m$  は  $\Psi_m$  の共役複素数を表わす。  $\Psi_m$  は次の型式の解をもつことになっている。

$$\begin{cases} \Psi_m = \varepsilon^n \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{nm} \cdot |\varepsilon|^{2m} & (\text{但し } m=0 \text{ は } m=1 \text{ から}) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot |\varepsilon|^{2m} \end{cases} \quad (3.2)$$

$a_m$  は定数、 $\Psi_{nm}$  は  $y$  のみ、 $\varepsilon$  は  $t$  のみの関数である。

解を求める順序は次のようである。

$$\begin{array}{c} \Psi_{10}, a_0 \rightarrow \Psi_{n0} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \\ \downarrow \\ \Psi_{01}, \rightarrow \Psi_{11}, a_1 \rightarrow \Psi_{n1} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \\ \vdots \end{array}$$

$a_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) は任意の定数として未定のままにしておいてよい。すなわち、 $a_m$  ( $m \leq M$ ) を導入したことによって解が  $M$  個の任意性をもつことになる。

展開した解が収束するためには、基礎擾乱の振幅  $|\varepsilon|$  が、

$| \varepsilon | \ll \text{Max} \{ |a_{0r}|, (A_1 R_e)^{-1/3} \}$  を満足しなければならぬ。 ( $a_{0r}$  は  $a_0$  の実数部を表わす。 ) しかし、

$|a_{0r}| \ll (A_1 R_e)^{-1/3}$  の場合は、  $\psi_m$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) の収束をよくするように  $a_m$  を決定する必要がある。

#### 4. 付加擾乱

付加擾乱をフーリエ展開し、次のようにおく。

$$\psi_{A2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n \cdot e^{i\alpha_n x} \quad (4.1)$$

$$\alpha_n = A_2 + nA_1$$

これを (2.4) に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial t} + i\alpha_n U_B \omega_m + v_m \frac{\partial \omega_B}{\partial y} - \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_m^2 \right) \omega_m + Q_m + S_m = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} Q_m = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ i\alpha_{n-k} U_k \omega_{n-k} + i k A_1 U_{n-k} \omega_k \right. \\ & \left. + v_{n-k} \frac{\partial \omega_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial \omega_{n-k}}{\partial y} \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ i\alpha_{n+k} \bar{U}_k \omega_{n-k} - U_{n+k} i k A_1 \bar{\omega}_k \right. \\ & \left. + v_{n-k} \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial y} + \bar{v}_k \frac{\partial \omega_{n+k}}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$S_m = i\alpha_n U_0 \omega_m + v_m \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \quad (4.4)$$

$\Psi_{AI}$  には前節の方法で求めた値を用いる。(4.2)は次の形式の解をもつ.

$$\Psi_n = \begin{cases} \delta \varepsilon^n \sum_{m=0}^{\infty} |\varepsilon|^{2m} \Psi_{nm} & (n \geq 0) \\ \delta \bar{\varepsilon}^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} |\varepsilon|^{2m} \Psi_{nm} & (n \leq 0) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \delta \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m |\varepsilon|^{2m} \quad (4.6)$$

$b_m$  は定数.  $\delta$  は  $t$  のみ.  $\Psi_{nm}$  は  $y$  のみの関数である.

(4.5), (4.6) を (4.2) に代入すると. 次のようになる.

$$L_n(\Psi_{nm}) + 2m a_0 \omega_{nm} + R_{nm} + Q_{nm} + S_{nm} = 0 \quad (4.7)$$

$$L_n(\Psi) = \begin{cases} (b_0 + n a_0 + i \alpha_n u_B) \omega + v \frac{\partial \omega_B}{\partial y} - \frac{1}{R_e} (\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_n^2) \omega & (n \geq 0) \\ (b_0 - n \bar{a}_0 + i \alpha_n u_B) \omega + & (n \leq 0) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\omega = (\partial^2 / \partial y^2 - \alpha_n^2) \Psi, \quad v = -i \alpha_n \Psi.$$

