

A 型 Gauss-Manin 方程式系

慶応大 理工 石浦信三

上智大 理工 野海正俊

$F(x, t) = x^{\ell} + t_2 x^{\ell-2} + \dots + t_{\ell}$ ($t = (t_2, \dots, t_{\ell})$) を $A_{\ell-1}$ 型孤立特異点をもつ多項式 x^{ℓ} の versal な変形とし, S 函数の積分 $u = \int S(F) dx$ の満たす micro 微分方程式系 — $A_{\ell-1}$ 型 Gauss-Manin 方程式系を考察する。我々は, K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] により導入された flat coordinate system を用いて, その explicit な表示を与える。第 1 節で, Gauss-Manin 系の構造論を準備したのち, 第 2 節では, A 型 flat coordinate system の背後にある分数巾の構造を独立に定式化する。第 3 節で, 前 2 節の結果を統合して, A 型 Gauss-Manin 系の幾つかの表示を与えることにする。ここでは述べられなかったが, 第 2 節の結果を適用して, A 型 Gauss-Manin 系の "母函数表示" を構成することができる。これについては, S. Ishiura, M. Noumi [1] を参照されたい。

第1節 Gauss-Manin系の構造

□1. 普遍開折の Gauss-Manin系. 原点を孤立特異点とする正則函数の芽 $f: X_0 = (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow S_0 = (\mathbb{C}, 0)$ の, 基底 $T = (\mathbb{C}^{m-1}, 0)$ 上の開折 (unfolding) φ は, 可換図式

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 \hookrightarrow X = X_0 \times T & & & & \\ f \downarrow & \downarrow \varphi & \searrow p & & \\ S_0 \hookrightarrow S = S_0 \times T & & \nearrow q & & T \end{array} \quad p, q \text{ は標準射影.}$$

で, f が φ の埋め込み $S_0 \hookrightarrow S$ による引き戻しになるものとして定義される。ここで, X_0 の座標を $x = (x_0, \dots, x_n)$, S_0 の座標を t_1 , T の座標を $t' = (t_2, \dots, t_m)$ として, 埋め込み写像 $X_0 \hookrightarrow X$, $S_0 \hookrightarrow S$ は, $t'_1 = 0$ で定められるものとする。ファイバー積 $Z = X \times_S T$ を考えれば, 図式

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{q'} & X & & \\ p' \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow p & & \\ S & \xrightarrow{q} & T & & \end{array}$$

を得る。 φ の t_1 -成分を $F_1 = F_1(x, t')$ と書くと, $F_1|_{t'_1=0} = f$ となり, F_1 は f のパラメータ t' についての変形と見做すことができる。

$$(1.3) \quad F = t_1 - F_1$$

とおく。開折 φ (あるいは, 変形 F) が 普遍 (versal) だと

いうのを、次の *infinitesimally versal* の条件で定義する：

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{偏導函数 } \partial_{t_k}(F) \big|_{t=0} \ (k=1, \dots, m) \text{ が剰余環} \\ \mathcal{O}_{x_0}/(\partial_{x_0}(f), \dots, \partial_{x_n}(f)) \text{ の } \mathbb{C}\text{-線型空間としての} \\ \text{基底をなす。*)} \end{array} \right.$$

以下、普遍開折 φ について議論をすすめる。 X 上の $(n+1)$ -
 相対微分形式の $\mathcal{O}_X$ -加群 $\Omega_{X/T}^{n+1}$ について $\Omega_F = \Omega_{X/T}^{n+1}/dF \wedge \Omega_{X/T}^n$
 とおく。 Ω_F の台を、 C と書いて、 F の critical subset と呼ぶ。
 偏導函数 $\partial_{x_0}(F), \dots, \partial_{x_n}(F)$ の生成する $\mathcal{O}_X$ の ideal を I_C とすれ
 ば、 $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_X/I_C$ で、 C は X の部分多様体になっている。一方、
 S 上の正則ベクトル場のなす $\mathcal{O}_S$ -加群 Der_S について、部分
 Lie 環 $\mathcal{Q} = \{\theta \in \text{Der}_S; [D_t, \theta] = 0\}$ と考える。条件 (1.5) は
 Weierstrass の準備定理を用いて、次の定理に言い換えられる。

定理 1. 写像 $\theta \in \mathcal{Q} \mapsto \theta(F) \in \mathcal{O}_X$ は、 $\mathcal{O}_T$ -同型写像
 $(1.6) \quad \mathcal{Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_C (\xrightarrow{\sim} \Omega_F, \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n)$
 を誘導する。とくに、 $\Omega_F, \mathcal{O}_C$ は、 $\mathcal{O}_T$ 上階数 m の自由加群
 である。

この定理の系として、 $\varphi|_C : C \rightarrow S$ は、有限になり、 C の
 φ による像として、 F の discriminant D が定まる。 D は、
 S の被約かつ既約な超曲面である。

普遍開折 $\varphi : X \rightarrow S$ の Gauss-Manin 系を次の様に定める。

*) 以下、層の記号 $\mathcal{O}_x, \Omega'_{X/T}$ 等で原点での stalk を表わす。

$\varphi|_C$ の有限性から, φ (resp. p') は, $'T^*S = T^*S - T_S^*S$ 上,
 T^*X 上の De Rham 系 $\mathcal{O}_X$ (resp. T^*Z 上の $F=0$ に台をもつ代
 数的 micro 函数の系 $\mathcal{E}_{[F]} = \mathcal{E}_Z \delta(F)$) に関して 非特性的で
 ある。即ち, $\lambda = (0, dt_1) \in T^*S$ の近傍で, 標準写像
 $T^*X \xleftarrow{p} X \times_S T^*S \xrightarrow{\varpi} 'T^*S$ (resp. $'T^*Z \xleftarrow{p'} Z \times_S T^*S \xrightarrow{\varpi'} 'T^*S$) に
 ついて

$$(1.7) \quad \varpi|_{\rho^{-1}(T_X^*X)} : \rho^{-1}(T_X^*X) \rightarrow 'T^*S$$

$$(\text{resp. } \varpi'|_{\rho'^{-1}(T_{\{F=0\}}^*Z)} : \rho'^{-1}(T_{\{F=0\}}^*Z) \rightarrow 'T^*S)$$

が有限になる。そこで, micro 微分作用素環上の加群
 category の 直像

$$(1.8) \quad H_F = \int_{\varphi} \mathcal{O}_X (= \varpi_* (\mathcal{E}_{S \leftarrow X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \pi^{-1}(\mathcal{O}_X)))$$

$$= \int_{p'} \mathcal{E}_{[F]} = H^{n+1}(\varpi_* \rho'^{-1} DR_{Z/S}(\mathcal{E}_{[F]}))$$

が, λ の近傍で定義できる。 H_F を開折 φ (または変形 F) の
Gauss-Manin 系 という。 H_F は, $\mathcal{E}_S$ 上 canonical な生成元 u
 $= \int \delta(F) dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$ ($\delta(F) dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_{Z/S}^{n+1} \otimes \mathcal{E}_{[F]}$ のコホモロ
 ジー類) をもつ, simple holonomic system で, $H_F^{(k)} = \mathcal{E}_S^{(k)} u$
 $(k \in \mathbb{Z})$ が, その good filtration になる*) (詳しくは, F.
 Pham [2] を参照。) このとき, φ の普遍性は, 次のシンボ
 ルについての定理に言い換えられる。

