

チューリング機械の停止する入力集合の幾何学的性質

東大院総合 斉藤 朝輝

E-mail : saito@complex.c.u-tokyo.ac.jp

チューリング機械の停止する入力集合を空間上に埋め込んだ図形について、時間的にその集合がどう構成されるかも含めて、その幾何学的性質を調べた。主に、次元解析を行ったときに得られる結果と、それに関する考察を発表した。

万能チューリング機械の停止する入力集合は万能言語 (universal language) と呼ばれ、帰納的可算集合だが、帰納的集合ではない。つまり決定不能である。この万能言語の決定不能性から、万能言語を空間上に埋め込んだ (コードした) 図形は一般的に知られているフラクタル図形のような相似構造ではなく、異なった微細構造が無限に続く図形となる。

数値的に解析した結果、この図形は時間的に非一様に、また、他のフラクタル図形と比較して時間をかけて構成されることが分った。この結果は決定不能性の一面を表していると考えられる。

また、決定不能な万能言語を2次元平面上に埋め込んだ図形は、面積を持つファットフラクタルとなる。次元解析の結果、この図形の境界の box-counting 次元 (exterior dimension) は、計算時間の増加とともに空間次元である2に漸近して行く。境界次元が空間次元と等しいことは、境界の ϵ 近傍の体積 (面積) が、 ϵ に依存しないことを示している。それはつまり、観測精度の誤差の存在下で、この集合に含まれるか否かを判定する場合には、観測精度をいくら上げても原理的に誤る確率を下げるできないことを意味する。決定不能性は本来、観測精度に関係なく存在するものなので、この結果は合理的である。以上のように決定不能性を意味付けることができる。

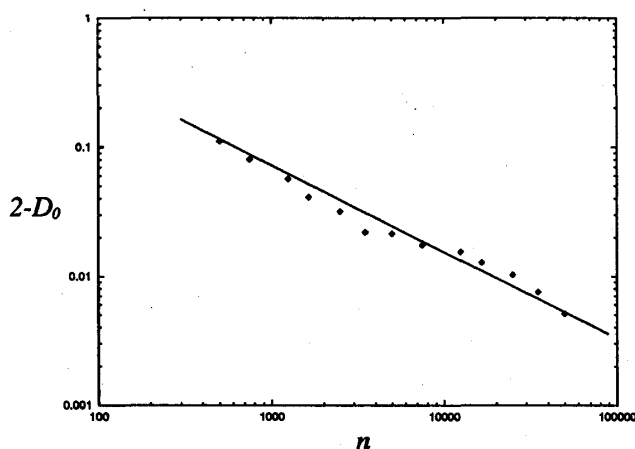


Figure 1: Minsky UTM が停止するまでに要した計算時間 n に対して、空間次元から境界次元を引いた値 ($2 - D_0$, uncertainty exponent) を両対数プロットしたもの。計算時間の増大とともに、境界次元が空間次元の2に近づいていくことが分る。