

銀河と気体の相互作用

京大・工・航空 武田英徳

第I章 緒言

彗星・星風、銀河風、星・銀河の爆発等、走りながらガスを放出する天体现象が数多くみられる。そこでこの問題を理想化し、球対称に、超音速でガスを放出しつつ、ガス中を超音速で走っている天体のまわりの流れの様子を、数値計算によって simulate した結果を報告する。第II章では、数値計算の方法と結果を、第III章では、上流対称軸近くの流れについてやや詳しく述べる。第IV章は 結び とする。

第II章 数値計算の方法と結果

a) 計算の方法

流れの場を数値計算で解く為に、連続の式、運動方程式、エネルギー式を差分式で近似する。この方法は数多くあるが、計算の安定性のよい FLIC^{*} (Fluid In Cell) 法を採用した。軸対称を仮定し、円柱座標を用いてこの計算方法を簡単に説明する。($U_0 = 0$ とする)

解くべき方程式は次の (1)(2)(3)(4) 式である。但し、

$$\rho = (r-1)\rho I \quad \text{である。}$$

^{*} R.A. Gentry et al. Journal of Computational Physics VOL.1, NO.1 (1966) P

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = f^z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = f^r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (v \cdot \nabla) I = - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} v \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (4)$$

ここで γ は比熱比 (以後 $\gamma = \frac{5}{3}$ とする), I は単位質量当りの内部エネルギー, f^z, f^r は外力の成分,

$$v \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial r}, \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r)$$

である。 (1) ~ (4) 式を解くことは, (4) 及び次の (1)' (2)' (3)' 式

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho f^z - \frac{\partial p}{\partial z} - \operatorname{div}(\rho u v) \quad (1)'$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \rho f^r - \frac{\partial p}{\partial r} - \operatorname{div}(\rho v v) \quad (2)'$$

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} = -p \operatorname{div} v - \operatorname{div}(\rho I v) \quad (3)'$$

を解くことと同値である。

FLIC法では (1) (2) (3) 式で慣性項 = 0 として u, v, I を求め、次にこれらの値を用いて (4), (1)' (2)' (3)' で圧力, 外力を 0 とおいて $u^{n+1}, v^{n+1}, I^{n+1}, \rho^{n+1}$ を求めるというやり方をする。(n は時刻 t を, $n+1$ は時刻 $t+\Delta t$ を表わす。) 即ち, $\hat{u}_{ij}, \hat{v}_{ij}$ は次の差分式によって計算される。(図 II-1 を参照)

$$\frac{\hat{u}_{ij} - u_{ij}^n}{\Delta t} = f_{ij}^z - \frac{1}{\rho} \frac{(p+\gamma)_{i+\frac{1}{2},j}^n - (p+\gamma)_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} \quad (5)$$

$$\frac{\hat{v}_{ij} - v_{ij}^n}{\Delta t} = f_{ij}^r - \frac{1}{\rho} \frac{(p+\gamma)_{ij,j+\frac{1}{2}}^n - (p+\gamma)_{ij,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \quad (6)$$

ここで δ は artificial viscosity で

$$I_{i+\frac{1}{2},j}^n = B C_{i+\frac{1}{2},j}^n \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{ij}^n - u_{i+1,j}^n) \quad K(u^2 + v^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n < (C^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n \text{ かつ } u_{ij}^n > u_{i+1,j}^n \text{ のとき}$$

$$= 0 \text{ otherwise.}$$

C は音速.

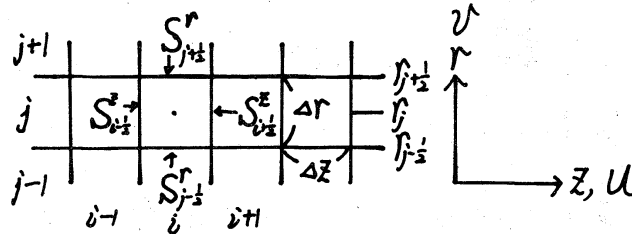
$\rho_{ij+\frac{1}{2}}^n$ も上と同様な式で表わされる.

(4), (1), (2), (3) 式に現われる

図 II-1

$\text{div}(\rho F \bar{v})$ の差分式は,

面 $S_{i+\frac{1}{2}}^x, S_{j+\frac{1}{2}}^y$ を通じて流入する ρF
 V_{ij}



で評価する。このとき

ρF は上流側の値をとる。

$F = \rho, u, v, I$ は mesh の中心で定義されそれらを F_{ij} で表す。 S は mesh の境界の面積を示し、円柱座標では、 $S_{j+\frac{1}{2}}^y = 2\pi r_{j+\frac{1}{2}} \Delta z$, $S_{i+\frac{1}{2}}^x = 2\pi r_i \Delta z$ である。 cell の体積 $V_{ij} = 2\pi r_i \Delta r \Delta z$ 。