*) 層の記号 $H_F, \mathcal{E}_S$ で $\lambda \in 'T^*S$ での stalk を表わす。

定理 2. 写像 $\theta \in q \mapsto \theta D_{t_1}^{-1} u \in H_F^{(0)}$ は, $\mathcal{O}_T$ -同型写像

$$(1.9) \quad q \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$$

を誘導する。とくに, $H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$ は, $\mathcal{O}_T$ 上 階数 m の自由加群である。

定理 1, 2 をあわせて

$$(1.10) \quad \begin{array}{ccc} & q & \\ \swarrow & & \searrow \\ H_F^{(0)} / H_F^{(-1)} & \xrightarrow{\sim} & \Omega_F \end{array}$$

という, 3つの $\mathcal{O}_T$ -加群の同型が, 成立するのである。定理 2 の同型を, $H_F^{(0)}$ にもち上げることを考える。シンボル $H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$ が $\mathcal{O}_T$ 上, 階数 m の自由加群ということから, micro 微分作用素の準備定理により, H_F (resp. $H_F^{(0)}$) は, $\mathcal{E}_S$ の可換部分環 $\mathcal{O}_T \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket [D_{t_1}]$ (resp. $\mathcal{O}_T \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket$) の上に, 階数 m の自由加群になることが従う。しかも定理 2 により,

$$(1.11) \quad D_{t_k} D_{t_1}^{-1} u \quad (k=1, \dots, m)$$

は, その自由基底を与える。いま, $q \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_T \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket$ の $\mathcal{O}_T \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket$ -部分加群 $\tilde{q} = q D_{t_1}^{-1} \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket$ を考よう。 $\tilde{q}$ の元 P は

$$(1.12) \quad P = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i D_{t_1}^{-i-1} \quad (\theta_i \in q)$$

という表示をもつものである。

定理 3. 写像 $P \in \tilde{q} \mapsto Pu \in H_F^{(0)}$ は, $\mathcal{O}_T \llbracket D_{t_1}^{-1} \rrbracket$ -左加群としての同型

$$(1.13) \quad \tilde{q} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$$

を与え、そのシンボルをとると同型 (1.9) が得られる。

こうして得られた同型写像 (1.13) が、普遍開折の Gauss-Manin 系の構造を、完全に記述する。

□ 2. Flat な座標系と、対数的ベクトル場. 同型写像

$\tilde{q} \simeq H_F^{(0)}$ を通して、 q 上に幾つかの演算を導入する。自己準同型写像 $A_k \in \text{End}_{\mathcal{O}_T}(q)$, 双線型写像 $B_k \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(q, q; q)$ ($k \in \mathbb{N}$) を次の様に定める。 $\theta, \theta' \in q$ として、

$$(2.1) \quad \begin{cases} t_1 \theta D_{t_1}^{-1} u = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\theta) D_{t_1}^{-i-1} u \\ \theta \theta' D_{t_1}^{-2} u = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\theta, \theta') D_{t_1}^{-i-1} u \end{cases}$$

とおくのである。 $A_0(\theta), A_1(\theta)$ を他の A_k ($k \geq 2$) と区別して、 $t_1 * \theta, N(\theta)$ と書く。 $\text{Der}_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} q$ により、 Der_S の $\mathcal{O}_S$ -自己準同型写像

$$(2.2) \quad \begin{cases} t_1 * : \text{Der}_S \rightarrow \text{Der}_S \\ N : \text{Der}_S \rightarrow \text{Der}_S \end{cases}$$

に係数拡大する。同様に、 $B_0(\theta, \theta'), B_1(\theta, \theta')$ を他の B_k ($k \geq 2$) と区別して、 $\theta * \theta', \nabla_{\theta}(\theta')$ と書くことにする。 $*$ について q は $\mathcal{O}_T$ -可換環になり、 $\nabla : q \times q \rightarrow q$ については $a \in \mathcal{O}_T, \theta, \theta' \in q$ として、

$$(2.3) \quad \begin{cases} 0) \nabla_{a\theta}(\theta') = a \nabla_{\theta}(\theta') \\ 1) \nabla_{\theta}(a\theta') = \theta(a) \theta' + a \nabla_{\theta}(\theta') \\ 2) \nabla_{\theta}(\theta') - \nabla_{\theta'}(\theta) = [\theta, \theta'] \end{cases}$$

という性質が確かめられる。 $\mathcal{D}_{\text{ens}} = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{Q}$ により, 係数拡大して, $*$ について $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ は $\mathcal{O}_S$ -可換環, $\nabla: \mathcal{D}_{\text{ens}} \times \mathcal{D}_{\text{ens}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{ens}}$ は, torsion free な接続 (connection) になる。しかも, D_{t_1} は, $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ の単位元であり, $\nabla_\theta(D_{t_1}) = 0$ ($\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}$) が成り立つ。このとき, 次の compatibility が成り立つ。

命題 1. $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{\text{ens}})$ における関係式として

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 1) & \quad [\nabla_{\theta_1}, \theta_2 *] - [\nabla_{\theta_2}, \theta_1 *] = [\theta_1, \theta_2] * \\ 2) & \quad [\nabla_\theta, t_1 *] + [\theta *, N] = \theta(t_1) - \theta * . \end{aligned}$$

ここで, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}_{\text{ens}}$.

接続 ∇ を導入することにより, flat な座標系という概念を明確にすることができる。その基礎となるのは次の命題である。

命題 2. i) $B_2(\theta, \theta') = 0$ ($\theta, \theta' \in \mathcal{Q}$) であれば, ∇ は $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ 上の積分可能な接続である。即ち

$$(2.5) \quad [\nabla_\theta, \nabla_{\theta'}] = \nabla_{[\theta, \theta']} \quad (\theta, \theta' \in \mathcal{D}_{\text{ens}}).$$

ii) さらに, $A_2(\theta) = 0$ ($\theta \in \mathcal{Q}$) であれば,

$$(2.6) \quad [\nabla_\theta, N] = 0 \quad (\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}})$$

が成り立つ。

∇ が積分可能であれば, $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ の ∇ に関する horizontal subspace $V = \{ \theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}; \nabla_{\theta'}(\theta) = 0 \text{ } (\theta' \in \mathcal{D}_{\text{ens}}) \}$ は, $\mathcal{Q}$ に含まれる m 次元 $\mathbb{C}$ -線型空間になる。 ∇ は torsion free なのと,

$[V, V] = 0$ となり、 $\mathcal{O}_S$ の座標系 $y = (y_1, \dots, y_m)$ で $V = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C} D_{y_i}$ を満たすものが、 $\mathbb{C}$ 上の線型変換を除いて一意に決まる。このような座標系を、flat な座標系という。(K. Saito [3], [4] を参照。)

次に、 $\mathcal{O}_S$ -準同型写像 $W \in \text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}_{\text{ens}})$ を、

$$(2.7) \quad W(\theta) = t_1 \theta - t_1 * \theta \quad (\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}})$$

を導入する。 $\Delta := \det(W)$ は、discriminant D の定義方程式を与える。ベクトル場 $\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}$ は、 $\theta(\Delta) \in \mathcal{O}_S \Delta$ となるときに、 D に沿って対数的であるといい、その全体を $\mathcal{D}_{\text{ens}}(\log D)$ と記す。このとき、 W が、 $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ から $\mathcal{D}_{\text{ens}}(\log D)$ の上への $\mathcal{O}_S$ -同型を与えることを見よう。