$$R_{nm} = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (b_j + n a_j + 2(m-j) a_{j+1}) \omega_{n, m-j} & (n \geq 0) \\ \sum_{j=1}^m (b_j - n \bar{a}_j + 2(m-j) a_{j+1}) \omega_{n, m-j} & (n \leq 0) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$Q_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m \left( i \alpha_{n-k} u_{kj} \omega_{n-k, m-j} + i k A_1 u_{n-k, m-j} \omega_{kj} \right. \\ \left. + v_{n-k, m-j} \cdot \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial y} + v_{kj} \cdot \frac{\partial \omega_{n-k, m-j}}{\partial y} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=n+1}^{n+m} \sum_{j=0}^{m-k+n} \left( i\alpha_{n-k} u_{kj} \omega_{m-k, m-k+n-j} + u_{n-k, m-k+n-j} i k A_1 \omega_{kj} \right. \\
& \quad \left. + v_{n-k, m-k+n-j} \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial y} + \bar{v}_{kj} \frac{\partial \omega_{n-k, m-k+n-j}}{\partial y} \right) \\
& + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m-k} \left( i\alpha_{n+k} \bar{u}_{kj} \omega_{n+k, m-k-j} - u_{n+k, m-k-j} i k A_1 \bar{\omega}_{kj} \right. \\
& \quad \left. + v_{n+k, m-k-j} \frac{\partial \bar{\omega}_{kj}}{\partial y} + \bar{v}_{kj} \frac{\partial \omega_{n+k, m-k-j}}{\partial y} \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

但し  $Q_{nm}$  は  $n \geq 1$  の場合についてのものであり.  $n=0, n \leq -1$  については省略する.

$$S_{nm} = \sum_{j=1}^m \left( i\alpha_n u_{0j} \omega_{nm-j} + v_{nm-j} \frac{\partial \omega_{0j}}{\partial y} \right) \quad (4.11)$$

また.  $\psi_{nm}$ ,  $\omega_{nm}$ ,  $u_{nm}$ ,  $v_{nm}$  の間の関係は次のとおりである.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_n^2 \right) \psi_{nm} = \omega_{nm} \quad (4.12)$$

$$u_{nm} = \partial \psi_{nm} / \partial y, \quad v_{nm} = -i\alpha_n \psi_{nm} \quad (4.13)$$

境界条件は. 壁の上で速度が 0 になることから.

$$\begin{cases} u_{nm} = 0 & (\partial \psi_{nm} / \partial y = 0) & \text{at } y = \pm 1/2 \\ v_{nm} = 0 & (\psi_{nm} = 0) & \text{"} \end{cases}$$

解を求める順序は次のようである.

$$\begin{aligned}
\psi_{00}, \phi_0 & \rightarrow \psi_{n0} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots) \\
& \Downarrow \\
\psi_{01}, \phi_1 & \rightarrow \psi_{n1} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$\Psi_{00}$ ,  $\epsilon_0$  は Orr-Sommerfeld 方程式を解いて求める。  $\Psi_{00}$  として  $\psi$  の偶関数を仮定するので、  $\Psi_{nm}$  は  $n$  が偶数で偶関数、  $n$  が奇数で奇関数となる。  $\Psi_{nm}$  ( $n \neq 0$ ) は一組の方程式 (4.11) ~ (4.13) を解いて求められるが、  $\Psi_{0m}$ ,  $\epsilon_m$  も同じ方程式で決定しなくてはならない。 基礎擾乱の場合と同様、  $|2ma_{or}| \geq (A_2 Re)^{-1/3}$  ならば、  $\epsilon_m$  は任意の定数としてすしつかえないが、  $|2ma_{or}| \ll (A_2 Re)^{-1/3}$  の場合は、展開した解  $\Psi_{nm}$  の収束がよくなるように決定しなくてはならない。