即ち

$$[\text{div}(\rho F \bar{v})]_{ij} = \left\{ (\rho F)_i^- S_{i-\frac{1}{2}}^x u_{i-\frac{1}{2},j}^n - (\rho F)_i^+ S_{i+\frac{1}{2}}^x u_{i+\frac{1}{2},j}^n + (\rho F)_j^- S_{j-\frac{1}{2}}^y v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - (\rho F)_j^+ S_{j+\frac{1}{2}}^y v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right\} / V_{ij}$$

$$\text{ここで } \begin{cases} (\rho F)_i^- = \rho_{i,j}^n F_{i,j}^n, & u_{i-\frac{1}{2},j} > 0 \text{ のとき} \\ & = \rho_{i,j}^n F_{i,j}^n, & u_{i-\frac{1}{2},j} < 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \begin{cases} (\rho F)_i^+ = (\rho F)_{i,j}^n, & u_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \text{ のとき} \\ & = (\rho F)_{i+1,j}^n, & u_{i+\frac{1}{2},j} < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\rho F)_j^- = (\rho F)_{i,j-1}^n, & v_{i,j-\frac{1}{2}} > 0 \text{ のとき} \\ & = (\rho F)_{i,j}^n, & v_{i,j-\frac{1}{2}} < 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \begin{cases} (\rho F)_j^+ = (\rho F)_{i,j}^n, & v_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \text{ のとき} \\ & = (\rho F)_{i,j+1}^n, & v_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

この表わしかたを用いると, $\tilde{I}_{ij}$ と ρ^n, u^n, v^n, I^n は,

$$\frac{\tilde{I}_{ij} - I_{ij}^n}{\Delta t} = \frac{(\rho + \delta)_{ij}^n}{\rho_{ij}^n} \cdot [\text{div}(\rho I \bar{v})]_{ij}, \quad \bar{v} = \frac{1}{2}(v^n + \bar{v}^F) \quad (7)$$

$$\frac{(\rho F)_{ij}^{n+1} - (\rho F)_{ij}^n}{\Delta t} = [\text{div}(\rho \tilde{F} \bar{v})]_{ij}, \quad F = \rho, u, v, I \quad (8)$$

(5)(6)(7)(8)式を解くことは (Taylor 展開することによって),

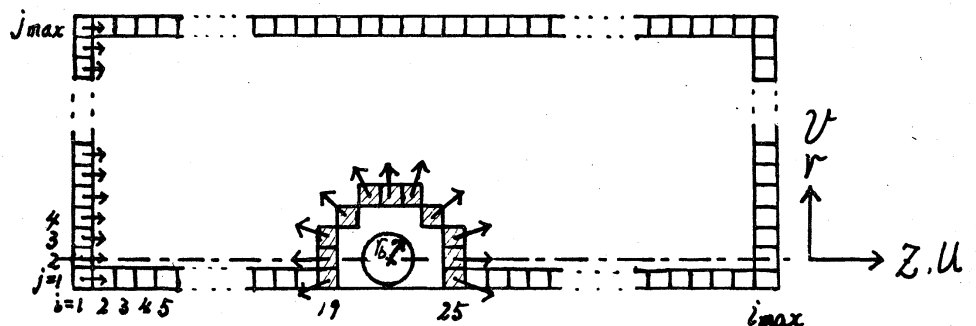
$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= \rho f^x - \frac{\partial(p+\delta)}{\partial z} - \text{div}(\rho u v) + O(\delta t) \\ &+ \left[\frac{\delta r}{2} \left\{ \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} \right\} + \frac{\delta z}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) \right] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= \rho f^r - \frac{\partial(p+\delta)}{\partial r} - \text{div}(\rho v v) + O(\delta t) \\ &+ [\rho u \rightarrow \rho v] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial(\rho I)}{\partial t} &= -(p+\delta) \text{div} v - \text{div}(\rho I v) + O(\delta t) + [\rho u \rightarrow \rho I] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\text{div}(\rho v) + O(\delta t) + [\rho u \rightarrow \rho] + O(\delta t) + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次})\end{aligned}$$

の4つの式を解くこと、即ち (4), (4)', (5), (5)' を近似的に解くことになっている。この時の誤差は $\delta t, \delta r, \delta z$ の1次の order であり、これが計算を安定化する。それゆえ FLIC 法では, artificial viscosity を入れないで計算されることも多い。

b) 数値計算の例

実際に行った数値計算の meshes を図 II-2 に示す。簡単の為、計算は重力の無視できる場合 ($f^r = f^z = 0$) に行った。

図 II-2
数値計
算の meshes
を示す。
図は吹



き出し口の meshes である, $\Delta r = \Delta z = 0.11758$

初期条件

図の斜線の外の全 mesh を一様流が満たしている中で, $t=0$ に図 mesh からガスが吹き出し始める。各図 mesh の ρ, u, v, I は, $r=r_b$ での値 ρ_b, u_b, v_b, I_b を定めて, 定常断熱球対称を仮定して求めた。