そのために、 $\text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}_{\text{ens}})$ 上の接続 ∇ を

$$(2.8) \quad \nabla_\theta(v) = [\nabla_\theta, v] \quad (\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}, v \in \text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}_{\text{ens}}))$$

で定めておくことにする。

命題 3. $\text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}_{\text{ens}})$ における関係式として

$$1) \quad [W, \theta *] = 0$$

$$(2.9) \quad 2) \quad \nabla_\theta(W) = [\theta *, N] + \theta *$$

$$3) \quad \nabla_{W(\theta)}(W) = W \circ \nabla_\theta(W) + [W, N \circ \theta *]$$

が成り立つ。ここで $\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}$ である。

以上の定式化の下に、次の定理を示すことができる。

定理 4. W と Δ について

$$(2.10) \quad W(\theta)(\Delta) = \theta(\alpha(W))\Delta \quad (\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}})$$

とくに, W は, $\mathcal{D}_{\text{ens}}$ から $\mathcal{D}_{\text{ens}}(\log D)$ の上への同型写像である。

付記 f が重みつき斉次多項式のときには, $H_F^{(0)}$ が $\mathcal{O}_S$ 上階数 m の自由加群となることが知られる。そのときには, 写像 $\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}} \mapsto \theta D_t^{-1}u \in H_F^{(0)}$ が $\mathcal{O}_S$ -同型になるので, $W(\theta)D_t^{-1}u \in H_F^{(-1)}$ ($\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}$) から, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{ens}}(\log D) & \rightarrow & \mathcal{D}_{\text{ens}} \\ \downarrow & & \downarrow \zeta \\ H_F^{(-1)} & \rightarrow & H_F^{(0)} \end{array}$$

が可換になり, 写像 $\theta \in \mathcal{D}_{\text{ens}}(\log D) \mapsto \theta D_t^{-1}u \in H_F^{(-1)}$ も $\mathcal{O}_S$ -同型になる。このことは, Gauss-Manin 系 H_F と, discriminant の巾 Δ^s の満す方程式系の構造上の類似を示唆している。

付記 2. □2 で展開した議論は, $\lambda = (0, dt_1) \in T^*S$ の近傍で定義され, シンボルが $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{O}_T$ -同型であるような一般の simple holonomic system に対して有効である。

第2節. 分数巾の構造と Duality

この節では, A 型 Gauss-Manin 系の flat coordinate system と flat basis の背後にある分数巾の構造と, "F-系列" "E-系列" という概念が抽象し, 系統的に論ずる。論理的には, 他の節とは独立である。

□ 0. 環 $k((x^{-1}))$ と residue. 単位元 1 をもつ可換環 k に不定元 x を添加して巾級数環 $R := k((x^{-1})) =: k[[x^{-1}]](x)$ を考える. R は, 巾級数

$$(0.1) \quad \varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i x^{m-i} \quad (\varphi_i \in k, m \in \mathbb{Z})$$

の全体で, 表示 (0.1) で $\varphi_0 \neq 0$ のとき m を φ の次数といい $m = \deg(\varphi)$ とかく。特に, $\varphi_0 = 1$ のとき φ は monic であるという。次数に関するフィルター

$$(0.2) \quad (R(m))_{m \in \mathbb{Z}} \quad R(m) = k[[x^{-1}]]x^m$$

に於て, R は分譲かつ完備な位相環である。従って, φ が monic のとき, $\forall q \in \mathbb{Z} (q \geq 0, q \mid \deg(\varphi))$ について, $\psi^q = \varphi^p$ とある monic な $\psi \in R$ が一通りに来る。 $\psi = \varphi^{\frac{p}{q}}$ とかく。微分型式の R -加群 $\Omega_{R/k}^1 (= Rdx)$ 上の residue symbol $\text{Res}_{R/k}$ が下記の性質で一意に定まる。(表示 (0.1) がいえは, $\text{Res}_{R/k}(\varphi dx)$ は, x^{-1} の係数 φ_{m+1} に他ならない。)

$$\begin{aligned}
 (0.3) \quad & R0) \quad \text{Res}_{R/k} : \bigcap_{R/k}^1 \rightarrow k \text{ は } k\text{-等同型} \\
 & R1) \quad \text{Res}_{R/k}(d\varphi) = 0 \quad (\varphi \in R) \\
 & R2) \quad \text{Res}_{R/k}(\varphi^{-1}d\varphi) = \deg(\varphi) \quad (\varphi \in R^* = R \text{ の可逆元全体})
 \end{aligned}$$

この residue については、次の Cauchy 積分表示が成り立つ。 $\xi \in R^*$ とし、

$$(0.4) \quad \varphi(x)_+ = \text{Res}_{R((\xi^{-1})) / R} \left(\frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - x} \right) \quad (\varphi \in R)$$

すなわち、 $\varphi(x)_+$ は、展開 (0.1) の x に關する多項式部分 $\sum_{i=0}^m \varphi_i x^{m-i}$ である。

□ 1. Σ -系列と Duality. $e \in A =: k[x]$ は n 次の monic

な多項式である。 $a, b \in A$ に対して

$$(1.1) \quad \langle a, b \rangle =: \text{Res}_{R/k} \left(\frac{ab dx}{e} \right) \in k$$

と定め、 $\langle \rangle$ は $B =: A/Ae$ 上の perfect pairing $\langle \rangle$

$: B \times B \rightarrow k$ を誘導する。この双対性に着目し、 B の“自己双

対的”な k -基底を構成するにとり考える。 k -加群として

と同型 $A(n-1) = A \cap R(n-1) \cong B^n$ 。 $A(n-1)$ と B とを同

一視し、 $e_i \in A(n-1)$ 、 $\deg(e_i) = i$ ($i = 0, \dots, n-1$) が、

B の k -基底をなすものとする。 $e_i^* \in A(n-1)$ ($i = 0, \dots,$

$n-1$) に対して $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つと、次の等式

$$(1.2) \quad \frac{e(\xi) - e(x)}{\xi - x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x) e_i^*(\xi)$$

は同値である。すなわち、 e_i は i 次の主係数は可逆、 e_i^* は

$(n-1-i)$ 次の主係数は可逆となる。したがって、 $a \in A$ の e

に 8 3 割算

$$(1.3) \quad a = q(a)e + r(a) \quad q(a) \in A, r(a) \in A(n-1)$$

(7. (e_i) と 双対 (e_i^*) . residue symbol を 用い?

$$(1.4) \quad \begin{cases} q(a)(x) = (ae^{-1})_+(x) = \text{Res}_{\frac{d}{dx}((x^{-1}))} \left(\frac{a(x)dx}{e(x)(x-x)} \right) \\ r(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \langle a, e_i^* \rangle e_i = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Res}_{\frac{d}{dx}} \left(\frac{ae_i^* dx}{e} \right) e_i \end{cases}$$

と表わせる。B の k -基底 (e_i) は、 $e_i^* = e_{n-1-i}$ と 0 3 と

を 自己双対的 という こと に なる ば、 二 次 (1.2) に 8 1,

$$(1.5) \quad \frac{e(\xi) - e(x)}{\xi - x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x) e_{n-1-i}(\xi)$$

が 成立 する こと と 同等 である。自己双対的 基底 の 概念 を、

無限 系列 に 延長 (2 次 の 定義 を 設ける。

定義 1. $A = k[x]$ の 元 の 系列 $(e_i)_{i=0}^\infty$ が、系 の 2 条件 を 満
た すと、 $(e_i)_{i=0}^\infty$ は E-系列 と 呼 ぶ とい う。

