

3-消去可能グラフについて

石塚 昭夫 上野 修一 梶谷 洋司

東京工業大学 工学部 電気電子工学科

(0) 小文では、 3 -消去可能グラフを定義し、 3 -消去可能グラフを特徴付ける。この特徴付けから、与えられたグラフが 3 -消去可能グラフであるか否かを判定する多項式時間のアルゴリズムを導くことができる。

(1) 単純無向連結グラフを $G=(V, E)$ とする。 V は G の点集合、 E は G の枝集合である。 $E=\emptyset$ のとき、 G を空グラフとよぶ。 $|V|=n$ とおく。一対一写像 $\phi:\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$ を V の順序付けとよぶ。 $\Gamma(v)$ は点 v に隣接する点の集合である。 $G(A)$ は、 $A \subseteq V$ 上の誘導部分グラフである。

(2) G から点 v を消去するとは、 $\Gamma(v)$ のすべての非隣接二点間に枝を付加し、点 v を除去することである。 G から点 v を消去して得られるグラフを $G * v$ で表す。 $G * (v_1, v_2, \dots, v_k)$ は、 G から点 $v_1, v_2, \dots, v_k$ をこの順に消去して得られるグラフである。

(3) 次の二条件を満足する V の順序付け ϕ が存在するとき、 $G=(V, E)$ を ℓ -消去可能グラフとよぶ：

(イ) G において、 $|P(\phi(1))| \leq \ell$,

(ロ) $G * (\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(i-1))$ において、 $|P(\phi(i))| \leq \ell$,

$i = 2, \dots, n$.

G が 1(2)-消去可能グラフであるための必要十分条件は、 G が木 (直並列グラフ) であることである。

(4) $G=(V, E)$ に $|P(x)| \leq 2$ であるような点 x が存在すると仮定する。このとき、 G が ℓ -消去可能グラフであるための必要十分条件は、 $G * x$ が ℓ -消去可能グラフであることである。

(5) $G=(V, E)$ に $|P(x)| = 3$ かつ $G(P(x))$ が空グラフではないような点 x が存在すると仮定する。このとき、 G が ℓ -消去可能グラフであるための必要十分条件は、 $G * x$ が ℓ -消去可能グラフであることである。

(6) $G=(V, E)$ に $P(x) = P(y)$ かつ $|P(x)| = |P(y)| = 3$ であるような二点 x, y が存在すると仮定する。このとき、 G が ℓ -消去可能グラフであるための必要十分条件は、 $G * (x, y)$ が ℓ -消去可能グラフであることである。

(7) $G=(V, E)$ に $P(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$, $|P(y_i)| = 3$,

$|\cup_i P(y_i)| = 4$, $|P(y_i) \cap P(y_j)| = 2$ ($i \neq j$) なる四点 x ,

y_1, y_2, y_3 が存在すると仮定する。このとき、 G が r -消去可能グラフであるための必要十分条件は、 $G * (y_1, y_2, y_3, x)$ が r -消去可能グラフであることである。

(8) $G = (V, E)$ が r -消去可能グラフならば、次の(ハ)~(ヘ)の少なくとも一つが成立する。

(ハ) $|P(x)| \leq 2$ なる点 x が存在する。

(ニ) $|P(x)| = 3$ かつ $G(P(x))$ が空グラフではないような点 x が存在する。

(ホ) $P(x) = P(y)$ かつ $|P(x)| = |P(y)| = 3$ であるような二点 x, y が存在する。

(ヘ) $P(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$ 、 $|P(y_i)| = 3$ 、 $|V \setminus P(y_i)| = 4$ 、 $|P(y_i) \cap P(y_j)| = 2$ ($i \neq j$) であるような四点 x, y_1, y_2, y_3 が存在する。

(9) (4)~(8) より、与えられたグラフが r -消去可能グラフであるか否かを判定する多項式時間のアルゴリズムを導くことができる。4以上の r に対して r -消去可能グラフを特徴付けることは今後の課題である。