境界条件

$0 \leq t$ において, $(i=1, 1 \leq j \leq j_{\max})$, 図 meshes で, ρ, u, v, I は一定, $(i=i_{\max}, 1 \leq j \leq j_{\max}), (2 \leq i \leq i_{\max}, j=j_{\max})$ meshes は流出境界とする。

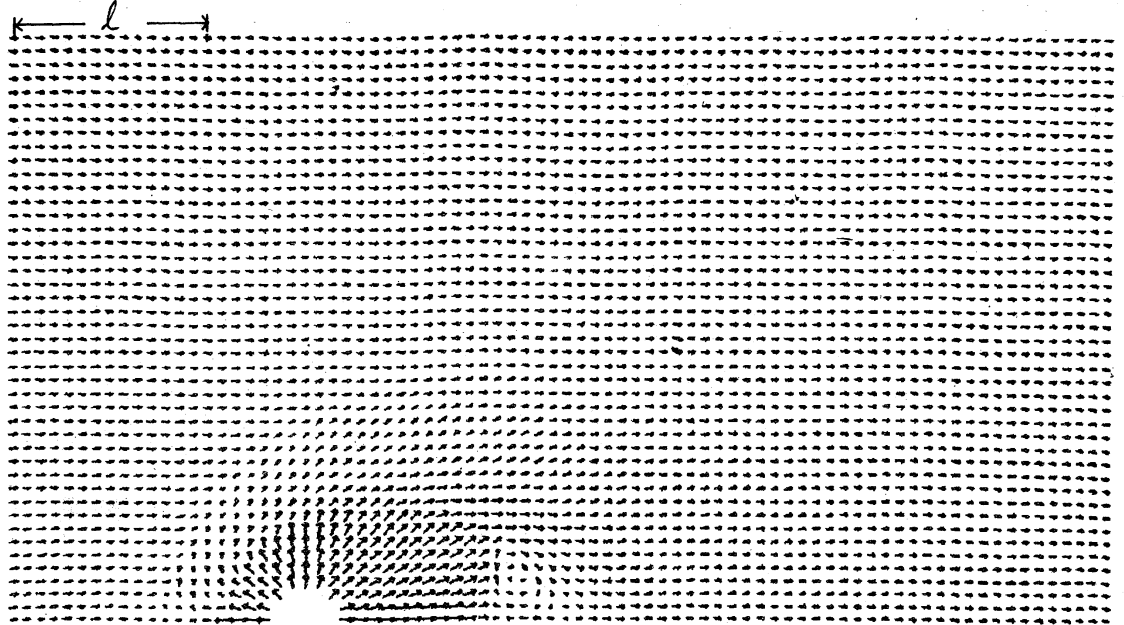
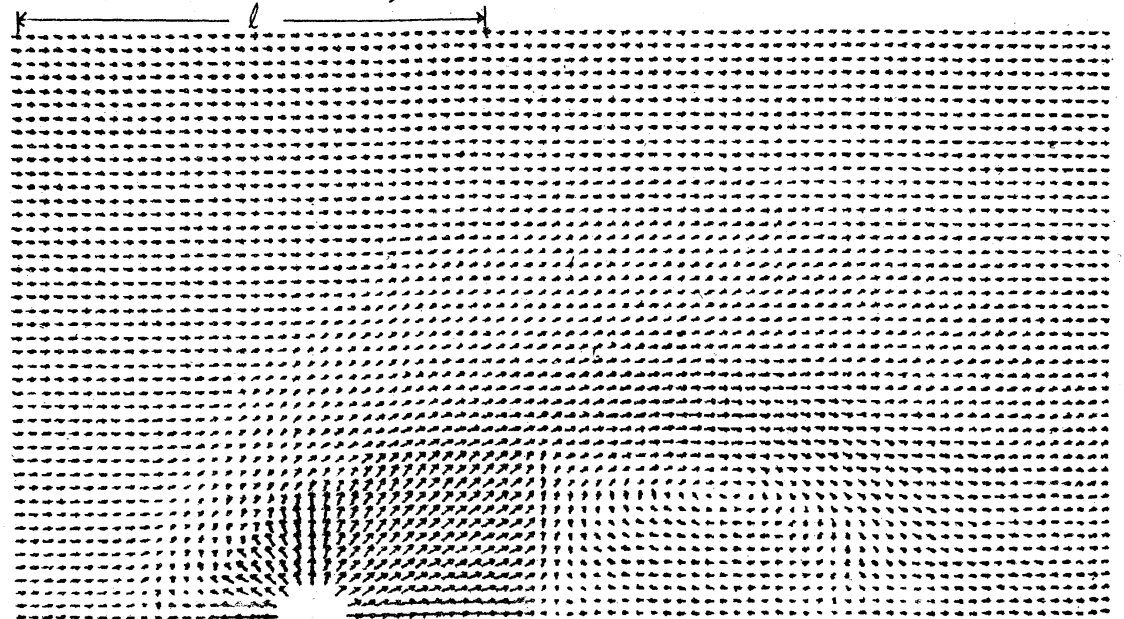
数値計算は次の 2 つの Cases について行った。