$n=0$  とすると (4.7) は次のようになる。

$$L_0(\Psi_{0m}) + 2ma_{or} \omega_{0m} + \epsilon_m \omega_{00} + T_{0m} = 0 \quad (4.14)$$

$$2ma_{or} = \lambda_m \ll (A_2 Re)^{-1/3}$$

(4.14) を次の 2 つの方程式に分ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(\Psi_{0m}) + \lambda_m \omega_{0m} + \epsilon_m \omega_{00} = 0 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(\Psi_{0m}) + \lambda_m \omega_{0m} + T_{0m} = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

(4.14) の一般解は、(4.15) の特解と (4.16) の一般解との和として表わすことができる。(4.15) の特解は、 $\Psi_{00}$  が、

$L_0(\Psi_{00}) = 0$  の解であることから次のようになる。

$$\Psi_{0m} = -\epsilon_m / \lambda_m \cdot \Psi_{00} \quad (4.17)$$

(4.16) の一般解は、 $\lambda_m$  で展開し次のようにおく。

$$\Psi_{0m} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_m^{j-1} \cdot \phi_m^{(j)} \quad (4.18)$$

(4.18)を(4.16)に代入し、 $\lambda_m^j$ の係数をとると、次の方程式系が得られる。 $\phi_m^{(j)}$ は $\psi_m$ と同じ境界条件をもつ。

$$\begin{cases} L_0(\phi_m^{(0)}) = 0 & (4.19.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0(\phi_m^{(1)}) + \psi_m^{(0)} + T_{0m} = 0 & (4.19.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_0(\phi_m^{(j)}) + \psi_m^{(j-1)} = 0 \quad (j \geq 2) & (4.19.c) \end{cases}$$

$$\psi_m^{(j)} = \partial^2 \phi_m^{(j)} / \partial y^2 - A_2^2 \phi_m^{(j)}$$

(4.19.a)の解は、 $\phi_m^{(0)} = r_m^{(0)} \psi_{00}$  ( $r_m^{(0)}$ は定数)である。しかし、(4.19.b)の解が存在するためには、 $\psi_m^{(0)} + T_{0m}$ にある条件が必要になる。それは、 $L_0(\phi_m^{(1)}) = 0$  or non-trivialな解をもつためである。 $L_0^*$ を $L_0$ の随伴方程式とし、 $f$ を $\phi_m^{(1)}$ と同じ境界条件をもつ  $L_0^*(f) = 0$  の解とすると、上に述べた条件は、次のようになる。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\psi_m^{(0)} + T_{0m}) dy = 0 \quad (4.20)$$

但し  $L_0^* = (\epsilon_0 + iA_2 u_B)(\partial^2 / \partial y^2 - A_2^2) + 2\omega_B \partial / \partial y - \frac{1}{R}(\partial^2 / \partial y^2 - A_2^2)^2$   
(4.19.b)の特解を $\phi_{ms}^{(1)}$ とすると、一般解は、次のようになる。

$$\phi_m^{(1)} = \phi_{ms}^{(1)} + r_m^{(1)} \psi_{00} \quad (4.21)$$

上に述べた $\alpha$ と同様にして、 $\phi_m^{(2)}$ が存在するための条件から  $r_m^{(1)}$ が決定され、逐次的に(4.16)の解が求められる。

(4.20)から  $r_m^{(0)}$ が求められる。

$$r_m^{(0)} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f T_{0m} dy / \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \omega_{00} dy \quad (4.22)$$

$\Psi_{0m}$  は次の型式にかけらる。

$$\Psi_{0m} = \frac{r_m^{(0)} - b_m}{\lambda_m} \Psi_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m^{j-1} \phi_m^{(j)} \quad (4.23)$$

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m^{j-1} \phi_m^{(j)}$  には  $b_m$  を一切含まない。  $\Psi_{0m}$  ( $m=1, 2, \dots$ ) の収束をよくするために  $b_m = r_m^{(0)}$  と決める。