Σ 0) e_i は、 i 次 monic

Σ 1) $0 \leq i, j < k$ に ついて $\text{Res}_{\frac{d}{dx}} \left(\frac{e_i e_j}{e_k} \right) = \delta_{i, k-1-j}$

(条件 Σ 1) は、 A/Ae_k で、 $e_0 \dots e_{k-1}$ が 自己双対的 という

こと に 他 け ら ない。

E-系列 $(e_i)_{i=0}^\infty$ (e_i : i 次 monic の 多項式) について、相

互 数

$$(1.6) \quad \Sigma(x, \lambda) = \sum_{i=0}^\infty e_i(x) \lambda^i \in A[[\lambda]]$$

を用いると、条件 Σ 1) は (1.5) となる

$$(1.7) \quad \frac{\Sigma(\xi, \lambda) - \Sigma(x, \lambda)}{\xi - x} = \lambda \Sigma(\xi, \lambda) \Sigma(x, \lambda)$$

と書ける。 (1.7) が成り立つ。 $z = z(x, \lambda)$, $\partial_x z(x, \lambda) =$

$\lambda z(x, \lambda)^2$ を満たす。 $z = z^{-1}$ $z(x, \lambda) = z(x, \lambda)^{-1} \in A[[\lambda]]$ とお

く。 $\partial_x z(x, \lambda) = -\lambda$ より, $z(x, \lambda) = z(\lambda) - x\lambda$, したがって

$z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i \lambda^i$ ($z_i \in k$) と表わされる。 最も簡単な,

命題 1. A の monic の多項式の系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ ($\deg e_i = i$)

が F -系列を定める必要 + 十分条件は, k の元の系列 $(z_i)_{i=1}^{\infty}$

による。

$$e_i(x) = (z(\lambda) - x\lambda)^{-1} \text{ の } \lambda^i \text{ の係数}$$

と表わせることである。

F -系列は, 上の $(z_i)_{i=0}^{\infty}$ によって x -タプルされる。 $(z_i)_{i=1}^{\infty}$

が, "flat coordinate system" と呼ばれるものである。

であるが, 本節以降で両定式化する。

□ 2. F -系列と命数内の構造 k は可換体の代数。

定義 2. $A = k[x]$ の元の系列 $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ が,

$F(0) \quad F_i$ は, i 次 monic

$F(1) \quad i \leq j$ について, $\frac{1}{i} \partial_x(F_i) F_j - \frac{1}{j} \partial_x(F_j) F_i$ は,

高々 $(j-2)$ 次

という 2 条件を満たすとき, F -系列 を有するという。

R で条件 $F(1)$ は, $i \leq j$ について,

$$(2.1) \quad \frac{1}{i} F_i^{-1} \partial_x(F_i) \equiv \frac{1}{j} F_j^{-1} \partial_x(F_j) \pmod{R(-i-2)}$$

と表わされるから, $F_i \stackrel{\vee}{=} F_j \pmod{R(-i)}$ と書ける。

$$(2.2) \quad \zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i^{1/i}; \quad \zeta \equiv \zeta_i^{1/i} \pmod{P \in i}$$

0 極限と12, 1次のmonic多項式 $\zeta, x + \zeta_1 + \zeta_2 x^{-1} + \dots$ が定まる。

命題2, Σ -系列 $(F_i)_{i=0}^\infty$ と, 1次monic多項式 ζ とは

$$F_i(x) = \zeta(x)_+^i$$

に82, 1対1に対応する。

12の1次monic多項式 ζ は,

$$(2.3) \quad \zeta = x + \sum_{i=1}^\infty \zeta_i x^{1-i} \quad (\zeta_i \in k)$$

と展開すると, 上の命題は, Σ -系列が k の2つの系列 $(\zeta_i)_{i=1}^\infty$ に821107 x -タグけられることを主張12113。系列 $F_i = (\zeta^i)_+$ から,

命題3, Σ -系列 $(F_i)_{i=1}^\infty$, derivation $\partial: k \rightarrow k$ につ

いて, $i \leq j$ に対し, 多項式 $\partial(F_i) \partial_x(F_j) - \partial(F_j) \partial_x(F_i)$ は高々 $(j-2)$ 次。

が, 従う。32, Σ -系列との関係は, つぎの通りである。

(2.3) の ζ について,

$$(2.4) \quad e_i = (\zeta^i \partial_x(\zeta))_+ = \frac{1}{i+1} \partial_x(F_{i+1}) \quad (i \geq 0)$$

とおこう。 $0 \leq i, j \leq k$ の72, $e_i e_j e_k^{-1} \equiv \zeta^{i+j-k} \partial_x(\zeta) \pmod{P(-2)}$ の72,

$$\text{Res}_{k/k} \left(\frac{e_i e_j dx}{e_k} \right) = \text{Res}_{k/k} \left(\zeta^{i+j-k} dx \right) = \delta_{i+j-k, -1}$$

と71), $(e_i)_{i=0}^\infty$ は Σ -系列7203。

命題 4. E -系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ と, 1次 monic 多項式 ζ とは, (2.4) により 1対1に対応する。

そうして, 1次 monic 多項式 ζ と, F -系列 $(f_i)_{i=1}^{\infty}$, E -系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ とは, 互いに同値の対応があることが判る。

□ 3. $\zeta(x)$ の反転. 1次 monic 多項式

$$(3.1) \quad \zeta(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} s_i x^{1-i} \in k((x^{-1})) \quad (s_i \in k)$$

に対応して, 1次 monic 多項式

$$(3.2) \quad g(y) = y - \sum_{i=1}^{\infty} z_i y^{1-i} \in k((y^{-1})) \quad (z_i \in k)$$

と, ζ の逆として定まる。

$$(3.3) \quad (g \circ \zeta)(x) = x \quad (\zeta \circ g)(y) = y$$

より, $g(y)$ は k の生成元として, $y = \zeta(x)$ として, x と y の級数として解くことができる。この意味で $k = k((x^{-1})) = k((y^{-1}))$ 。

上の関係で, $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ から決まる $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は, ζ に付随する F -系列, E -系列を調べる上で重要な役割をもつ。各 $z_i \in k$ は,

z_j ($1 \leq j \leq i$) の多項式として定まる。 $z_1 = s_1$, $i \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} z_i &= - (g(y) \text{ の } y^{1-i} \text{ の係数}) = - \operatorname{Res}_{R/k} (y^{i-2} g(y) dy) \\ &= - \operatorname{Res}_{R/k} (\zeta(x)^{i-2} x d\zeta(x)) = - \frac{1}{i-1} \operatorname{Res}_{R/k} (x d\zeta(x)^{i-1}) \\ &= \frac{1}{i-1} \operatorname{Res}_{R/k} (\zeta(x)^{i-1} dx) \end{aligned}$$

母関数 $\zeta(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i \lambda^i \in k[[\lambda]]$ を用いると, $\zeta(x) = x \zeta(x^{-1})$ から,

$$z_i = \frac{1}{i-1} \zeta(\lambda)^{i-1} \Big|_{\lambda^{-1}} = \frac{1}{i-1} \zeta(\lambda)^{i-1} \text{ の } \lambda^i \text{ の係数。}$$