$$\text{Case I} \begin{cases} u_1 = 1.5, & u_2 = 15.4 \\ M_1 = 4.5, & M_2 = 10.9 \\ \rho_1 = 1.0, & \rho_2 = 3.9 \cdot 10^{-2} \\ I_1 = 10^{-3}, & I_2 = 1.8 \cdot 10^{-2} \end{cases} \quad \text{Case II} \begin{cases} u_1 = 1.0, & u_2 = 2.0 \\ M_1 = 10, & M_2 = 10 \\ \rho_1 = 1.0, & \rho_2 = 1.1 \\ I_1 = 9 \cdot 10^{-3}, & I_2 = 3.6 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

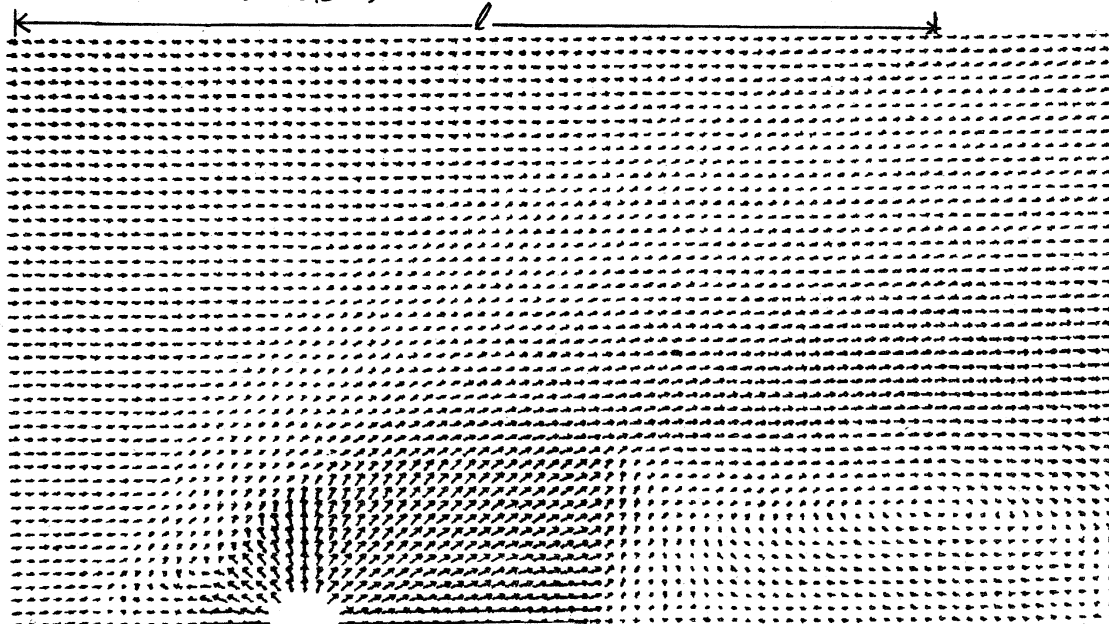
ρ_1 は初期に与えた一様流の値, ρ_2 は $(i=25, j=2)$ mesh における値を示す。

$\rho, u, v, I, \rho, r(\infty), t$ はそれぞれ $\rho_0, v_0, I_0=v_0^2, \rho_0=\rho_0 v_0^2, r_0, t_0=r_0/v_0$ で normalized してある。例えば, Case I の場合, $v_0=20 \text{ km/sec}$, $\rho_0=120 M_H = 0.1 M_H$, $r_0=141.7 \text{ a.u.}$ とすると, $r_b=50 \text{ a.u.}$, $\rho_1 \rightarrow \rho_1 \rho_0 = 0.1 M_H$, $u_1=30 \text{ km/sec}$, $I_1 \rightarrow I_1 v_0^2 = 4 \times 10^9 \text{ erg/gm}$ ($T_1=16^\circ \text{K}$, 水素の完全電離気体として) $\rho_2 \rightarrow \rho_2 \rho_0 = 0.9 \cdot 10^{-3}$, $u_2=308 \text{ km/sec}$, $I_2 \rightarrow I_2 v_0^2 = 7.21 \times 10^9 \text{ erg/gm}$ ($T_2=16^\circ \text{K}$), $t_0=33.7 \text{ yrs}$ となる。