## 5. $|\varepsilon|^2$ までの解析

基礎擾乱が微小でなくなり、非線形の影響が現われる最初の項を求める。すなわち  $|\varepsilon|^2$  まで考慮に入れる。これに含まれる基礎擾乱の項は  $\Psi_{10}$ ,  $a_0$ ,  $\Psi_{01}$  のみである。 $\Psi_{10}$ ,  $a_0$  は Orr-Sommerfeld 方程式を解いて求められる。

$$\left\{ a_0 + iA_1 u_B - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_1^2 \right) \right\} {}_1\omega_{10} + {}_1v_{10} \cdot \frac{\partial \omega_B}{\partial y} = 0. \quad (5.1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_1^2 \right) {}_1\Psi_{10} = {}_1\omega_{10}, \quad {}_1v_{10} = -iA_1 {}_1\Psi_{10}. \quad (5.2)$$

境界条件は  $y = \pm 1/2$  で  $\Psi_{10} = \partial \Psi_{10} / \partial y = 0$  である。

$\Psi_{10}$  は  $y$  の偶関数である。 $\Psi_{01}$  に関する方程式は、圧力勾配が擾乱の有無にかかわらず一定であるという条件を用いて次のようになる。

$$\left( 2a_{01} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) {}_1u_{01} + \frac{\partial}{\partial y} ({}_1u_{10} \cdot \bar{{}_1v_{10}} + \bar{{}_1u_{10}} \cdot {}_1v_{10}) = 0 \quad (5.3)$$

$u_{01}$  は  $y$  の偶関数であり.  $y=1/2$  で  $u_{01}=0$  という境界条件から求められる.

付加擾乱については前節に述べたが再び簡単に示す.  $\Psi_{00}$  は  $\Psi_{10}$  についての方程式と同様な Orr-Sommerfeld 方程式を解いて求める. 境界条件は  $\Psi_{10}$  と同じである.

$$L_0(\Psi_{00}) = 0 \quad (5.4)$$

$\Psi_{10}$ ,  $\Psi_{-10}$  は次の方程式を解いて求める.

$$L_1(\Psi_{10}) + Q_{10} + S_{10} = 0 \quad (5.5)$$

$$L_{-1}(\Psi_{-10}) + Q_{-10} + S_{-10} = 0 \quad (5.6)$$

$\Psi_{10}$ ,  $\Psi_{-10}$  は  $y$  の奇関数であるが  $y=\pm 1/2$  における境界条件は同じである. ここで

$$\begin{cases} Q_{10} = \frac{\partial}{\partial y} (v_{00,1} \omega_{10} + \bar{v}_{10} \omega_{00}) + i(A_2 + A_1)(u_{00,1} \omega_{10} + \bar{u}_{10} \omega_{00}) \\ Q_{-10} = \frac{\partial}{\partial y} (v_{00,-1} \bar{\omega}_{10} + \bar{v}_{-10} \omega_{00}) + i(A_2 - A_1)(u_{00,-1} \bar{\omega}_{10} + \bar{u}_{-10} \omega_{00}) \\ S_{10} = S_{-10} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

$r_i^{(0)}$  は次の3つの和として表わす.

$$r_i^{(0)} = g_{-1} + g_0 + g_1 \quad (5.8)$$

$$g_i = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Psi_{00}^* G_i dy / \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Psi_{00}^* \omega_{00} dy \quad (5.9)$$

$\Psi_{00}^*$  は  $L_0$  の随判方程式  $L_0^*$  の解である.

$$\begin{cases} G_{-1} = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{10} \omega_{10} + \bar{\psi}_{10} \bar{\omega}_{10}) + iA_2 (\psi_{10} \omega_{10} + \bar{\psi}_{10} \bar{\omega}_{10}) \\ G_0 = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{00} \omega_{01} + \bar{\psi}_{00} \bar{\omega}_{01}) + iA_2 (\psi_{00} \omega_{01} + \bar{\psi}_{00} \bar{\omega}_{01}) \\ G_1 = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{10} \bar{\omega}_{10} + \bar{\psi}_{10} \omega_{10}) + iA_2 (\psi_{10} \bar{\omega}_{10} + \bar{\psi}_{10} \omega_{10}) \end{cases} \quad (5.10)$$