(以後 λ の1次 monic 多項式 $\zeta(\lambda)$ の λ^i の係数を $\zeta(\lambda)_i$ と記す。) そうして,

命題 ζ 上の記号の F は, $\zeta_i = z_i$, $i \geq 2$ に對し,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i = \frac{1}{i-1} \operatorname{Res}_{R/k} (\zeta(x)^{i-1} dx) = \frac{1}{i-1} \zeta(\lambda)_i^{i-1} \\ \zeta_i = \frac{-1}{i-1} \operatorname{Res}_{R/k} (g(y)^{i-1} dy) = \frac{-1}{i-1} z(\lambda)_i^{i-1} \end{array} \right.$$

$$=: z'' \text{, } \zeta(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \lambda^i \text{, } z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i \lambda^i \text{.}$$

次に, ζ に附随する F -系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$, E -系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$, $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を用いて表わす。不足を ζ を添加し, $\zeta = R((\zeta^{-1})) z''$,

$$F_i(x) = \zeta(x)_+^i = \operatorname{Res}_{\zeta(R)} \left(\frac{\zeta(\xi)^i d\xi}{\xi - x} \right)$$

$$= \operatorname{Res}_{\zeta(R)} \left(\frac{\eta^i \partial_{\eta} g(\eta) d\eta}{g(\eta) - x} \right) = \left(\frac{\eta \partial_{\eta} g(\eta)}{g(\eta) - x} \right) \text{ の } \eta^{-i} \text{ の係数}$$

ε , $i \geq 1$ である。(変数変換 $\xi = g(\eta)$ を用いる。) $g(\eta) :$

$\eta \in \zeta(\eta^{-1})$ の z'' , 母函数 $z(\lambda)$ であり,

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \left[\frac{-\lambda \partial_{\lambda} (z(\lambda) - x\lambda)}{z(\lambda) - x\lambda} \right]_i \\ &= -\lambda \partial_{\lambda} \log(z(\lambda) - x\lambda)_i. \end{aligned}$$

$z \in z''$, 新 F に母函数

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) \lambda^i \in k[x][[\lambda]]$$

を有する。つぎの定理を得る。

定理 1. 1 次 monic $\zeta \in k((x^{-1}))$ について, $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は

上記の組 (1) に属する。 ζ の附随する F -系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$,

E -系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ は, 母函数の間の関係式として,

$$i) \quad F(x, \lambda) = -\lambda \partial_{\lambda} \log |z(\lambda) - x\lambda|$$

$$ii) \quad E(x, \lambda) = (z(\lambda) - x\lambda)^{-1}$$

と表現される。

$\partial_x(F_i) = i e_{i-1}$ ($i \neq 1$) に注意すれば, ∂ は i から来る。
 この ∂ は, 命題 1 のパラメータづけに別の意味を与えるもの
 がある。この項の終わりに, 具体計算に役立つ, 命題 5 を
 導出する 反転公式 を与える。

命題 6 任意の $i, j \in \mathbb{Z}$ について,

$$\frac{1}{i} \zeta(\lambda)_{i+j}^i = \frac{-1}{j} z(\lambda)_{i+j}^j$$

 が成り立つ。

□ 4. flat coordinate system. 前項の $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^\infty$ を,
 “座標系” と考え, k とした可算変数の多項式環 $\mathbb{Q}[\zeta] =$
 $\mathbb{Q}[\zeta_1, \zeta_2, \dots]$ とする。(3.1) の ζ とし, 対応する $z_i \in \mathbb{Q}[\zeta]$
 ($i \neq 1$) を考える。 $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^\infty$ の多項式 $z_i = z_i(\zeta)$ は,
 (4.1) $z_1(0) = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial \zeta_j} = \delta_{ij} \quad (i \leq j)$
 を満たす。 $z = (z_i)_{i=1}^\infty$ は, $k = \mathbb{Q}[\zeta]$ の代数的に独立な生成
 系を与える。この意味で, $z = (z_i)_{i=1}^\infty$ と $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^\infty$ に伴う,
 flat coordinate system という, ($k = \mathbb{Q}[\zeta] = \mathbb{Q}[z]$)
 となる。 ζ に伴う F-系列 $(F_i)_{i=1}^\infty$, E-系列 $(e_i)_{i=1}^\infty$ につ
 いて,

(4.2) $\partial_{z_1}(F_j) = j e_{j-1} \quad (j \neq 1, j < 0 \text{ ならば } e_j = 0)$
 とおけると判る。一般に, $k = \mathbb{Q}[\zeta]$ の代数的に独立で,
 $\mathbb{Q}$ -代数の生成系を, 座標と呼べば, 次の定理が成り立つ

定理 2. $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ に伴う flat coordinate system $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ は, (4.1) (4.2) を満たす唯一の $k = \mathbb{Q}[s]$ の座標と一致し, 特徴づけられる。

A 型 Gauss-Manin 系の flat coordinate system は, 以下の様で, $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は "redundant" 12 個とれる。これを固定し, $t = (t_2, \dots, t_d)$ を変数とする多項式環 $k, \mathbb{Q}[t] = \mathbb{Q}[t_2, \dots, t_d]$ 上, $\mathbb{Q}$ 係多項式

$$(4.3) \quad F = x^d + t_2 x^{d-2} + \dots + t_d \in k[x]$$

を考える。 $k((x^{-1}))$ 上, (4.3) の分数部

$$(4.4) \quad \zeta = F^{1/d} = x + s_2 x^{-1} + s_3 x^{-2} + \dots$$

をとり, ζ が $2\pi i$ 回転すると, ζ に付随する F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$, E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ 及び $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を考えることが出来る。このとき,

$$(4.5) \quad F_i = (F^{\frac{i+1}{d}})_+, \\ e_i = \frac{1}{i+1} \partial_x (F^{\frac{i+1}{d}})_+ = \frac{1}{i+1} \partial_x (F_{i+1})$$

とくに, $F_0 = F$, $e_{d-1} = \frac{1}{d} \partial_x (F)$ である。そして, $z_1 = 0$,

$$(4.6) \quad z_i = \frac{1}{i-1} \operatorname{Res}_{k((x^{-1})) / k} (F^{\frac{i-1}{d}}) \quad (i \geq 2)$$

上, $\frac{\partial z_i}{\partial t_j} = \delta_{ij}$ ($i \leq j$) が判る。従って, $(z_2, \dots, z_d)$ は $k = \mathbb{Q}[t]$ の新しい座標と一致する。 ($i > d$ について, z_i は $(z_2, \dots, z_d)$ の多項式である。) このとき,

定理 2 に対応して,

$$(4.7) \quad \partial_{z_i}(F) = d e_{d-i} \quad (2 \leq i \leq d)$$

が成り立つ。通常, Jacobi 行列式が 1 となるように, $y_i = \ell z_i$ ($2 \leq i \leq \ell$) とおいて, $y = (y_2, \dots, y_\ell)$ と, $t = (t_2, \dots, t_\ell)$ に伴う $A_{\ell-1}$ 型 flat coordinate system と呼ばれる。 (これは, K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] の意味で, $A_{\ell-1}$ 型 "flat generator system" に一致する。) この flat coordinate system $y = (y_2, \dots, y_\ell)$ を用いて,

$$(4.8) \quad \begin{cases} F = -\ell \log \left(1 - \frac{1}{\ell} \sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^{i-1} \right)_\ell \\ e_i = \partial_{y_{\ell-i}}(F) = \left(1 - \frac{1}{\ell} \sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^{i-1} \right)_\ell^{-1} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq \ell)$$