Case I の時刻 $t=1.18, 2.96, 5.33$ における速度場を図 II-3(a), (b), (c) に示す。

図 II-3 (a) $t=1.18, N=400$ 図 II-3 (b) $t=2.96, N=1000$ 

図は速度場を示す。 N は計算のstep数である。図(a)の $l=4.6$ である。矢印は流速ベクトルの方向を示す、矢が長い程速度は大きい。linearな関係ではない。meshの数は 80×45 で 図には $j=1$ のmeshは描いていない。

図 II-3 (c) $t = 5.33, N = 1800$ 

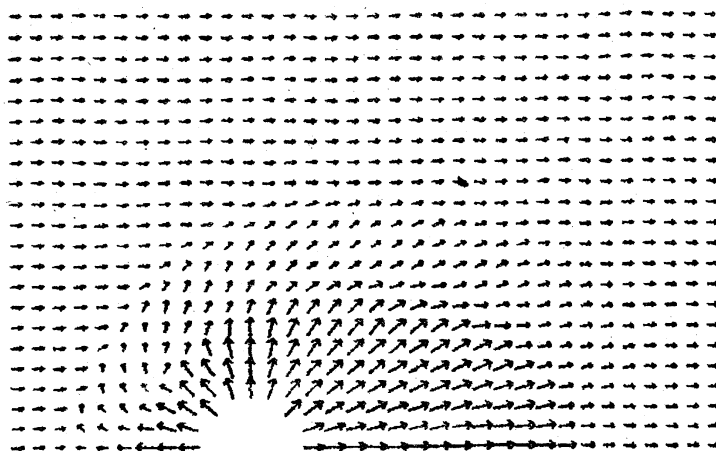
図からわかる如く、吹き出し口の後方で発生した渦は、次第に発達しながら、ゆっくりと流される。図(c)では、既に、右端で課した数値計算上の境界条件が、流れに影響していると思われるゆえ、境界に近いところはあまり正確ではなからう。

図 II-4 に $N = 250, 300, 350, 400$ における速度場の拡大図を示す。

吹き出し口の後方で、図 II-4 (a) $N = 250$

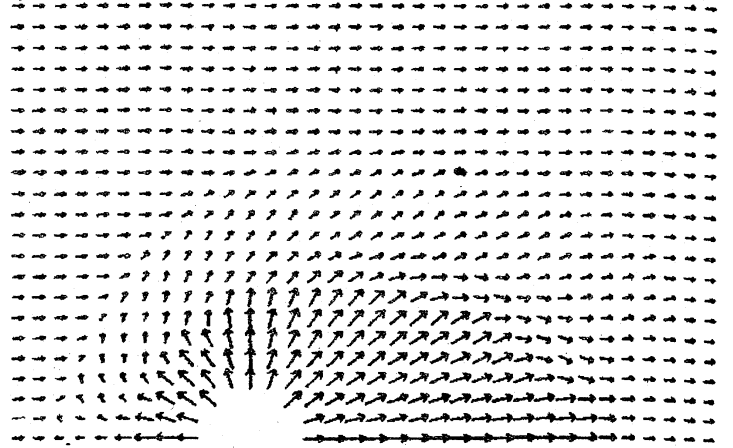
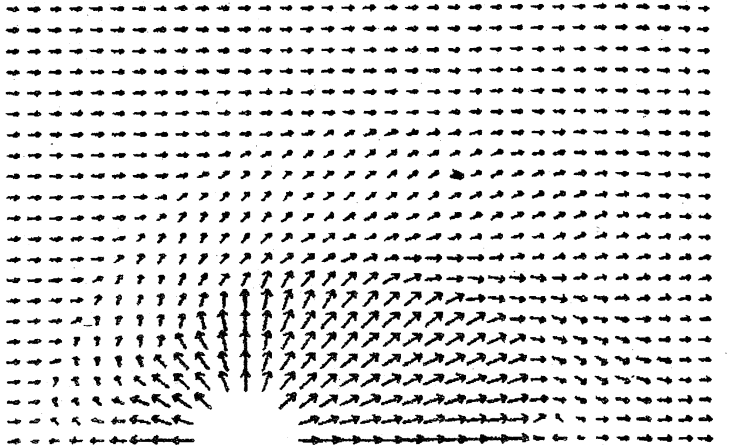
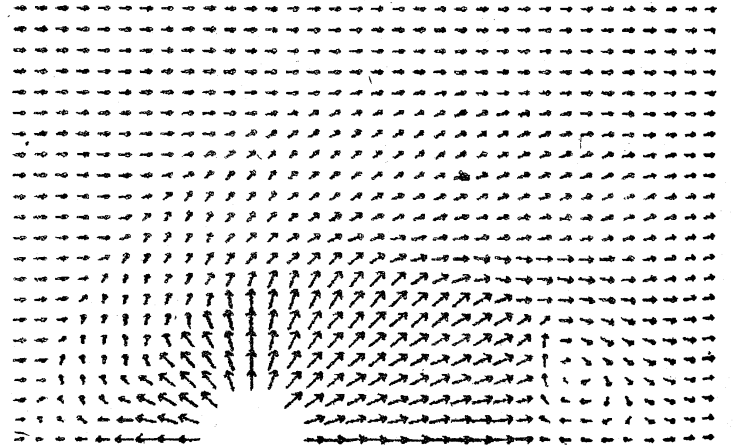
次第に流れはまわり込み、ついに渦になる状況がよくわかるであろう。

