

ヒルベルト空間での極大単調作用素に関する収束定理 Convergence Theorems for Maximal Monotone Operators in Hilbert Spaces

玉川大学・工学部

Faculty of Engineering, Tamagawa University

豊田昌史

Masashi Toyoda

1 はじめに

研究集会では, 次の結果を発表した.

定理 1 ([1]). H を実ヒルベルト空間, C を H の閉凸集合とする. $A : C \rightarrow H$ を正定数 α を係数にもつ逆強単調写像とする. $B : H \rightarrow 2^H$ を極大単調作用素とし, その定義域は C に含まれるものとする. $S : C \rightarrow C$ を非拡大写像とし, $F(S) \cap (A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$ をみたすものとする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S(\alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}(x_n - \lambda_n A x_n))$$

で逐次的に定める. ここで, 点列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$, $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$, $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ はそれぞれ

$$0 < a \leq \lambda_n \leq b < 2\alpha, \quad 0 < c \leq \beta_n \leq d < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

をみたす. a, b, c, d はある定数である. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap (A + B)^{-1}0$ の元に強収束する.

ここで, $F(S) = \{x \in C \mid x = Sx\}$ であり, $(A + B)^{-1}0 = \{x \in C \mid 0 \in (A + B)x\}$ である.

正定数 α を係数にもつ逆強単調写像 (inverse strongly-monotone mapping) $A : C \rightarrow H$ とは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つ写像をいう。最近、この写像に関する結果は数多く出版されており、Math-SciNet で「inverse strongly monotone」の検索を行うと 64 もの論文がマッチした (平成 22 年 11 月 30 日)。最も古い論文は、1998 年の F. Liu と M. Z. Nashed による論文 [2] である。次に古い論文は、2003 年の W. Takahashi と M. Toyoda による論文 [3] である。1998 年の論文を除けば、63 もの論文が実に 2003 年から 2010 年のうちに世の中に登場したことになる。ずいぶん早い広がりである。

さて、この逆強単調写像はいったいどういった形で始まったものなのか、2003 年 [3] の論文の当事者のためか、研究集会や国際会議等の場で聞かれることがある。この場をお借りして、その質問への返答を述べたい。なお、筆者の知る限り 2003 年周辺の当事者は 3 人 (W. Takahashi, H. Iiduka と筆者) おり、それらの方々によって語られるものはまた違ったものになるのであろうことはお断りしておく。

2 非拡大写像の不動点

[3] を執筆した当時に知りたかったことは、非拡大写像の不動点やそれを求めるアルゴリズムの結果はどのような問題と結びつくのかということである。背景として、非拡大写像の不動点に関する研究 ([4] など) を学んだこと、また、先人の結果 ([5], [7], [6] など) に影響されて、不動点を求めるアルゴリズムの研究を実際に行った ([8]) ことがある。

H を実ヒルベルト空間とし、 C を H の部分集合とするとき、 $T : C \rightarrow C$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは、任意の $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。また、 $x_0 \in C$ が T の不動点 (fixed point) であるとは、 $x_0 = Tx_0$ をみたすときをいう。非拡大写像 T に対して、どのような条件をみたすときに不動点が存在するのかという存在性の問題、また、存在すると仮定してどのような点列を構成したら不動点を求めることができるのかというアルゴリズムの問題が近年よく研究されてきた。

存在性に関しては、例えば、実ヒルベルト空間において、次の結果が知られている。

定理 2 ([9]). H を実ヒルベルト空間とし、 C を H の有界閉凸集合とする。 $T : C \rightarrow C$ を非拡大写像とするとき、 T の不動点が存在する。

この定理が、どのような問題の解明に応用されるのか興味があった。

また、非拡大写像 T の不動点を求めるアルゴリズムの問題に関しては、例えば、次のような点列の構成法が知られている。初期点 x_1 を C の任意の元とし、

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n$$

で逐次的に定義する方法である ([10] など). ここで, 係数の点列 $\{\lambda_n\}$ は $0 \leq \lambda_n \leq 1$ をみたす. いわゆる Mann タイプと呼ばれている. 他にもさまざまなアルゴリズムがあるが, こういった手法が T を特別な場合で考え他の問題と関連づけたとき, 既にあるよく知られた手法と対応しているのかに興味があった.

したがって, 考えたかった問題をもうあらためて述べると, 次のようになる. (1) 非拡大写像の不動点を求めることによって, 他のどのような問題の解を導きだすことができるのだろうか. 例えば, 定理 2 からどのような結果が得られるのか. (2) 非拡大写像の不動点を求めるアルゴリズムは, 不動点問題以外の他の問題のどのような手法と対応するのか. 例えば, Mann タイプの点列構成法はどのような手法と関連づけるのか.