$\Psi_0$  の時間変化をとってみると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{mr} |\varepsilon|^{2m} \cdot \frac{\sum_{m=1}^{\infty} 2m \cdot \psi_{0m} |\varepsilon|^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m} |\varepsilon|^{2m}} \\ &= b_0 + \left( r_1^{(0)} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} (2a_{0r})^j \phi_j^{(j)}}{\Psi_{00}} \right) |\varepsilon|^2 + O(|\varepsilon|^4) \quad (5.11) \end{aligned}$$

(5.11) で  $\sum_{j=1}^{\infty} (2a_{0r})^j \phi_j^{(j)} / \Psi_{00}$  は  $O(a_{0r} (A_2 Re)^{1/3})$  である。

$a_{0r} (A_2 Re)^{1/3} \ll 1$  であり、 $|\varepsilon|^2$  までは  $b_0$  の如何にかかわらず、次のようになる。

$$\frac{1}{\Psi_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = b_0 + r_1^{(0)} |\varepsilon|^2 \quad (5.12)$$

ここでは  $\Psi_0$  の絶対値を小さくするために  $b_0 = r_1^{(0)}$  とする。

## 6. 計算結果とその検討

Critical Reynolds 数の付近を調べ、 $Re = 7500 \sim 13000$  ( $Re_{cr} = 8300$ ) を扱った。また基礎擾乱の基本波数  $A_1$  としては、そのレイノルズ数で  $a_{0r}$  を最大にする波数を選んだ。 $A_2 \geq A_1$  の範囲に限ったのは、 $b_{1r}$  の影響による時間的振

大率の変化に興味を持ったからである。  $A_2 = A_1$  の場合は、

WATSON (1960) の非線形安定理論と同じ意味になる。 なお基礎擾乱は、  $|\psi_0(y=0)| = 1$  となるように正規化した。

図1は、  $Re = 9000$ ,  $A_1 = 1.99$  について、  $g_{ir}$ ,  $g_{or}$ ,  $g_{ir}$ ,  $g_{ir}$  を示したものである。  $g_{ir}$ ,  $g_{ir}$  は極大をもち、  $A_2$  が大きくなると負になる。  $g_{or}$  は、基礎擾乱の定常（厳密には非振動）部分による影響である。

図2は、  $Re = 9000$ ,  $A_1 = 1.99$  について、  $\beta = \beta_0 + \beta_1 |\epsilon|^2$  の実数部分  $\beta_r$  を示したものである。 基礎擾乱があるために不安定になる範囲がよくわかる。

図3は、  $g_{or} < 0$ ,  $g_{ir} > 0$  の場合に、中立擾乱となるための基礎擾乱の振幅  $|\epsilon|_0$  を示した。 すなわち

$$|\epsilon|_0 = \sqrt{-g_{or}/g_{ir}} \quad (6.1)$$

$g_{ir} = 0$  のところで  $|\epsilon|_0 = \infty$  となる。  $|\epsilon|_0$  が大きくなるに従って中立曲線は短波長の方へずれる。

## 7. 結 論

平行ポアズ工流において、有限振幅をもつ擾乱が存在し、さらに微小擾乱が加えられた場合についての解析方法を示した。 微小擾乱の時間的変化率について、有限擾乱による非

線形効果が現われる最初の項の値を数値計算によって求めた。従来 WATSON (1960) らによって 有限擾乱を解析する非線形安定理論が提出されているが、それはある一つの基本波数をもつ有限擾乱を解析するものである。すなわち微小振幅をもつ場合は安定であった擾乱が、有限振幅をもつと不安定になる場合があることが示されている。それに対しこの論文では、ある基本波数をもつ有限擾乱が存在すると、それと異なる基本波数をもつ、単独では安定であった微小擾乱が、有限擾乱の影響を受けて不安定になる場合があることを示した。すなわち、有限擾乱が、それと異なる基本波数をもつ微小擾乱を励起する機構を明らかにした。