meshの数が 53×23 の場合にも、artificial viscosityの係数 B を



小さくしても、渦の発生
の状況はほとんど変
わらないゆえ、渦が発
生するということは、
単に数値計算の error に
よるものではなく、こ
のような流れでは、現
実に発生するものと思
われる。図 II-5 に $N=400$
のときの β, J の等高線
を示す。図の矢印のこ
ろに強い衝撃波が発
生していることがわか
る。

Case II の条件のもと
での計算結果を図 II-6
に示す。この場合には
渦の発生はみられなか
った。Case I との著し
い差は、後流側に強い
shock が存在しないこ

図 II-4 (b) $N=300$ 図 II-4 (c) $N=350$ 図 II-4 (d) $N=400$ 

とである。即ち

図 II-5 $N=400$

渦の発生は、

ρ

$u_2 \gg u_1$ で下流

側に shock が発

生することに起

因するものと思

われる。

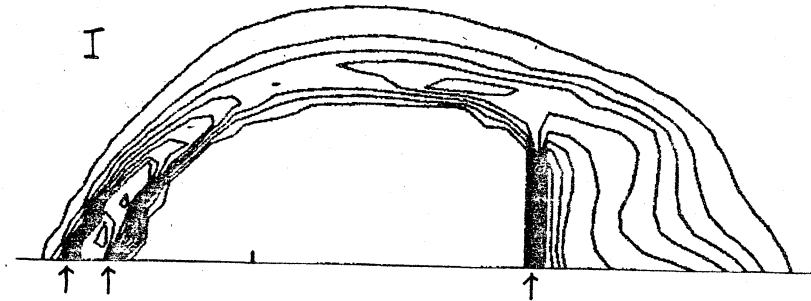
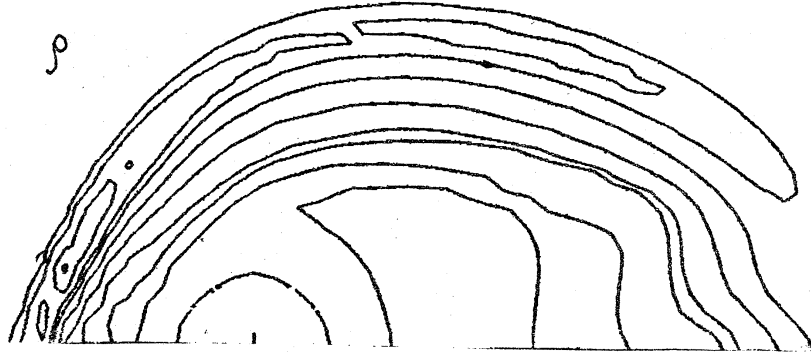
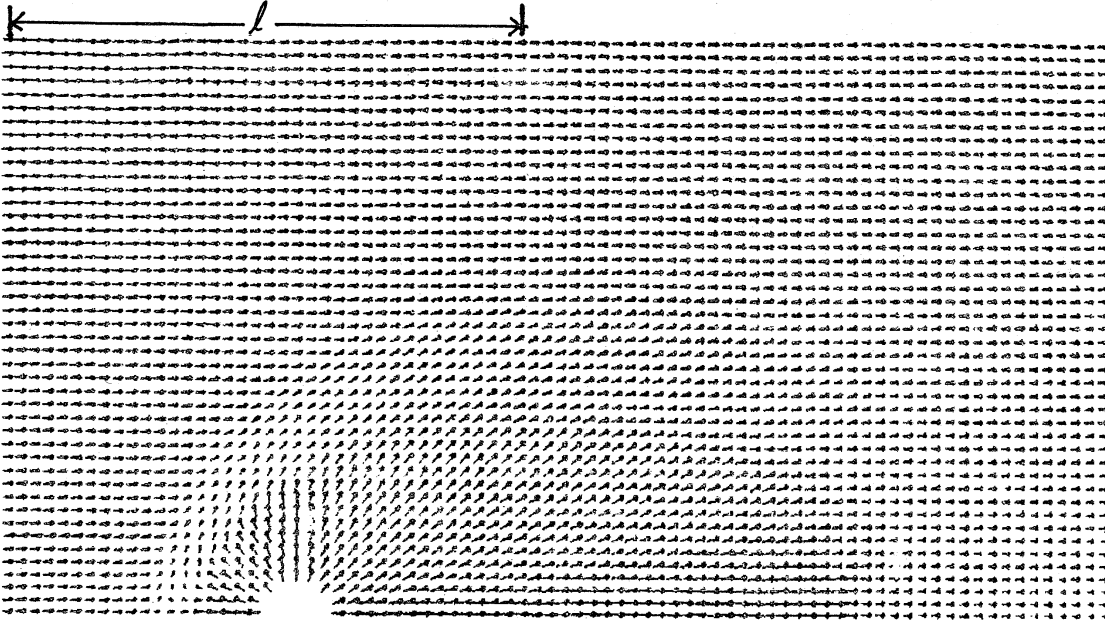