が, 定理 1 から従う。まず, (4.7) は,

$$(4.9) \quad \partial_{y_i}(F) = e_{\ell-i} \quad (2 \leq i \leq \ell)$$

に代わる。座標 $t = (t_2, \dots, t_\ell)$ と $y = (y_2, \dots, y_\ell)$ の間の変換公式は, $S(\lambda) = \left(1 + \sum_{i=2}^{\ell} t_i \lambda^{i-1} \right)^{1/\ell}$ と, 媒介変数 λ (2, 命題 6 に依り), 計算される。

$$(4.10) \quad y_i = \frac{\ell}{i-1} \left(1 + \sum_{j=2}^{\ell} t_j \lambda^{j-1} \right)_\ell^{\frac{i-1}{\ell}} \quad (2 \leq i \leq \ell)$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} t_i = \frac{-\ell}{i-2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^{j-1} \right)_\ell^{i-2} \quad (2 \leq i \leq \ell-1) \\ t_\ell = -\ell \log \left(1 - \frac{1}{\ell} \sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^{j-1} \right)_\ell \end{cases}$$

となる。

第3節. A-型 Gauss-Manin 系の構造

この節では、1節の議論を A 型 Gauss-Manin 系の場合に具体化し、2節で示した公式により、A 型 Gauss-Manin 系の幾何的表示式を与える。

□1. A 型 Gauss-Manin 系の flat basis, flat coordinate system. A_{q-1} 型特異点を持つ多項式 x^q ($q \geq 2$) の versal 変形

$$(1.1) \quad F(x, t) = x^q + t_2 x^{q-2} + \cdots + t_q \quad t = (t_2 \cdots t_q)$$

の Gauss-Manin 系 H_F を考察する。 $t' = (t_2 \cdots t_{q-1})$ とおき、座標 (x, t') (または t, t') をもつ、アフィン空間を、 $X(S, T)$ で表わす。 $F_1(x, t') = F(x, t) - t_q$ とおくと普遍開折

$$(1.2) \quad \varphi: X \rightarrow S, \quad \varphi(x, t') = (t', -F_1(x, t'))$$

についての、De Rham 系 $\mathcal{O}_X$ の積分として定まる $\mathcal{E}_S$ -加群が、Gauss-Manin 系である。第1節と同様、 $T^*S \ni (0, dt_q)$ での芽、で考えることができる。 $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, t'\}$, $\mathcal{O}_S = \mathbb{C}\{t'\}$, といふ形も同様である。 S の versality から、階数 $(q-1)$ の3つの $\mathcal{O}_T$ -自由加群

$$\mathcal{G} = \{ \theta \in D_{\mathcal{G}} : \int \eta_{\theta} \cdot \theta = 0 \}$$

$$(1.3) \quad \Omega_F = \Omega'_{X/T} / dF_1 \wedge \Omega_X \xleftarrow{\sim} \Omega'_X(\mathcal{F}) = \Omega_C$$

$$H_F^{(0)} / (H_F^{(-1)})$$

の (b) の $\mathcal{O}_T$ -同型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & \Omega_F \\ & \searrow & \downarrow \int \\ & & H_F^{(0)} / H_F^{(-1)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow & \int \theta(F) dx \wedge 1 \\ \theta & \rightarrow & \downarrow \\ & & [\theta D_{\mathcal{G}}^{-1} u] \end{array}$$

があり, $\int \theta(F) dx \wedge 1 = u = \int S(F(x, t)) dx$ は, simple holonomic system (1.2) の H_F の標準的表現である。

(1.2), (1.3) の同型は, $\mathcal{G} = \mathcal{G} D_{\mathcal{G}}^{-1} \mathcal{G} D_{\mathcal{G}}^{-1}$ から $H_F^{(0)}$ への

$\mathcal{O}_T \mathcal{G} D_{\mathcal{G}}^{-1}$ -同型 $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} u$ を誘導する。(1節を参照) この同

型 $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$ を用いて, $\mathcal{G}$ 上に幾つかの演算が定義される。

それらを具体化する。鍵となるのは, 図式

$$(1.4) \quad \begin{array}{c} \mathcal{G} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_F \rightarrow 0 \end{array}$$

である。 $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_X$ は, $\theta \mapsto \theta(F)$ である $\mathcal{O}_T$ -同型で, そ

の像を $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^{d-2} \mathcal{O}_T x^i$ とおくと, $\mathcal{O}_T$ -直和分解 $\mathcal{O}_X = \mathcal{L} \oplus$

$\mathcal{O}_X \mathcal{G}$ を得る。 $a \in \mathcal{O}_X$ に対して,

$$(1.5) \quad a = r(a) + g(a) \mathcal{G} \quad r(a) \in \mathcal{L}, \quad g(a) \in \mathcal{O}_X$$

とおくと, 割算の一意性から, $\mathcal{O}_T$ -同型 $r: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$, $g:$

$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ が定まる。 $\mathcal{O}_T$ -同型 $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ を用いて, $\mathcal{G}$ 上の演

算を, 次の言葉に翻訳する。

命題 1. 上の記号の下で, $\theta, \theta' \in \mathcal{G}$ について,

$$\begin{aligned} \text{i)} & (t_\theta * \theta)(F) = -r(\theta(F)F_1), \quad N(\theta)(F) = \partial_x g(\theta(F)F_1) \\ \text{ii)} & (\theta * \theta')(F) = r(\theta(F)\theta'(F)), \quad (\nabla_\theta \theta')(F) = \theta\theta'(F) - \\ & \partial_x g(\theta(F)\theta'(F)), \quad \text{iii)} \quad k \geq 2 \text{ 時, } A_k(\theta) = 0, \quad B_k(\theta, \theta') = 0. \end{aligned}$$

iii) から, torsion free の接続 ∇ は, 積分可能で, N について, $[\nabla_\theta, N] = 0$ とある。また, $\nabla = D_\theta$ とおくと, $H_F^{(0)}$ で, 等式

$$(1.6) \quad \begin{cases} t_\theta \theta D^{-1}u = (t_\theta * \theta) D^{-1}u + N(\theta) D^{-2}u \\ \theta \theta' D^2u = (\theta * \theta') D^{-1}u + \nabla_\theta \theta' \end{cases}$$

が, $\theta, \theta' \in \mathcal{G}$ について成り立つ。 ∇ の積分可能性と torsion free であるから, S の座標系 $y = (y_1 \dots y_k)$ で, flat 基底と取り替える。その中 2 個, 標準基底と取り替える。

O_T -同型 $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}$ を通じて, ∇ は $\mathcal{L}$ の接続, N は $\mathcal{L}$ の O_T -伴同型と考える。 $a \in \mathcal{L}$, $\theta \in \mathcal{G}$ について, $N(a) = \partial_x g(aF_1)$

$\nabla_\theta a = \theta(a) - \partial_x(g(a\theta(F)))$ とおけばよい。 $L = \{a \in \mathcal{L} : \nabla_\theta a = 0, \theta \in \mathcal{G}\}$ とおくと, flat 座標系 $y = (y_1 \dots y_k)$ と, $\mathcal{L}$ の $\mathbb{C}$ -基底 (すなわち $\mathcal{L}$ の flat basis とする) $e_0 \dots e_{k-2}$ とおき, $D_{y_i}(F) = e_{k-i}$ になるように選ぶ。 (対角に選ぶ)。 $k \geq 2$ 時, $\mathcal{L}$ の flat basis をつぎのようにならべる。 $[\nabla_\theta, N] = 0$

($\theta \in \mathcal{G}$) より, L は N -不変, $\mathbb{C}$ -伴同型 $N: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ について,

補題 1, $N: L \rightarrow L$ は, $\frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$ を固有値とし,