今後の課題として、一つの方法は三次元性を考慮することであり、他の方向は、有限擾乱どうしの作用、さらに三組以上の有限擾乱が互いに影響を及ぼしあう場合を解析することであろう。

## REFERENCES

- DONALDSON, C. duP. 1969 AIAA Journal 7-2, 271.  
 GEORGE, W. D. & HELLUMS, J. D. 1972 J. Fluid Mech. 51-4, 687.  
 LIN, C.C. 1955 The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press.  
 PEKERIS, C.L. & SHKOLLER, B. 1967 J. Fluid Mech. 29-1, 31.  
 PEKERIS, C.L. & SHKOLLER, B. 1969 J. Fluid Mech. 39-3, 629.  
 STUART, J.T. 1960 J. Fluid Mech. 9, 353.  
 WATSON, J. 1960 J. Fluid Mech. 9, 389.  
 WATSON, J. 1962 J. Fluid Mech. 14, 211.



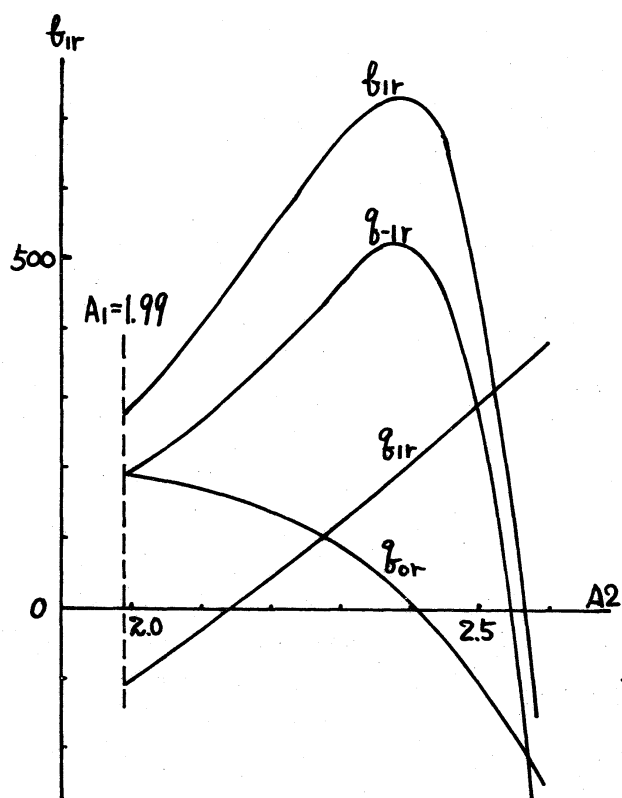


图 1.  $b_{1r}, q_{1r}, b_{0r}, q_{0r} \sim A_2$   
 $Re = 9000, A_1 = 1.99$

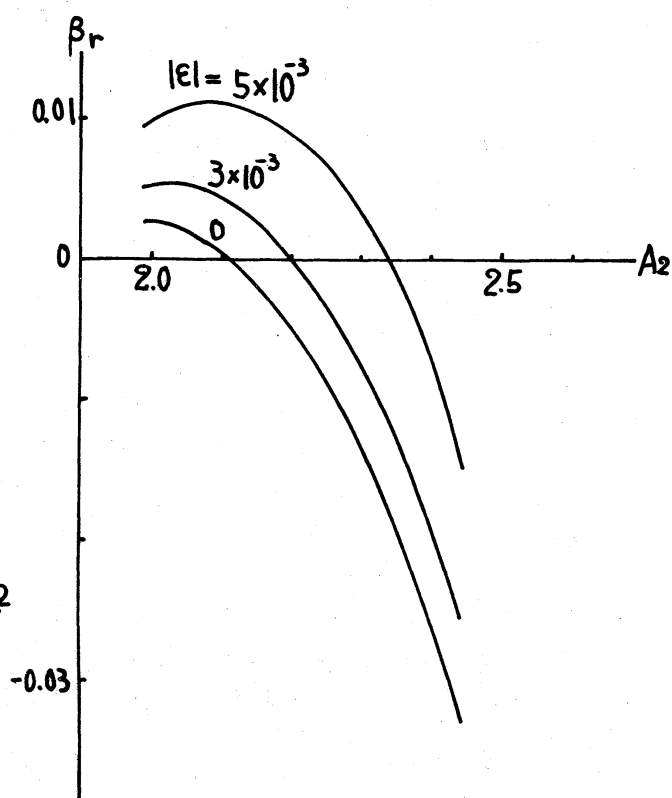


图 2.  $\beta_r \sim A_2$   
 $Re = 9000, A_1 = 1.99$

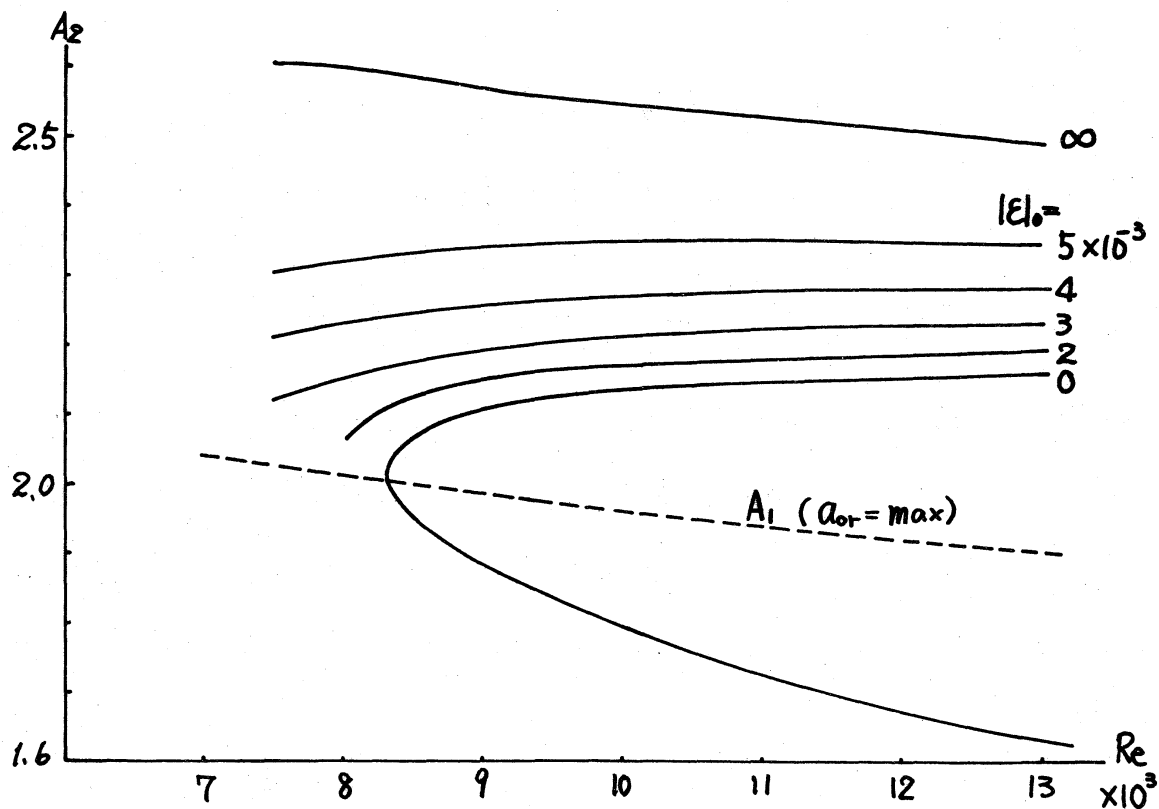


图 3. 中立曲线  $|E|_0 = \sqrt{-b_{0r}/b_{1r}}$