3 逆強単調写像に関する変分不等式問題

研究の結果わかった (1) に対する一つの答えが次である: A を逆強単調写像とするとき, A に関する変分不等式問題の解の存在性は定理 2 より導かれる. また, (2) に対する一つの答えが次である: 凸関数の最小化問題に対するアルゴリズムである最急降下法が Mann タイプに対応する. 特に, 最急降下法を逆強単調写像の場合にまで拡張した点列の構成法が, 非拡大写像の不動点を求めるアルゴリズムの Mann タイプである.

順を追って説明しよう. $A : C \rightarrow H$ に関する変分不等式問題 (variational inequality problem) とは,

$$\langle Ax_0, x - x_0 \rangle \geq 0, \quad x \in C$$

をみたす $x_0 \in C$ を求める問題である. 変分不等式問題は凸関数の最小化問題の一般化である. 実際, f を H 上の微分可能な凸関数とすると, $f(x_0) = \min_{x \in H} f(x) \iff x_0$ は ∇f に関する変分不等式問題の解, すなわち, $\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$ が任意の $x \in C$ に対して成り立つ.

逆強単調写像 $A : C \rightarrow H$ に関する変分不等式問題の解の存在性を定理 2 が与える. 実際, 次が成り立つ.

定理 3 ([11]). H を実ヒルベルト空間とし, C を H の有界閉凸集合とする. $A : C \rightarrow H$ を逆強単調写像とすると, A に関する変分不等式問題の解が存在する.

この結果の鍵となるのは, 次の事実である: α を逆強単調写像の係数, $0 \leq \lambda \leq 2\alpha$ とする

とき, $I - \lambda A$ は非拡大写像になる. 実際, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned}\|(I - \lambda A)x - (I - \lambda A)y\|^2 &= \|(x - y) - \lambda(Ax - Ay)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle x - y, Ax - Ay \rangle + \lambda^2\|Ax - Ay\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2\alpha)\|Ax - Ay\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで I は恒等写像である. したがって, 閉凸集合 C への距離射影 P_C を用いて $Tx = P_C(x - \lambda Ax)$ と定めれば, T は非拡大写像である. しかも, $x_0 = Tx_0$, すなわち, $x_0 = P_C(x_0 - \lambda Ax_0)$ をみたす $x_0 \in C$ は, A に関する変分不等式問題の解である. これらのことから, 定理 2 が証明される (詳しくは, [11] をみよ). このようにして, A に関する変分不等式問題の解の存在性を非拡大写像の不動点定理より導くことができた. これは, (1) に対する一つの答えとなろう.

次に, (2) についても考えたい. H 上の凸関数 f の最小化問題に対する最急降下法 (steepest descent method) とは, 次のように点列を構成する:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \nabla f(x_n).$$

凸関数が任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

をみたすとき, ∇f は逆強単調写像になることが知られている (詳しくは, [11] およびその参考文献をみよ). すなわち,

$$\langle x - y, \nabla f(x) - \nabla f(y) \rangle \geq \alpha \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

が任意の $x, y \in H$ で成り立つ. したがって, 逆強単調写像 A に関して

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

と点列を構成する場合, この点列 $\{x_n\}$ は最急降下法の一般化といえる. 実際, $C = H$, $A = \nabla f$ とするとき, $P_H = I$ であるから $x_{n+1} = P_H(x_n - \lambda_n Ax_n) = x_n - \lambda_n \nabla f(x_n)$ である. また, その特別な場合として Mann タイプのアルゴリズムをもつ. 実際, $A = I - T$ とするとき A は $1/2$ を係数にもつ逆強単調写像であり,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= P_C(x_n - \lambda_n Ax_n) \\ &= P_C(x_n - \lambda_n (I - T)x_n) \\ &= P_C((1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n) \\ &= (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n\end{aligned}$$

が成り立つ. このようにして, 逆強単調写像に関する最急降下法が非拡大写像の不動点に関するアルゴリズムの Mann タイプに対応することがわかった. これは, (2) に対する一つの答えとなろう.

4 いくつかの結果

最急降下法を逆強単調写像の場合にまで拡張した点列の構成法 ($x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$) は, 筆者らの知る限り有限次元における研究か, $\lambda_n = \lambda$ の固定された場合など限定されたものだった. 一般的な λ_n で, また無限次元空間における研究を [11] において行った. 実際, 次が得られた.