その固有ベクトルからなる L の基底 $e_0, \dots, e_{q-2}$ 2"

$$N e_i = \frac{i+1}{q} e_i \quad e_i|_{t=0} = x^i \quad (0 \leq i \leq q-2)$$

と成るものが唯一つ存在する。

この条件で定まる L の基底 $e_0, \dots, e_{q-2}$ を標準的 flat

basis, $D y_i(F) = e_{q-i}$ が基底となる flat の座標系を, 標準的 flat coordinate system という。

補題 2, $a \in \mathcal{L}$, $\mathbb{Q}[x]$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ について,

i) $\forall \theta \ a = 0$ ($\forall \theta \in \mathcal{G}$) と成るのは, $a = \partial_x(b)$, $b \in \mathbb{Q}_T[x]$ 2", $\partial_x(b)\theta(F) - \theta(b)\partial_x(F) \in \mathcal{L}$ と成るものが存在するとか, そのときに限る。

ii) $Na = \lambda a$ と成るのは, $a = \partial_x(b)$, $b \in \mathbb{Q}_T[x]$ 2", $\partial_x(b)F_1 - \lambda b \partial_x(F) \in \mathcal{L}$ と成るものが存在するとか, そのときに限る。

そこで, 前節の議論を繰り返してみると, $\mathcal{F} = F^{1/q} \in \mathbb{Q}_F(\bar{x})$ に付随して定められた $\mathcal{F}$ -基底 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ について, $e_0, \dots, e_{q-2}$ が, 標準的 flat basis を与え, 前節の $y_2, \dots, y_q$ が標準的 flat coordinate system を与えることが判る。

よって方程式系 $\mathcal{H}_F$ の極性が versality $\mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{L} \rightsquigarrow \mathbb{Q}_F$ となる。また $\mathcal{X}$ 上の $\partial_x(F)$ に関する割算を通じて死なれるという観点から, $\mathbb{Q}_F$ の双対性も深く結びついている。 $a, b \in \mathbb{Q}_x$ とし,

(1.7) $\langle a, b \rangle = \ell \operatorname{Res}_{X/T} \left(\frac{ab dx}{\partial_x(F)} \right) = \frac{\ell}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma(t)} \frac{ab dx}{\partial_x(F)} \in \mathbb{Q}_T$
 とおく。 ($\ell \geq 2$, $\gamma(t)$ は $\{x \in \mathbb{C} : \partial_x F_1(x, t) = 0\}$ を一周する cycle がある。) $\langle, \rangle$ は図式 (1.4) に依り Ω_F 上の perfect pairing を誘導する。(Serre duality)。
 この $\mathbb{Q}_T$ -双-線形式 $\langle, \rangle: \Omega_F \times \Omega_F \rightarrow \mathbb{Q}_T$ と、与えられた上の微分 $\nabla: N$ との関係は、つぎの通り。($a \in \mathbb{Q}_T[x]$ ならば、 $\operatorname{Res}_{X/T} \left(\frac{a dx}{\partial_x(F)} \right)$ と、第2節、0の意味の $\operatorname{Res}_{\mathbb{Q}_T((x))/\mathbb{Q}_T} \left(\frac{a dx}{\partial_x(F)} \right)$ と一致する。)

命題 2. $a, b \in L$ について、

$$i) \quad \langle \nabla_\theta a, b \rangle + \langle a, \nabla_\theta b \rangle = \theta \langle a, b \rangle \quad (\theta \in \mathfrak{g})$$

$$ii) \quad \langle Na, b \rangle + \langle a, Nb \rangle = \langle a, b \rangle$$

i) から、双-線形式 $\langle, \rangle$ は L 上で $\mathbb{C}$ -値とみなすことが出来る。 ii) から、標準的な flat basis $e_0, \dots, e_{q-2}$ については、直交関係

$$(1.8) \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i, q-2-j}$$

が成り立つ。 $e_0, \dots, e_{q-2}$ の自己双対性が判るのがある。これから、 $\mathbb{Q}_X$ での $\partial_x(F)$ に依る割算について、 $a \in \mathbb{Q}_X$ ならば $r(a)$ が

$$(1.9) \quad \begin{aligned} r(a) &= \sum_{j=0}^{q-2} \langle a, e_{q-2-j} \rangle e_j \\ &= \ell \sum_{j=0}^{q-2} \operatorname{Res}_{X/T} \left(\frac{a e_{q-2-j} dx}{\partial_x(F)} \right) e_j \end{aligned}$$

で与えられることに注意しておく。

□ 2. Gauss-Manin 系 H_F の (A, B) -表示 Gauss-

Manin 系 H_F の表示式 (1.6) は, 標準的 flat basis

$e_0, \dots, e_{q-2}$ と flat coordinate system $y = (y_2, \dots, y_q)$

を用いて具体化する。 $H_F^{(0)}$ の $O_T \otimes D^{-1}$ -基底 と 12. $u_0, \dots$

u_{q-2} とする。 θ の γ とする。

$$(2.1) \quad u_i = D_{y_{q-i}} D_{y_q}^{-1} \int \delta(F) dx = \int e_i \delta(F) dx \quad (0 \leq i \leq q-2)$$

$$D = D_{y_q} = D_{t_q}, \quad w(\theta) = t_q \theta - t_q * \theta = y_q \theta - y_q * \theta \quad \text{where}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} y_q \theta D_{y_q}^{-1} u = (y_q * \theta) D_{y_q}^{-1} u + N(\theta) D_{y_q}^{-2} u \\ \theta \theta' D_{y_q}^{-2} u = (\theta * \theta') D_{y_q}^{-1} u + (\nabla_\theta \theta') D_{y_q}^{-2} u \\ (\theta, \theta' \in \mathcal{G}) \end{cases}$$

を得る。 $\mathcal{G}$ の基底 $D_{y_q}, \dots, D_{y_2}$ に対応し 12. $\mathcal{L}$ の基底 $e_0, \dots$

e_{q-2} とする。 ベクトル $\vec{e} = {}^t(e_0, \dots, e_{q-2})$ について, $y_q *$

$N, D_{y_q} *$ を行列表示し, $A_0, A_1, B^{(q)}$ とかく。

$$y_q * \vec{e} = A_0 \vec{e}, \quad N \vec{e} = A_1 \vec{e}, \quad D_{y_q} * \vec{e} = B^{(q)} \vec{e}, \quad \vec{e} \text{ の直交性?}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} A_1 = \text{diag}(\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}) \\ A_0 = (A_{0,ij})_{0 \leq i,j \leq q-2} \quad A_{0,ij} = -q R_{0,ij} \left(\frac{(y, y_q) e_i e_{q-2-j} dx}{\partial_x(F)} \right) \\ B^{(q)} = (B^{(q)}_{ij})_{0 \leq i,j \leq q-2} \quad B^{(q)}_{ij} = q R_{0,ij} \left(\frac{e_{q-2-i} e_j e_{q-2-j} dx}{\partial_x(F)} \right) \end{cases}$$

が判る。

定理 1. Gauss-Manin 系 H_F は, flat coordinate system $y = (y_2, \dots, y_q)$ に対して (2.1) のベクトル $\vec{u} = {}^t(u_0, \dots, u_{q-2})$ の方程式系, 12, (2.3) の $A_0, B^{(q)} \in$

$\in M(Q-1, Q_T)$, $A_1 \in M(Q-1, \mathbb{C})$ を用いて,

$$\begin{cases} y_Q \vec{u} = A_0 \vec{u} + A_1 D_{y_0}^{-1} \vec{u} \\ D_{y_k} D_{y_0}^{-1} \vec{u} = B^{(k)} \vec{u} \quad (2 \leq k \leq Q-1) \end{cases}$$