図 II-6 (a) $N=200, t=4.50$



Case II の計算結果. (a) は速度場, (b) は密度, (c) は内部エネルギーの等高線.

$$l = u_1 t$$

図 II-6 (b)

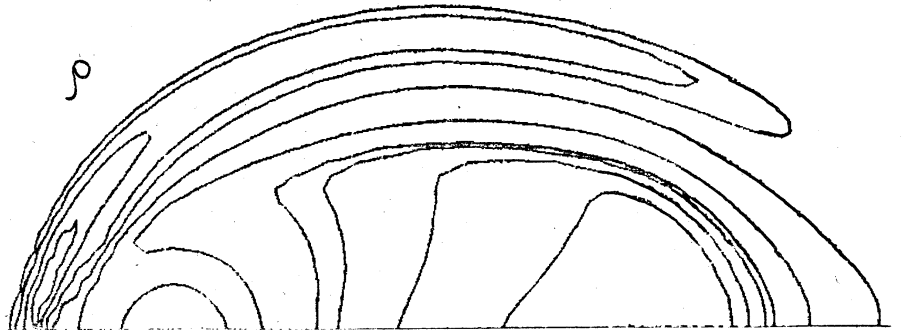
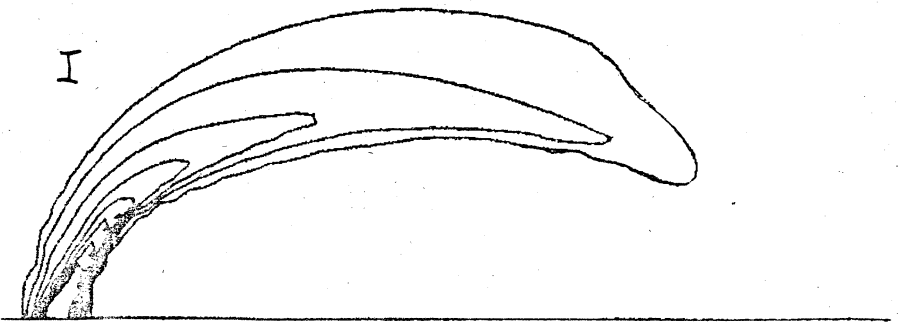


図 II-6 (c)