定理 4 ([11]). H を実ヒルベルト空間, C を H の閉凸集合とする. $A : C \rightarrow H$ を正定数 α を係数にもつ逆強単調写像とし, A に関する変分不等式問題の解は存在するものとする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x_1 = x \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

で逐次的に定める. ここで, 点列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ はそれぞれ

$$0 < a \leq \lambda_n \leq b < 2\alpha, \quad 0 \leq \alpha_n \leq c < 1$$

をみたす. a, b, c はある定数である. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は A に関する変分不等式問題の元に弱収束する.

よく知られた最急降下法による点列は無限次元空間においては解に弱収束する. それでは, 強収束させるにはどのように点列を作り直せばよいか? それに答えたのが, 次の定理である. これは [12] の研究に影響されたものである.

定理 5 ([11]). H を実ヒルベルト空間, C を H の閉凸集合とする. $A : C \rightarrow H$ を正定数 α を係数にもつ逆強単調写像とし, A に関する変分不等式問題の解は存在するものとする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x_1 = x \in C$ とし,

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ C_n = \{v \in C \mid \|y_n - v\| \leq \|x_n - v\|\}, \\ Q_n = \{v \in C \mid \langle x_n - v, x - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \end{cases}$$

で逐次的に定める. ここで, 点列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$ は $0 < a \leq \lambda_n \leq 2\alpha$ をみたす. a はある定数である. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は A に関する変分不等式問題の元に強収束する.

また, 先に述べたように T を非拡大写像とすると $A = I - T$ は $1/2$ を係数とする逆強単調写像となる. 実際,

$$\begin{aligned}
 \|Ax - Ay\|^2 &= \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 \\
 &= \|(x - y) - (Tx - Ty)\|^2 \\
 &= \|x - y\|^2 - 2\langle x - y, Tx - Ty \rangle + \|Tx - Ty\|^2 \\
 &\leq \|x - y\|^2 - 2\langle x - y, Tx - Ty \rangle + \|x - y\|^2 \\
 &= 2\langle x - y, (x - y) - (Tx - Ty) \rangle \\
 &= 2\langle x - y, Ax - Ay \rangle
 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, A に関する変分不等式問題の解への収束定理の系として, 非拡大写像の不動点への収束定理を導けることに [11] の研究を通して気がついた. そこで, よく知られた非拡大写像の不動点を求めるアルゴリズムを系とするようにできないかとの問いに取り組んだ結果が [3] である. 出版の関係上, [3] の方が先の掲載となったが, 結果自体は [11] の方が先である. また, [3] は弱収束に関する結果であったが, 強収束に関して違った形の構成法を示したのが [1] である. 以上のようにして, 2003 年の結果である [3] や研究集会で発表した定理 1 に行きついた次第である.

最後に, 今後の考え得る展開について述べたい. 逆強単調写像に関する変分不等式問題の研究は, そもそも非拡大写像の不動点に収束させるアルゴリズムがどのような問題と結びつくのかを知りたかったことから行われた. これまでに述べた一連の研究によって, 非拡大写像の不動点に収束させるアルゴリズムは, 逆強単調写像に関する変分不等式問題の解へのアルゴリズムと親和的なことがわかった. 実際, [11] や [3] のような逆強単調写像に関する研究は, 非拡大写像の不動点に関する手法が有効に活用されて得られた. 2003 年以降, 逆強単調写像に関するたくさんの研究が得られているが, その多くが非拡大写像と関連のあるものばかりであることを見ても, その手法の有用さがわかる. ところで, 変分不等式問題自体もそれなりに抽象性をもった問題の枠組みである. 今後は, より具体的な変分不等式問題をみていくことによって, 非拡大写像の不動点に関する手法がどうそれらと結びつくのかを探っていくことができるであろう.

参考文献

- [1] S. Takahashi, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces*, J. Optim. Theory Appl., Online first.
- [2] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. **6** (1998), no. 4, 313–344.

- [3] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), no. 2, 417–428.
- [4] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.
- [5] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), no. 5, 486–491.
- [6] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 12, 3641–3645.
- [7] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), no. 1, 150–159.
- [8] W. Takahashi, T. Tamura, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a family of finite nonexpansive mappings in Banach spaces*, Sci. Math. Jpn. **56** (2002), no. 3, 475–480.
- [9] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.
- [10] W. Takahashi and G.-E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japon. **48** (1998), no. 1, 1–9.
- [11] H. Iiduka, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, Panamer. Math. J. **14** (2004), no. 2, 49–61.
- [12] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), no. 2, 372–379.