と表示される。

標準化された flat coordinate system を用いて結果,

$B^{(k)}$ が函数行列, A_1 が対角化された定数行列) により, また Ω_F の duality の反映として, 行列 $A_0, B^{(k)}$ が反対角線について対称となる。また, 定理 1 の方程式系の compatibility から, 次の命題を得る。

$$\left[\begin{array}{l} \text{命題 3. i) } [B^{(k)}, A_0] = 0 \quad (k=2, \dots, Q-1) \\ \text{ii) } [B^{(k)}, A_1] - B^{(k)} = \partial_{y_k}(A_0) \quad (k=2, \dots, Q-1) \end{array} \right.$$

定理 1 の行列の具体計算を遂行するには, 本質的には,

residue

$$(2.4) \quad Q \operatorname{Res} \left(\frac{F e_i e_j dx}{\partial_x(F)} \right) \quad (0 \leq i, j \leq Q-2)$$

を決定すればよい。巾級数環 $\mathbb{C}[[x^{-1}]]$ 上の函数 $f = f^{(1/e)}$ をと

1). f に付随する E -系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ をとる。 $Q \operatorname{Res} \left(\frac{F e_i e_j dx}{\partial_x(F)} \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{f e_i e_j dx}{\partial_x(f)} \right)$ に注意して, 次の母函数を考へる。 $E(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \lambda^i$ とおくと,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Res} (E(\lambda) E(\mu) f \partial_x(f)^{-1} dx) \\ &= \sum_{i, j \geq 0} \operatorname{Res} (e_i e_j f \partial_x(f)^{-1} dx) \lambda^i \mu^j \end{aligned}$$

2節の結果から, (2.1) $i=2$ を用いて, $E(\lambda)^{-1} = \lambda(\lambda) - \lambda$,

$z(\lambda) = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} z_i \lambda^i$ と表わせば,

$$\text{命題 4} \quad \text{Res} \left(\frac{E(\lambda) E(\mu) f d\lambda}{\partial_{\lambda}(f)} \right) = \frac{\partial_{\lambda} z(\lambda) - \partial_{\mu} z(\mu)}{\mu z(\lambda) - \lambda z(\mu)}$$

が、成り立つ。この表すは、

$$(2.6) \quad \lambda \mu \text{Res} \left(\frac{E(\lambda) E(\mu) f d\lambda}{\partial_{\lambda}(f)} \right) \\ = (\lambda \partial_{\lambda} + \mu \partial_{\mu}) \log \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} z_i (\lambda^{i-1} \mu + \dots + \lambda \mu^{i-1}) \right)$$

とも書かれる。

この母函数を用いて (2.4) を計算すると、(2.6) の右辺を

$\lambda^i \mu^j$ の係数を $\Lambda(i, j)$ と書けば、 $0 \leq i, j \leq \ell-2$ のとき、

$$(2.7) \quad \ell \text{Res} \left(\frac{e_i e_j F d\lambda}{\partial_{\lambda}(F)} \right) = \Lambda(i+1, j+1) - \Lambda(i+j+2-\ell, \ell)$$

となる。

□3. 対数的バクトル場と discriminant の微分方程式

第1節の議論に於て、 $w(\theta) = t_{\ell} \theta - t_0 * \theta = y_{\ell} \theta - y_0 * \theta$

を与える $\mathbb{Q}_5$ -等同型 $w: \text{Den}_{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Den}_{\mathbb{N}}$ は、discriminant D

に沿って対数的バクトル場の全体 $\text{Den}_{\mathbb{N}}(\log D)$ の上への同

型を与える。 $\text{Den}_{\mathbb{N}}$ の $\mathbb{Q}_5$ -基底 $D_{y_{\ell}}, \dots, D_{y_2}$ についての w の

行列表示は、(2.3) の行列を用いて、 $R =: y_{\ell} I - A_0$ と与え

られる。 $\varepsilon = 2$ 、

$$(3.1) \quad \theta_k = w(D_{y_k}) \quad (2 \leq k \leq \ell) \quad {}^t(\theta_2, \dots, \theta_{\ell}) = R {}^t(D_{y_2}, \dots, D_{y_{\ell}})$$

とみくと、 $\theta_2, \dots, \theta_{\ell}$ は、 $\text{Den}_{\mathbb{N}}(\log D)$ の $\mathbb{Q}_5$ -自由基底となる。

今の場合、 $\Delta = \det(w) = \det(R)$ は、 $\mathcal{F} = x^{\ell} + t_2 x^{\ell-2} +$

$\dots + t_{\ell}$ の判別式がある。表示式 (2.2) から、 $w, *$ の関係

式を用いて, Gauss, Manin 系 H_F の, 対数的ハクトル場 $\theta_0, \dots, \theta_2$ に関する表示式を得る。

定理 2. 上の記号の F, H_F において,

$$\theta_k \vec{u} = B^{(k)}(A_1 - I) \vec{u} \quad (2 \leq k \leq Q)$$

 が成り立つ。

$w: \text{Den}_S \rightarrow \text{Den}_S$ を用いると, discriminant Δ について,

$$(3.3) \quad w(\theta) \Delta = \theta(\text{tn}(w)) \Delta, \quad (\theta \in \text{Den}_S)$$

が成り立つことは, θ によって示される。 $\text{tn}(w) = \text{tn}(P)$ に注目する。 flat basis に関する (2. $\partial_x F(\lambda) = \lambda F(\lambda)^2$, つまり

$$(3.4) \quad \sum_{i=0}^{Q-2} e_i e_{Q-2-i} = \frac{1}{Q} \partial_x^2(F)$$

より, 命題 4 から,

$$\begin{aligned} \text{命題 5} \quad \text{tn}(w) &= \text{Res} \left(\frac{F \partial_x^2(F) dx}{\partial_x(F)} \right) \\ &= Q \log \left(1 + \sum_{i=2}^Q \frac{i-1}{Q} y_i \lambda^i \right)_Q \end{aligned}$$

$$\tau = \text{tn}(w) = \text{tn}(P) \text{ と } \tau \text{ である。}$$

定理 3. $\text{Den}_S(\log D) \cap O_S$ -基底 $\theta_0, \dots, \theta_2$ ($\theta_k = w(\gamma_k)$) について,

$$\theta_k(\Delta) = \partial_{y_k}(\tau) \Delta \quad (2 \leq k \leq Q)$$

$$\partial_{y_k}(\tau) = (k-1) \left(1 + \sum_{i=2}^Q \frac{i-1}{Q} y_i \lambda^i \right)_{Q-k}^{-1} \quad (2 \leq k \leq Q)$$

が成り立つ。

文献

- [1] Ishiura, S. and Noumi, M. : A calculus of the Gauss
-Manin system of type A_e . I, II. Proc. Japan Acad.
Vol. 58, No.1, 13-16, No.2, 62-65, (1982).
- [2] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de
Gauss-Manin, Birkhäuser, (1979).
- [3] Saito, K. : Primitive forms for a universal unfolding
of a function with an isolated critical point.
(RIMS. preprint).
- [4] Saito, K. : On a linear structure of a quotient
variety by a finite reflexion group. (RIMS. preprint)
- [5] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain
generator system of the ring of invariants of a
finite reflection group. Comm. in Algebra, 8,
373 - 408 (1980).