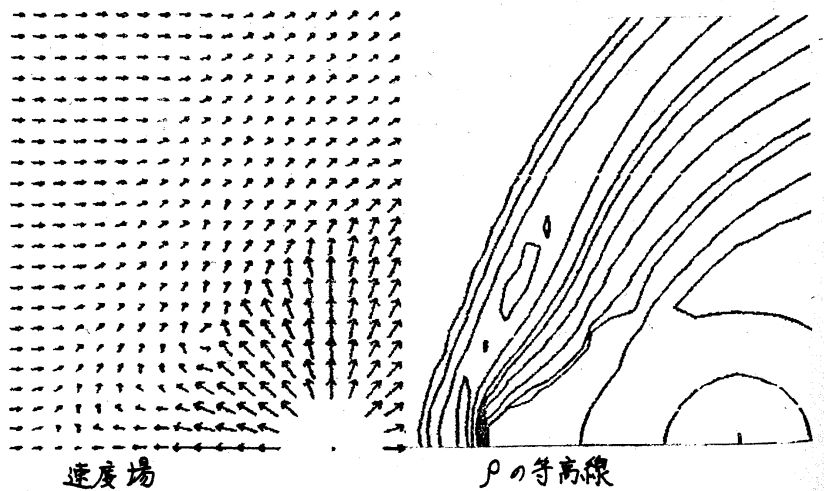
第Ⅲ章 上流の衝撃波面・接触不連続面

十分に時間が経過した後には、前方の流れはほぼ定常に達する。図Ⅲ-1に $N=3600$, $t=10.5$ のときの流れの図と ρ の等高線を示す。図から

図Ⅲ-1, $N=3600$, $t=10.5$

2つの衝撃波面が
かなりはっきり
と読みとれる。

とくに前方対称
軸上の ρ , u , I の
変化を図Ⅲ-2に
示す。



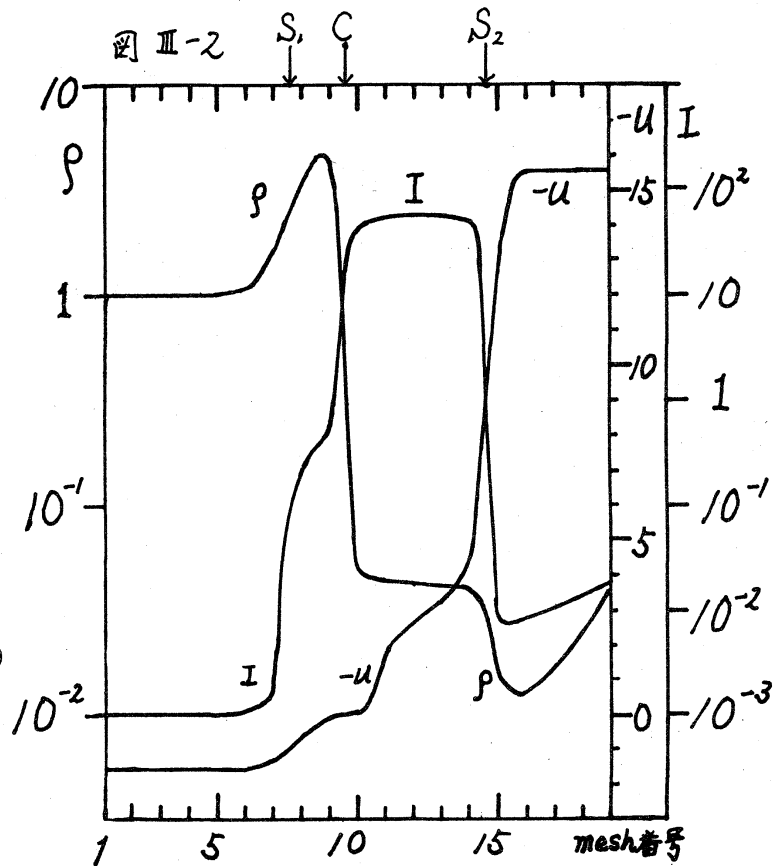
図Ⅱ-2をもとに
これら2種の面を
描いたものが図Ⅱ-3
である。

一方今考えてい
るのと似た状況の
もとで、上流の衝
撃波面、接触不連
続面の形状を、Dyson^{*)}
が求めている。彼
の結果を引用する。

図Ⅱ-4で示され
る場合を考える。

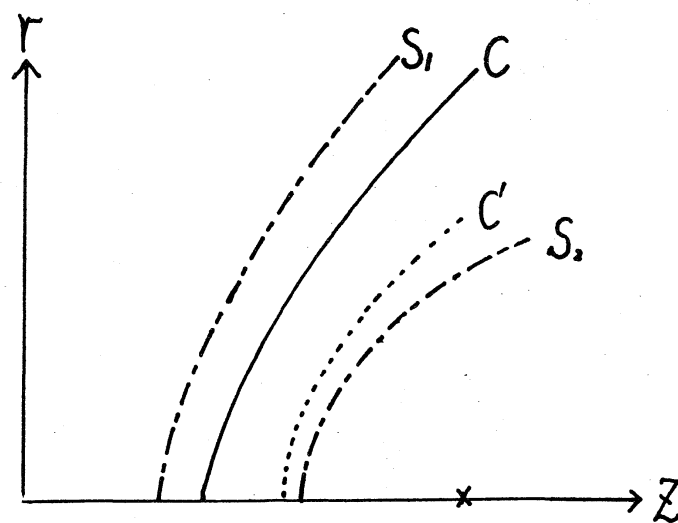
接触不連続面、 C' 、の右
側では、 $\rho(r) = \rho_0 r^2 / r_0$ 、
 $u = u_2 : \text{const.}$ と考えて C
を、両カスの、この面に
垂直方向の運動量 flux
が等しいとおいて求める。

^{*)} J.E. Dyson *Astrophysics and
Space Science* 35 (1975) 299



図Ⅱ-2 $N=3600$ のときの、前方対称軸上の p, u, I の変化を
示す。矢印 S_1, S_2 は衝撃波の位置を、 C は接触不連続面の
位置を示す。

図Ⅱ-3



$N=3600$ のときの前方にできる接触不連続面 C 、衝撃波面 S_1, S_2 。
 C' は Dyson にならった analytic な方法で求めたもの

