

氏 名	木 田 重 雄 き だ しげ お
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	理 博 第 314 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 49 年 3 月 23 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
学 位 論 文 題 目	An Asymptotic Theory of Turbulence for Large Reynolds Numbers (高レイノルズ数に対する乱流の漸近理論)
論文調査委員	(主 査) 教 授 巽 友 正 教 授 富 田 和 久 教 授 松 原 武 生

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は一樣な乱流の高 Reynolds 数における漸近的性質を研究するための新しい近似方法を提案し、この方法を用いて 1 次元 Burgers モデル乱流と、非圧縮性流体における 2 次元乱流とを取扱っている。

Burgers 乱流は、実在の圧縮性流体における衝撃波乱流の一つのモデルである。高 Reynolds 数における Burgers 方程式の解は、任意の連続な初期形から出発したものでも、有限時間後には不規則な 3 角波列に移行する。3 角波は粘性消散のためにエネルギーを失って減衰する一方、波面同志の衝突と融合によって個々の波はより大きくなり、その個数は減少する。単位長さ当りの 3 角波の数を N 、個々の波の強さを μ 、相隣る波の間隔を λ で表わし、 μ および λ の確率分布密度をそれぞれ $f(\mu)$ 、 $g(\lambda)$ とおく。3 角波の運動法則と確率保存則を用いると、 N 、 $f(\mu)$ 、 $g(\lambda)$ を支配する一連の方程式が導かれるが、これらの方程式はより高次の分布を含むため閉じていない。ここで乱れのための空間的相似性を仮定すると、3 角波の衝突率 α ($0 \leq \alpha \leq 1$) をパラメータとする相似解が得られる。

これらの解から、乱れのエネルギーは α を含んだ形で与えられるが、その中で最大エントロピーを与える分布に対する $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合が特に重要で、この場合、エネルギーは時間の逆数に比例して減衰するという結果が得られる。この結果は、他の研究者 (Crow-Canavan, その他) による数値実験の結果と極めて良い一致を示している。

速度相関、エネルギー・スペクトルなどの統計量は、さらに相隣る 3 角波間の独立性を仮定することによって導かれる。とくに、エネルギー・スペクトル $E(k)$ は、波数 k の大きい値に対して k^{-2} の漸近形をもつが、これは高 Reynolds 数における乱れの場合、3 角波という不連続な構造をもつことの表われである。

非圧縮性流体における 2 次元乱流は、やはり実在の 3 次元乱流の一つの簡単化されたモデルとして考察される。この場合の高 Reynolds 数における漸近解としては、渦層または渦管が考えられるが、渦層は極めて不安定で時間が経つにつれて多くの渦管に分裂する。一方、渦管は微小攪乱に対して安定であること

が証明できるので、一つの理想化としては、2次元乱流は純粋に渦管だけの集まりであると考えてよい。

渦管同志の相互作用は2個の渦管の間のその重ね合わせで表わされる。まず、渦管が十分細い場合には、これらを2個の回転円柱で近似してそれらの相互作用を計算すると、2個の円柱の運動は、それらを無限小半径の渦糸でおきかえた場合の運動に、円柱半径の2乗に比例する振幅をもつ微小振動を重ね合わせたものであることが示される。従って高 Reynolds 数の2次元乱流を構成する渦管がすべて十分に細い場合には、それらを渦糸でおきかえても差支えないことが分る。

2次元渦糸系の統計力学の骨組みは、すでに Onsager によって与えられている。本論文では先ず、正負さまざまな強さの渦糸からなる系が、時間の経過と共に、同符号の渦糸のみからなるクラスターを形成する方向に変化することを推論し、ついで一つのクラスター内での渦糸の空間分布を考察する。簡単のために同じ強さの渦糸からなる系をとり、点 x における渦糸の個数密度を $F(x)$ で表わす。分布のエントロピーを最大にする条件から平衡分布を求めると、渦糸一对当りのエネルギー E をパラメータとして一連の平衡分布が得られる。申請者による100個の渦糸を用いた数値実験によれば、分布関数は時間が経つにつれて、与えられた E の値に対応する平衡分布に近づくことが確かめられる。

このような渦糸系で表わされる2次元乱流においては、渦糸間の衝突が無いためにエネルギーは保存され、またエネルギー・スペクトルは、渦糸の特異性を反映して $E(k) \propto k^{-1}$ の漸近形をもつことが示される。

参考論文は、半無限円管を通る層流の入口附近における助走流の計算で、助走区間の各断面における速度分布を境界層近似を用いた数値計算によって求めている。

論文審査の結果の要旨

一様な乱れの統計理論においては、従来乱れの速度は空間的に Fourier 級数に分解され、乱れの場合はあらゆる方向にあらゆる波数、振幅、位相で広がる正弦波の集まりとして表現されてきた。これらの正弦波は、流体力学方程式の非線型性のために互いに独立ではなく、異なる波数の Fourier 成分の振幅、位相は非線型方程式を通じて結びつけられている。このような非線型相互作用は乱れの Reynolds 数と共に増大するから、高 Reynolds 数の極限では相互作用は極めて大きくなり、多かれ少なかれ線型解からの摂動展開の性格をもつ従来の乱流理論は、その有効性が疑わしくなる。

本論文は、このような状況に対して、乱れの場合を Fourier 級数ではない他の自由度によって表現すること、そしてそのような自由度としては流体力学方程式の高 Reynolds 数における漸近解を採用することを提案している。漸近解は、圧縮性流体においては衝撃波、非圧縮性流体においては渦層または渦管の形態をとる。このような漸近解は、それ自身単独で流体力学方程式の非線型解であるため、先に述べた非線型相互作用の本質的部分をすでに体现していると言えるが、これらの漸近解の重ね合わせは解ではないので、その間になお相互作用が働くのは止むを得ない。この相互作用をいかに処理できるかに、この種の理論の成否がかかっていると言える。

本論文は、具体的には1次元の Burgers モデル乱流と非圧縮性流体の2次元乱流を取扱っているが、前者においては乱れの場合を不規則な3角衝撃波の列、後者においては平行直線渦糸の集まりとして表現している。Burgers 乱流における3角衝撃波は極めて簡単な運動法則をもつため、その集団の分布関数を支

配する方程式は比較的簡単な構造をもち、その解もまた閉じた形に求められる。そして、これらの分布関数に基く乱れのエネルギー、相関関数、エネルギー・スペクトルなどの統計量の計算結果はいずれも高 Reynolds 数において期待される漸近的性質を示し、また数値実験の結果とも良く一致している。

2次元乱流における渦糸の運動法則は3角波のそれほど簡単ではなく、また質的にも異っている。このため2次元乱流に関する本論文の成果は1次元乱流のそれほど決定的なものとは言えない。しかし、簡単な同じ強さの渦糸からなる系については、渦糸の空間分布の平衡分布を導き、それを数値実験の結果によって確かめている。

これらの結果はいずれも、乱れの場合の非線型漸近解の集まりによる表現という新しい方法によって始めて導かれたものであり、この方法がさらにより複雑な3次元乱流に適用された場合にも、多くの本質的な成果を挙げることを期待させるに十分である。これを要するに、本論文の研究は流体物理学における基本的問題である乱流の構造に関して、新たな独創的な知見を加えたものと言うことができる。参考論文も、また申請者の流体物理学における高い学識と研究能力を示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。